THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

531
F495e

REMOTE STORAGE

Elementar-Lehrbuch

der

Mechanik

fester Körper.

Nach den neuesten Quellen

für die

k. k. Artillerieschulen

bearbeitet

von

Anton Fink,

Hauptmann und Professor der Mathematik im k. k. Bombardier-Corps.

Wien, 1845.

Verlag von Franz Tendler.

531
F495e
REMOTE STORAGE

Vorrede.

Die auf Befehl der hohen General-Artillerie-Direction von dem als Obersten und Commandanten des k. k. Wiener Garnisons-Artillerie-Districtes verstorbenen Ignaz Lindner verfaßte „Anleitung zur Mechanik der festen Körper“ hat seit ihrem Auftreten, im Jahre 1817, der in der Vorrede ausgesprochenen Tendenz „um denjenigen Zöglingen der k. k. Artillerie, welchen der Infinitesimal-Calcul nicht vorgetragen wird, als Leitfaden zu dienen“ vollkommen entsprochen, und erhielt selbst im Vergleiche mit gleichzeitigen Lehrbüchern über Mechanik lobende Anerkennung. Allein, da während dieses Zeitraumes, wesentlich in den letzten Jahren, die mechanischen Wissenschaften einen außerordentlichen Aufschwung genommen hatten, und dies vorzüglich einer einfachern und sichern Behandlungsweise mit Anwendung der analytischen Geometrie auf die Mechanik, wie auch einer festen Begründung des Maßes der Kräfte und der mechanischen Wirkungen zugeschrieben werden muß; so konnte diese, nach der ältern Methode behandelte Anleitung zur Mechanik den Zögling auch wohl noch in der letztern Zeit gut belehren, aber nicht zugleich, ohne eine gänzliche Umarbeitung derselben, auf den höher gerückten Standpunct dieser Wissenschaft führen, und befähigen, neuere Werke leicht benützen zu können. Dieses entging zwar dem vielseitig gelehrten Verfasser nicht, jedoch konnte er weder als Major und Professor, wo seine ganze Thätigkeit bei mehrjährigen Artillerie-Versuchen in Anspruch genommen war, noch nachher bei seinem ausgedehnten Geschäfte als Commandant des Artillerie-Districtes sich selbst einer zeitgemäßen Umarbeitung

589831

seines Lehrbuches unterziehen, und machte daher mir, als einem seiner ehemaligen Schüler und als Nachfolger in der Professur den Antrag, diese Arbeit bei nothwendig werdender neuer Auflage zu übernehmen. Als ich jedoch diese Aufgabe zu lösen begann, sah ich bald, daß eine geringe Abänderung eine große Anzahl wichtigerer bedinge, ja nicht einmal die früher befolgte Ordnung beibehalten werden könne, weshalb ich einen neuen Plan entwerfen mußte, sofort nur Einiges, wesentlich die artilleristischen Aufgaben aus Lindner's Werk aufnahm, und lieber, mit Rücksicht auf die eben ausgesprochene Tendenz, häufiger die allgemein anerkannten guten neuern Schriften über Mechanik: als die eines Eytelwein's, Umpfenbach's, Brewer's, Morin's, Poisson's, v. Gerstner's, Rühlmann's, Kaiser's u. a. m. benützte, um, meine eigenen Erfahrungen im Lehrfache zu Hilfe nehmend, auf dem möglichst leichten Wege zu dem Neuern zu leiten. Es wurden deshalb auch durchaus neue Figuren-Tafeln nothwendig, und man wird zu nähern Erläuterungen nirgends eine entsprechende Figur vermissen. Ich konnte dies um so leichter thun, da die k. k. hohe General-Artillerie-Direction die höchste Genehmigung zu ertheilen geruhte, das neue Werk als Lehrbuch in den k. k. Artillerie-Schulen einzuführen.

Obgleich Anordnung und Inhalt des neuen Werkes das Inhalts-Verzeichniß zu erkennen gibt, so glaube ich doch etwas näher darauf eingehen zu müssen.

Der Text zerfällt in die Einleitung und in die drei Hauptstücke. — In der Einleitung werden die allgemeinen Begriffe von den Eigenschaften der Körper und der darauf wirkenden Kräfte entwickelt und einige, für das folgende nöthige, geometrische Untersuchungen angestellt. — Das erste Hauptstück enthält die Statik oder das Gleichgewicht der Kräfte in allen Lagen derselben. Hier wird nach wenigen Vordersätzen zum Beweise des zur Basis dienenden Kräftenparallelogramms geschritten, dann bei den davon gezeigten einigen Anwendungen wird zuletzt noch die Größe und Richtung der Mittelkraft sowohl zu drei als zu vier, unter ver-

schiedenen Richtungen auf einen Punkt wirkenden Kräften durch Rechnung bestimmt, um aus diesen einfachern Fällen zugleich ersichtlich zu machen, wie sehr durch die ältere Behandlungsweise die Verwicklungen mit der Anzahl der Kräfte zunehmen, sofort eine einfachere Methode wünschenswerth erscheint, zu deren Darstellung dann auch sogleich übergegangen, und durch Anwendung derselben auf jene, aber ganz allgemeinen Fälle, gezeigt wird, wie leicht man damit zum Ziele gelange.

Hierauf wird von den parallelen Kräften gehandelt und, auf diese gestützt, zur Bestimmung des Schwerpunctes übergegangen, wozu mehre Aufgaben beigefügt sind. Ferner folgt die Betrachtung der in der Ebene und im Raume zerstreuten Kräfte, endlich macht den Schluß der Statik das Princip der virtuellen (Projections-) Geschwindigkeiten, wovon das bekannte Carteſische Gesetz ein specieller Fall ist. Jenes wichtige Princip, worauf die ganze Statik gegründet werden kann, wurde jedoch später blos zur leichtern Aufstellung der Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte an Maschinen, bei der Ruhe oder Bewegung der letztern mit vielem Vortheile benützt. — Das zweite Hauptstück ist die Anwendung der Statik auf die Maschinen; das neue Rädersystem mit der beweglichen Scheibe blieb unberücksichtigt, weil es meines Wissens, außer bei Kunstuhren, sonst im Maschinenwesen keine Anwendung gefunden hat. Der letzte Abschnitt enthält eine kurze Abhandlnng über die Festigkeit der Körper. — Endlich das dritte Hauptstück handelt von der Dynamik. Zuerst wird die gleichförmige, dann die gleichförmig veränderliche Bewegung mit verschiedenen Anwendungen, darunter auch die der Wurfbewegung auf das Bombenwerfen und Ricochetiren abgehandelt; hierauf folgt das Maß der Stoß- und Ziehkräfte, wie es dermalen für die freie Bewegung von Massen begründet ist; das einfache Pendel und die gleichförmige Kreisbewegung, ferner die Erörterung über das Maß der mechanischen Arbeiten oder mechanischen Wirkungen, endlich die Theorie der Trägheitsmomente. Als Anwendung folgen nun Betrachtungen über die Bewegung

einiger Maschinen mit Beziehung sämmtlicher Widerstände und der Trägheitsmomente, die Theorie des Fuhrwerkes und die praktische Bestimmung der mechanischen Arbeit einer schon vorhandenen Maschine. Zum Schlusse wird die Untersuchung des Stoßes geschwungener Körper, darauf bezüglich die Theorie des balistischen Pendels und die einiger Pulverproben abgehandelt.

Aus dem Angeführten dürfte die Reichhaltigkeit des Werkes zu ersehen sein, welche größtentheils in Aufgaben besteht, daher die festgesetzte Dauer für den jährlichen Lehrkurs nicht überschritten werden wird, weil mehre Aufgaben, nemlich bei dem Schwerpuncte, bei den Festigkeiten der Körper und bei den Trägheitsmomenten dem Fleiße der Schüler überlassen werden können, und für die Schüler des abgekürzten Curses können §. 108, dann §. 112 von 2) an, und die §§. 113, 114, 115, so wie noch Einiges nach Ermessen des Lehrers bei dem Vortrage gänzlich hinwegbleiben.

Zu mehrer Bürgschaft über genügende Klarheit im Texte ließ ich die von mir entworfenen Figuren von Schülern der Mechanik mit Beihilfe des Manuscriptes in Tafeln ordnen und zeichnen. Sodann wurden diese Tafeln mit Genauigkeit und Geschmack lithographirt. Die besondere Durchsicht des Werkes übernahm Herr Hain, Unterlieutenant im k. k. Bombardier-Corps, der dann auch, meiner häufigen Unterbrechungen wegen, die Correctur während des Druckes mit aller Aufmerksamkeit besorgte.

Ist es mir durch die bewirkte Umarbeitung dieses Lehrbuches gelungen, auf den gegenwärtigen Standpunct dieser Wissenschaft zu führen, und zur Belehrung der Zöglinge in der k. k. Artillerie wesentlich beizutragen; so ist der schönste Lohn meiner Bemühung die Beruhigung, das gewünschte Ziel erreicht, und somit auch dem Ansinnen des seligen Obersten Lindner entsprochen zu haben.

Wien, am 4. März 1844.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erstes Hauptstück.

Statik der festen Körper.

Erster Abschnitt. Allgemeine Begriffe von dem Gleichgewichte der Kräfte 20

Zweiter Abschnitt. Über das Gleichgewicht der Kräfte, welche auf einen Punct nach verschiedenen Richtungen wirken . . 26

Dritter Abschnitt. Fortsetzung über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, welche auf denselben Punct nach verschiedenen Richtungen wirken. 42

Vierter Abschnitt. Von den Kräften, die auf ein System von unveränderlich mit einander verbundenen Puncten nach parallelen Richtungen wirken und von den statischen Momenten . 50

A. Von den statischen Momenten, auf einen Punct bezogen . 53

B. Von den statischen Momenten, auf eine Ebene oder Gerade bezogen 64

Fünfter Abschnitt. Von dem specifischen Gewichte und von dem Schwerpuncte der Körper.

A. Vom specifischen Gewichte 76

B. Vom Schwerpuncte 81

Schwerpunct von Linien 86

Schwerpunct von Flächen 88

Schwerpunct von Oberflächen 104

Schwerpunct von Körpern 104

Guldin's Regel 115

Seite

Sechster Abschnitt. Von den Kräften, welche auf ein System unveränderlich mit einander verbundener Puncte nach verschiedenen Richtungen wirken.

A. Von den Kräften, deren Richtungen in einer Ebene liegen . 130
B. Von den Kräften, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen 142

Siebenter Abschnitt. Vom Principe der virtuellen Geschwindigkeiten und vom Cartesischen Gesetze 156

Zweites Hauptstück.

Anwendung der Statik auf die Maschinen.

Erster Abschnitt. Vom Gleichgewichte der Kräfte an den Maschinen 163
Von der Reibung 166

Zweiter Abschnitt. Die schiefe Ebene und der Keil.

I. Die schiefe Ebene 173
II. Der Keil 178

Dritter Abschnitt. Der Hebel 180

Vierter Abschnitt. Die Rolle 202

Fünfter Abschnitt. Das Wellrad 215

Sechster Abschnitt. Das gezähnte Rad mit dem Getriebe und die Seilräder.

I. Das Rad mit dem Getriebe 228
II. Die Seilräder 234

Siebenter Abschnitt. Die Schraube 236

Achter Abschnitt. Über die Festigkeit der Körper . . . 247
Die absolute Festigkeit 249
Die relative Festigkeit 255
Die rückwirkende Festigkeit 267
Die Drehungsfestigkeit 270

Drittes Hauptstück.

Die Dynamik oder die Bewegung fester Körper sammt Anwendung auf Maschinen.

Erster Abschnitt. Von der Bewegung der Körper im Allgemeinen 273

Zweiter Abschnitt. Von der gleichförmigen Bewegung . . 278

Dritter Abschnitt. Die gleichförmig veränderliche Bewegung, der freie Fall und die Wurfbewegung.

I. Die gleichförmig veränderliche Bewegung 291
II. Der freie Fall 296
III. Die Wurfbewegung 298
A. Das Bombenwerfen 305
B. Das Ricochetiren 321

Seite

Vierter Abschnitt. Maß der Stoß- und Ziehkräfte.

A. Maß der Stoßkräfte 341

B. Maß der Ziehkräfte 351

Fünfter Abschnitt. Die Bewegung auf vorgeschriebenem Wege, das einfache Pendel und die gleichförmige Kreisbewegung.

I. Die Bewegung auf vorgeschriebenem Wege 358

II. Das einfache Pendel 362

III. Die gleichförmige Kreisbewegung 365

Sechster Abschnitt. Von den mechanischen Arbeiten oder mechanischen Wirkungen und von den Trägheitsmomenten.

I. Die mechanischen Arbeiten oder mechanischen Wirkungen . 370

II. Die Trägheitsmomente 382

Siebenter Abschnitt. Bewegung der Maschinen mit Rücksicht aller Widerstände und der Trägheitsmomente 393

Achter Abschnitt. Wirkung des Stoßes geschwungener Körper . 409

Berichtigungen.

Seite	28	Zeile	7	von	unten	statt	$a_{-n\,1}$	setze man	a_{n-1}
»	44	»	3	»	»	»	$P''\cos\beta''$	» »	$P'\cos\beta'''$
»	45	»	18	»	»	»	$2PP''\cos POP'$	»	$2PP'\cos POP'$
»	94	»	2	»	»	»	pw′pqw′	» »	pw′.pwq′
»	110	»	10	»	oben	»	den	» »	der
»	115	»	2	»	unten	»	y^n	» »	y_n
»	153	»	4	»	»	»	r	» »	r'
»	189	»	3	»	»	»	ψ	» »	ψ'
»	190	»	16	»	oben	»	$Q+q$	» »	$Q-q$
»	213	»	1	»	unten	»	f^{h+1}	» »	f^{n+1}
»	251	»	11	»	oben	» A	$\frac{af}{ql}\cdot\frac{QL}{F}$	»	» $A=\frac{af}{ql}\cdot\frac{QL}{F}$
»	254	»	3	»	»	»	nach	» »	noch
»	259	»	4	»	»	»	$Q>Q$	» »	$Q>Q'$
»	261	»	9	»	unten	»	$\varkappa$	» »	π
»	266	»	3	»	»	»	h	» »	h^2
»	280	»	1	»	oben	»	B und B	» »	B und B′

Einleitung.

Allgemeine Begriffe von den Eigenschaften der Körper und der darauf wirkenden Kräfte. Feststellung der Lage eines Punctes und einer Geraden.

§. 1. Jeder wirkliche oder physische Körper nimmt einen gewissen, d. i. begrenzten Raum ein, welcher sein Volum heißt, und gibt durch diese Eigenschaft unsern Sinnen sein Dasein zu erkennen. Der Stoff, aus welchem der Körper besteht, und wodurch wir ihn von Körpern anderer Gattung unterscheiden, wird die Materie, die Menge der materiellen Theilchen hingegen, durch deren Zusammensetzung der Körper gebildet wird, die Masse des Körpers genannt. Volum (Ausdehnung) und Materie zusammengenommen, machen den physischen Körper aus.

§. 2. Jeder durch die Sinne bemerkbare Körper läßt sich in mehre Theile theilen, d. h. jeder Körper ist aus mehren Bestandtheilen zusammengesetzt, welche, wenn man sich die Theilung der Materie so weit fortgesetzt denkt, daß jeder derselben nur eine unendlich kleine Masse und Ausdehnung erhält, materielle Puncte genannt werden. Eine Anzahl solcher, auf beliebige Weise mit einander verbundener Puncte heißt ein System materieller Puncte und zwar ein festes, wenn ihre Verbindung mit einander unveränderlich ist, sonst ein bewegliches.

§. 3. Der Erfahrung zufolge findet in keinem physischen Körper eine absolute Continuität (Stetigkeit des Zusammenhanges) der Materie statt, jeder ist vielmehr ein Aggregat von Theilen, die durch Zwischenräume,

welche man Poren nennt, von einander getrennt sind. Bei einigen Körpern sind sie mit freiem Auge, z. B. bei Schwämmen, bei andern nur mittels Vergrößerungsgläser, ja oft blos aus Wirkungen, die man durch gewisse Umstände herbeiführt, zu erkennen. So dringt Queckſilber in die Poren des Goldes ohne Volumsveränderung des letzteren. Diese Eigenschaft (unterbrochene Continuität) der Materie wird Porosität genannt.

§. 4. Die Materie der Körper ist undurchdringlich, d. h. zwei verschiedene Theile der Materie können nicht zu gleicher Zeit denselben Raum einnehmen. Ein Körper kann zwar in die Poren eines andern eindringen, wie z. B. Wasser in Schwamm oder in Zucker; aber die Theile eines Körpers können nur dann den Raum jener eines andern einnehmen, wenn letztere daraus verdrängt worden sind. Wäre die Materie durchdringlich, so würde kein Körper entstehen können.

Anmerkung. Mehre allgemeine Eigenschaften der physischen Körper werden erst in der Folge vorkommen, weil, um sie deutlicher einzusehen, noch einige Erklärungen vorausgeschickt werden müssen.

§. 5. Um den Ort eines Punctes festzusetzen, hat man verschiedene geometrische Mittel, die man Coordinatensysteme zu nennen pflegt. Das einfachste ist das geradlinige, welches wir in der Folge allein anzuwenden nöthig haben werden und deshalb hier erörtern wollen.

I. Befindet sich der zu bestimmende Punct **M** (Fig. 1) in einer festgesetzten Ebene und zieht man in dieser zwei sich rechtwinklig schneidende Geraden **XX'** und **YY'**, deren Lage und somit auch ihr Durchschnittspunct **O** unverändert gelassen wird; so ist der Ort des Punctes **M** gegen diese Geraden durch die Längen der aus demselben auf **XX'** und **YY'** gefällten Senkrechten **MP** und **MQ** vollkommen bestimmt.

Der Fußpunct **P** der Senkrechten **MP** heißt die Projection des Punctes **M** auf **XX'** und eben so **Q** seine Projection auf **YY'**. Offenbar ist der Punct **M**, da **OP = MQ** und **OQ = MP** ist, auch durch die Entfernungen seiner Projectionen **P** und **Q** von dem Puncte **O**, nemlich durch die Abstände **OP** und **OQ** bestimmt. Man nennt diese Abstände die Coordinaten des Punctes **M** und den Punct **O**, von welchem aus sie auf **XX'** und **YY'** gerechnet werden, den Ursprung oder Anfangspunct der Coordinaten. Gewöhnlich bezeichnet man jede Coordinate wie **OP**, die von **O** gegen **X** oder **X'** zu nehmen ist, durch x und heißt sie Abscisse, während die zugehörige von **O** gegen **Y** oder **Y'** zu rechnende Coordinate wie **OQ** oder gewöhnlicher **PM** durch y be-

zeichnet und Ordinate genannt wird. Diesen Benennungen analog heißt die Gerade XX′ die Abscissenaxe oder Axe der x, die Gerade YY′ die Ordinatenaxe oder Axe der y und beide zusammen werden Coordinatenaxen genannt; OX und OX′, OY und OY′ pflegt man auch Halbaxen der x, der y zu nennen.

Wie man sieht, theilt das geradlinige Coordinatensystem, welches wegen der gegenseitig senkrechten Stellung der Axen ein rechtwinkliges heißt, die Ebene, in der es sich befindet, in vier Quadranten, die man allgemein Coordinatenbezirke nennt.

Sind demnach von einem zu bestimmenden Puncte blos die in Zahlen ausgedrückten Längen seiner Coordinaten gegeben, so ist seine Lage gegen das Coordinatensystem erst bestimmt, wenn man entweder beisetzt, in welchem Bezirke er liegt, oder nach welchen Richtungen auf den Axen von O aus die Coordinaten des fraglichen Punctes gerechnet sind. Man wählt gewöhnlich letzteres, indem man den Coordinaten die Zeichen + oder − vorsetzt. Nimmt man nemlich die Abscissen auf OX und die Ordinaten auf OY als positiv, mithin erstere auf OX′ und letztere auf OY′ als negativ, so ist für M im Bezirke XOY x positiv, y positiv,

„ M′ „ „ X′OY x negativ, y positiv,

„ M″ „ „ X′OY′ x negativ, y negativ,

„ M‴ „ „ XOY′ x positiv, y negativ

zu nehmen. Dieses Schema zeigt, daß die Coordinaten in jedem Coordinatenbezirke andere Vorzeichen erhalten und somit durch letztere (Qualität) in Verbindung mit den Zahlen (Quantität) der Coordinaten die Lage des zu bestimmenden Punctes vollkommen festgestellt ist.

Allgemein wird x positiv oder negativ oder Null, jenachdem der zu bestimmende Punct rechts oder links oder in der Axe YY′ liegt und y wird positiv oder negativ oder Null, wenn er ober- oder unterhalb oder in der Axe XX′ sich befindet. Fällt er endlich mit dem Ursprunge O zusammen, so ist sowohl x als y gleich Null.

II. Betrachtet man den zu bestimmenden Punct M (Fig. 2) als in keiner fixen Ebene, sondern als beliebig im Raume liegend, so wird die Lage desselben durch seine Abstände von drei, gegenseitig auf einander senkrechten Ebenen XOY, XOZ, YOZ, deren Durchschnittslinien OX, OY, OZ oder XX′, YY′, ZZ′ sonach auch auf einander senkrecht sind, vollkommen bestimmt sein. Legt man nemlich durch M zu jenen Ebenen die parallelen Mm′Cm″, Mm′Bm‴, Mm″Am‴, so entsteht das senkrechte Parallelepiped OABm‴CM, in welchem O und M die Endpuncte der Diagonale OM sind und der Punct M daher durch die

Kanten $Mm''' = OC$, $Mm'' = OB$, $Mm' = OA$ in Bezug der Ebenen XOY, XOZ, YOZ bestimmt ist. Die Puncte m‴, m″, m′ sind respective die Projectionen des fraglichen Punctes M auf diese Ebenen und A, B, C die auf die Geraden OX, OY, OZ, weil MA auf OX, MB auf OY und MC auf OZ senkrecht ist.

Wegen $OA = Mm'$, $OB = Mm''$ und $OC = Mm'''$ ist der Punct M auch durch die Abstände OA, OB, OC seiner Projectionen A, B, C von dem Puncte O bestimmt. Diese Abstände OA, OB, OC bezeichnet man gewöhnlich durch x, y, z und nennt sie die Coordinaten des zu bestimmenden Punctes. Die Geraden XX′, YY′, ZZ′, worauf die Coordinaten von O aus genommen werden, heißen Coordinatenaxen und zwar respective die der x, der y, der z; OX und OX′, OY und OY′, OZ und OZ′ werden wieder die Halbaxen der x, y, z und O der Ursprung oder Anfangspunct der Coordinaten genannt. Die Ebenen XOY, XOZ, YOZ oder kürzer xy, xz, yz heißen die coordinirten Ebenen. Wegen der gegenseitig senkrechten Lage der Axen ist das hier angenommene geradlinige Coordinatensystem ein rechtwinkliges.

Nimmt man jede coordinirte Ebene in unbegrenzter Ausdehnung nach allen Seiten, so entstehen um den Punct O acht dreiflächige oder körperliche Winkel, nemlich

XOYZ, ZOYX′, X′OY′Z, ZOXY′ oberhalb der Ebene xy,
XOYZ′, Z′OYX′, X′OY′Z′, Z′OXY′ unterhalb derselben.

Da nun der zu bestimmende Punct in jedem dieser körperlichen Winkel liegen kann, so sind zur unzweideutigen Bestimmung seiner Lage gegen das Coordinatensystem die Zahlen seiner Coordinaten allein noch nicht hinreichend, sondern man muß noch wissen, ob sie nach der Richtung OX oder OX′, OY oder OY′, OZ oder OZ′ zu nehmen sind. Zu diesem Zwecke werden die Coordinaten nach den Richtungen OX, OY, OZ als positiv, mithin die nach OX′, OY′, OZ′ als negativ angesehen und man wird aus den Zeichen der Coordinaten mit Bestimmtheit erkennen, in welchem körperlichen Winkel (Raumbezirke) der zu bestimmende Punct liege, so wie sich umgekehrt nach dem Bezirke, worin dieser Punct liegt, die Zeichen seiner Coordinaten ergeben werden. Dieser Annahme gemäß ist sofort für die vier oberhalb der Ebene xy liegenden Bezirke z positiv, für die übrigen unterhalb xy liegenden negativ; y ist positiv oder negativ, jenachdem der fragliche Punct in einem der vier Bezirke hinter oder vor der Ebene xz liegt, so wie endlich x für die rechts von yz lie-

genden vier Bezirke positiv und für die links dieser Ebene liegenden negativ ist. Es haben demnach die Coordinaten folgende Vorzeichen:

im Bezirke	XOYZ	ist x positiv,	y positiv,	z positiv,
„ „	X′OYZ	„ x negativ,	y positiv,	z positiv,
„ „	X′OY′Z	„ x negativ,	y negativ,	z positiv,
„ „	XOY′Z	„ x positiv,	y negativ,	z positiv,
„ „	XOYZ′	„ x positiv,	y positiv,	z negativ,
„ „	X′OYZ′	„ x negativ,	y positiv,	z negativ,
„ „	XOY′Z′	„ x positiv,	y negativ,	z negativ,
„ „	X′OY′Z′	„ x negativ,	y negativ,	z negativ.

Ist eine Coordinate Null, so liegt der fragliche Punct in der Ebene der beiden andern Coordinatenaxen, also z. B. für $x=0$ in der Ebene yz. Sind zwei Coordinaten zugleich Null, so befindet er sich in der dritten Axe, z. B. für $x=0$ und $z=0$ in der Axe der y; für $x=0$, $y=0$ und $z=0$ endlich liegt er im Ursprunge.

§. 6. Wenn die Coordinaten eines Punctes in Bezug auf ein angenommenes Coordinatensystem nicht geändert werden, so sagt man, der Punct *ruhe*. Werden aber diese Coordinaten immer verändert, so *bewegt* sich der Punct. Die Bewegung und die Ruhe des Punctes ist *absolut* oder *relativ*, jenachdem das Coordinatensystem, durch welches man die Lage des Punctes bestimmt, ruht oder selbst in Bewegung ist. So ist die Ruhe oder die Bewegung eines in einem bewegten Schiffe befindlichen Punctes in Hinsicht auf ein innerhalb des Schiffes angenommenes Coordinatensystem zwar absolut, in Hinsicht auf ein am Ufer angenommenes aber relativ, weil man, um die geänderte Lage des Punctes in Hinsicht auf das letztere abschätzen zu können, nebst der Bewegung des Punctes auf dem Schiffe auch noch die des Schiffes selbst in Erwägung ziehen muß.

§. 7. Alles dasjenige, was die Lage eines Punctes oder Systems materieller Puncte (Körpers) zu ändern strebt, es mag nun eine Wirkung erfolgen oder nicht, wird *Kraft* genannt. Die Kräfte sind entweder *absolut* oder *relativ*. Eine absolute Kraft ist diejenige, welche den Zustand des Punctes (Systems) gleich viel ändert, er mag ruhen, sich schnell oder langsam bewegen; relative Kräfte aber sind diejenigen, welche anders auf einen ruhenden, anders auf einen schon bewegten Punct (System) wirken. So übt fließendes Wasser gegen ein hineingesetztes Stück Holz eine relative Kraft aus; denn in dem Momente, als das Holz noch in Ruhe ist, wird der Druck des Wassers gegen dasselbe am stärksten sein; der Druck wird im-

mer kleiner und kleiner, je schneller sich dann das Holz fortbewegt, und hört endlich ganz auf, wenn das Holz mit dem Wasser eine gleiche Bewegung hat.

Wenn eine Kraft einen materiellen Punct oder ein System materieller Puncte nur einen Augenblick afficirt und dann gänzlich zu wirken aufhört, wie z. B. ein Stoß, so nennt man sie eine momentane; wenn sie aber ihre Einwirkung ununterbrochen fortdauernd äußert, wie z. B. ein Druck, so heißt sie eine continuirliche Kraft. Erstere pflegt man auch Stoßkraft, letztere aber Ziehkraft zu nennen. Kräfte, die auf eine ähnliche Art einen materiellen Punct oder ein System afficiren, heißen gleichartig, weshalb die momentanen, so wie die continuirlichen nur unter einander selbst gleichartig sind.

Mehre auf einen Punct oder ein System gleichzeitig wirkende Kräfte nennt man zusammen ein System von Kräften.

Der Punct, worauf eine Kraft oder ein System von Kräften unmittelbar wirkt, heißt der Angriffspunct der Kraft oder des Systems. Eine einzige Kraft vermag einen frei beweglichen Punct, auf den sie wirkt, nur in einer geraden Linie zu bewegen. Diejenige der beiden sich entgegengesetzten Richtungen dieser Geraden, nach welcher sich der ergriffene Punct entweder wirklich bewegt oder das Bestreben zur Bewegung erhält, heißt die Richtung der Kraft.

§. 8. Keine Wirkung kann ohne Dasein einer dazu erforderlichen Ursache geschehen; gleiche Ursachen bringen unter einerlei Umständen auch gleiche Wirkungen hervor; und die Wirkungen, welche von verschiedenen Ursachen auf einerlei Art hervorgebracht werden, verhalten sich gegen einander wie ihre Ursachen. Die Richtigkeit dieser Sätze ist für sich klar, daher sie unter die Grundsätze gezählt werden.

§. 9. Jeder Körper bleibt in dem Zustande der Ruhe oder der Bewegung ungeändert, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Denn soll der ruhende Körper aus der Ruhe in Bewegung übergehen, so wird der Zustand desselben geändert. Da nun vermöge des vorigen §en eine Ursache vorhanden sein muß und wir diese Ursache nach §. 7 Kraft nennen, so muß jederzeit eine Kraft auf den ruhenden Körper wirken, wenn er bewegt werden soll. Soll aber ein in Bewegung begriffener Körper in Ruhe übergehen, so muß ebenfalls eine Ursache, also eine Kraft vorhanden sein, welche den Körper verhindert,

sich ferner fortzubewegen. Dieses so eben aufgestellte Naturgesetz nennt man die Trägheit oder das Beharrungsvermögen der Materie.

Nach dieser Erklärung versteht man also unter Trägheit die Unfähigkeit der Materie, sich von selbst d. i. ohne Einwirkung einer äußern Kraft aus der Ruhe in Bewegung und umgekehrt aus der Bewegung in Ruhe zu bringen. Ist sonach ein Körper in Bewegung, so muß er, wenn die Kräfte aufhören, auf ihn einzuwirken, sich ohne Ende in gerader Linie mit der Schnelligkeit fortbewegen, die er in dem Augenblicke hatte, als die letzte Kraft auf ihn zu wirken aufhörte; auch muß eine noch so kleine Kraft für sich allein einen noch so großen Körper in Bewegung zu bringen vermögen.

In der Folge wird man aus den Gesetzen über die Bewegung der Körper die Trägheit der Materie bestätigt finden, indem diese Gesetze auf die Annahme, daß die Materie träge ist, gegründet, mit der Erfahrung übereinstimmen.

Andere tägliche Erfahrungen scheinen zwar der Trägheit zu widersprechen; beachtet man jedoch gehörig die dabei vorkommenden Umstände, so fällt jeder Widerspruch weg. So sieht man z. B. eine Kugel auf einer horizontalen Ebene ruhen, aber sogleich in Bewegung kommen, sobald die Ebene geneigt wird. Man könnte also glauben, die Materie habe sich diesfalls selbst in Bewegung gebracht; wäre aber die Materie hiezu fähig, so hätte sie diese Fähigkeit auch auf der horizontalen Ebene zeigen müssen. Ferner bemerkt man, daß Körper aus der Bewegung endlich in Ruhe kommen, ungeachtet die Umstände vom Anfange bis zu Ende der Bewegung immer dieselben geblieben sind. Die Ursache dieser Erscheinung ist, daß die Körper während der Bewegung stets mit andern Körpern in Berührung bleiben, wodurch gewisse Kräfte erzeugt werden, die der Bewegung hindernd entgegentreten und sie nach und nach tilgen, wie die Reibung, der Widerstand der Luft u. s. w. Daß solche Hindernisse wirklich die Ursachen der abnehmenden Bewegung der Körper sind, fließt daraus, weil bei Verminderung dieser Hindernisse die Körper ihre Bewegung länger fortsetzen. Endlich wird ein Körper, der frei an einem Faden hängt, durch eine sehr geringe Kraft in Schwankungen gebracht, während derselbe Körper auf einer horizontalen Ebene oft einer weit größern Kraft bedarf, um in Bewegung gebracht zu werden.

§. 10. Wenn mehre Kräfte auf einen Körper nach verschiedenen Richtungen so wirken, daß sich die Wirkungen derselben aufheben, so kann keine Bewegung erfolgen, und es ist in Hinsicht auf den Zustand des Körpers eben so viel, als wenn diese Kräfte gar nicht da wären. Man nennt diesen Zustand das Gleichgewicht der Kräfte. Das Gleichgewicht ist also von der Ruhe dadurch unterschieden, daß ein unthätiger Zustand in

dem letzteren Falle aus Mangel aller Kräfte, in dem ersteren aber aus der Ursache erscheint, weil die wirkenden Kräfte sich gegenseitig aufheben.

§. 11. Jeder uns bekannte Körper hat ein Bestreben, gegen die Erde herabzusinken. Er drückt oder preßt die Unterlage, die ihn an der Bewegung hindert, und fällt, wenn diese hinweggenommen wird, gegen die Erde in einer immer schnellern Bewegung so lange fort, bis er wieder ein Hinderniß seiner Bewegung antrifft. Man kann sich also vorstellen, daß sich in jedem Körper eine wirkliche Kraft befinde, welche ihn gegen die Erde treibt und noch während seiner Bewegung auf ihn wirkt. Denn um diese Erscheinung zu bewirken, muß nach §. 7 und 8 eine Kraft vorausgesetzt werden, und für den Erfolg ist es ganz gleichgiltig, ob diese Kraft in dem Körper oder in der Erde sich befinde, zu welcher der Körper hingezogen wird. Man nennt diese Kraft die Schwere der Körper. Wenn zwei gleiche Körper von derselben Materie an einander gehalten und dann frei ausgelassen werden, so müssen beide zugleich auf die Erde kommen, weil unter ganz gleichen Umständen (§. 8) keine Ursache denkbar ist, wegen welcher die Bewegung des einen Körpers mehr als die des andern befördert werden sollte. Ob nun diese beiden Körper blos zusammengehalten oder an ihren Berührungsebenen mit einander verbunden sind, ist für das Gesetz des freien Falles gleichgiltig. Alle Körper von gleicher Materie und noch so verschiedener Masse müssen demnach unter einerlei Umständen dieselbe Bewegung gegen die Erde haben. Läßt man in einem luftleeren Raume zwei Körper von noch so verschiedener Materie, z. B. ein Klümpchen Gold und eine Flaumfeder von gleicher Höhe in demselben Momente herabfallen, so werden diese beiden Körper eine gleiche Bewegung haben, wie es vielfältig angestellte Versuche unter dem Recipienten der Luftpumpe beweisen; es haben also alle Körper von noch so verschiedener Materie und Masse eine gleiche Schwere. Daß wir dieses Naturgesetz nicht immer wahrnehmen, kommt daher, weil die Körper während des Falles die uns umgebende atmosphärische Luft verdrängen müssen, von welcher sie zum Theil getragen werden, was bei verschiedenartigen Körpern ungleich geschieht. Es gibt sogar Körper, welche diese atmosphärische Luft abwärts gar nicht durchdringen, wie z. B. manche Gasarten.

§. 12. Die Richtungen, nach welchen wenig von einander entfernte Körper gegen die Erde fallen, sind, insoweit wir sie mit unsern Sinnen beobachten können, unter einander parallel. Werden Körper an vollkommen biegsamen Fäden wenig von einander entfernt aufgehangen, so werden auch diese nach parallelen und zwar nach denselben Richtungen ausgespannt,

nach welchen die Körper fallen würden. Diese Richtungen der Schwere, welche man auch verticale, bleirechte, lothrechte Linien nennt, sind auf der Oberfläche eines stillstehenden Wassers senkrecht und würden sich, hinlänglich verlängert, unter Voraussetzung der vollkommenen Kugelgestalt der Erde im Mittelpuncte derselben schneiden. Da aber die Erde ein abgeplattetes Ellipsoid ist, so können die Richtungen der Schwere als Normallinien einer Ellipse nicht in dem Mittelpuncte der Erde zusammenstoßen. Jede Ebene, die man durch die Richtung der Schwere legt, heißt eine verticale; ist aber die Richtung der Schwere auf einer Ebene senkrecht, so heißt sie eine horizontale und jede Gerade in derselben eine horizontale oder wagrechte.

§. 13. Wenn ein Körper durch eine feste Widerlage zu fallen verhindert wird, so wird letztere gedrückt, und es muß die Wirkung der Schwere in jedem materiellen Theilchen des aufgehaltenen Körpers dadurch aufgehoben werden. Der Druck, welcher von allen materiellen Theilchen zusammen gegen eine feste Widerlage ausgeübt wird, heißt das Gewicht des Körpers. Aus je mehr materiellen Theilchen ein Körper zusammengesetzt ist, desto mehr wird die Widerlage von demselben gedrückt, desto größer ist demnach das Gewicht des Körpers. Da nun die Schwere (§. 11) auf jedes materielle Theilchen gleich stark wirkt, so muß ein Körper, welcher eine zweimal, dreimal u. s. w. größere Masse hat als ein anderer, auch einen zweimal, dreimal u. s. w. größern Druck ausüben, nemlich ein zweimal, dreimal u. s. w. größeres Gewicht haben als der andere; d. h. die Gewichte der Körper sind ihren Massen direct proportional. Im gemeinen Leben wird Schwere und Gewicht sehr oft mit einander verwechselt, obschon in beiden Worten ganz verschiedene Begriffe liegen. Die Schwere ist nemlich die Ursache, hingegen das Gewicht der Körper die von der Schwere hervorgebrachte Wirkung, oder die Schwere ist die Kraft, mit der jedes Theilchen von was immer für einer Materie gegen die Erde gezogen wird, während das Gewicht eines Körpers die Summe der Schwerkräfte seiner materiellen Theilchen ist.

Aus dem Unterschiede der beiden Begriffe: Schwere und Gewicht, kann man sofort den Satz aufstellen: Alle Körper haben gleiche Schwere, aber ungleiche Gewichte, die sich wie die Massen der Körper verhalten.

§. 14. Die Gewichte der Körper können demnach zum Maßstabe der Massen dienen, so wie man die Größe der Winkel durch die zwischen den Schenkeln derselben beschriebenen Kreisbogen abschätzt. Wenn daher in der

Folge der Ausdruck vorkommt: die Masse eines Körpers ist gegeben, so wird dadurch jederzeit sein in Wiener Pfunden ausgedrücktes Gewicht verstanden, welches er an der Erdoberfläche haben müßte. Diese Wiener Pfunde sind körperliche Massen von der Beschaffenheit, daß ein Wiener Kubikschuh destillirtes Regenwasser deren 56·346 wiegt.

Die Gewichte, durch welche man die Massen der Körper abschätzt, sind in verschiedenen Ländern der Erde auch sehr von einander verschieden. Man kann sie unter einander vergleichen, wenn man die Verhältnißzahlen derselben kennt. Eine Tafel für die Vergleichung der Gewichte in den vorzüglichsten Örtern Europas findet man in Lindner's logarithmischen und logarithmisch-trigonometrischen Handbuche, zweite Auflage, Wien 1831, bei Tendler.

§. 15. Jede continuirliche Kraft wirkt auf eine ähnliche Art wie die Schwere der Körper; d. h. für jede solche Kraft wird man immer eine bestimmte Masse finden, welche eine Widerlage eben so drückt oder preßt wie die continuirliche Kraft. Man kann also die verschiedenen Gewichte der Körper zum Maßstabe dieser Kräfte annehmen, nemlich letztere durch Gewichte ausdrücken. Diese Zahl, d. h. der Druck, den eine Kraft auf einen Punct oder ein System von Puncten ausübt, ist ihre Stärke oder Intensität. Wenn daher z. B. eine Kraft auf einen Körper so drückt, wie ein Gewicht von 90 Pfunden eine Widerlage drücken würde, so sagt man diese Kraft ist = 90 Pfunden oder sie ist eine Kraft von 90 Pfunden.

§. 16. Wenn zwei gleichartige Kräfte auf dieselbe Weise auf einen Punct wirken, d. h. ihn gleich stark stoßen, drücken oder pressen, und unter gleichen Umständen immer gleiche Wirkungen hervorbringen, so werden sie gleiche Kräfte genannt.

Alle gleichartigen Kräfte, als mit einander vergleichbar, stehen in gewissen Verhältnissen zu einander und man sagt, eine Kraft P sei r mal so groß, als eine andere Q, wenn sie einen Punct eben so afficirt wie r gleiche Kräfte Q, die alle auf diesen Punct in derselben Richtung wirken. Diese Verhältnißzahlen können offenbar durch gerade Linien, wenn man ihnen eine gewisse Einheit zum Grunde legt, ausgedrückt werden, und man kann daher gerade Linien zum Maßstabe der Kräfte nehmen, was noch den Vortheil gewährt, daß zugleich die Richtungen der Kräfte dadurch angezeigt werden. In diesem Sinne werden in der Folge alle Kräfte durch gerade Linien ausgedrückt, welche in denselben Verhältnissen wie die Kräfte zu einander stehen.

§. 17. Eine Kraft ist bestimmt, wenn nebst ihrer Intensität (§. 15) sowohl ihr Angriffspunct als auch ihre Richtung (§. 7) festgesetzt ist.

Wie die Intensität gemessen und dargestellt werde, wurde in den zwei letzten §en gezeigt, so wie auch schon (§. 5) die Mittel, die Lage eines Punctes festzusetzen, angegeben wurden. Es erübrigt also nur noch die Richtung einer Kraft zu bestimmen.

I. Liegt die Richtung **MR** einer Kraft (**Fig.** 3), die ihren Angriffspunct **M** gegen **R** zu bewegen strebt, in einer festgesetzten Ebene, so nimmt man in dieser ein rechtwinkliges Coordinatensystem an und bestimmt zuerst (nach §. 5. I.) die Coordinaten **OA, AM** des Angriffspunctes **M** mit den gehörigen Vorzeichen. Denkt man sich dann durch **M** zu den positiven Halbaxen **OX, OY** die Parallele **MP, MP'** und durch den Ursprung **O** zur Richtung der Kraft die Parallele **Or** gezogen, so bestimmen die Winkel $\mathbf{RMP} = \mathbf{rOX} = \alpha$ und $\mathbf{RMP'} = \mathbf{rOY} = \beta$ die Richtung **MR** der Kraft gegen die Axe der x und der y. Werden dabei die Winkel α und β von den positiven Halbaxen der x und y aus zu beiden Seiten bis 180° gezählt, so ist diese Richtung in jeder Lage um den Punct **M** vollkommen bestimmt; denn man hat, wenn **Or, Or', Or'', Or'''** zu **MR, MR', MR'', MR'''** parallel genommen wird,

für die Richtung **MR** der Kraft $\alpha+\beta=\mathbf{XOr}+\mathbf{YOr}=90°$,
„ „ „ „ **MR'** „ „ $\alpha=90°+\beta$,
„ „ „ „ **MR''** „ „ $\alpha=90°+\mathbf{Y'Or''}$,
$\beta=180°-\mathbf{Y'Or''}$, mithin
$\alpha+\beta=270°$, und
„ „ „ „ **MR'''** „ „ $\beta=90°+\alpha$,

sonach findet in allen Fällen wegen

$$\cos\alpha=\pm\sin\beta,\quad \cos\beta=\pm\sin\alpha$$

die Relation

(1) $\quad 1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta$

statt. Ferner wird aus Obigem

für die Richtung **MR** der Kraft $\cos\alpha$ positiv, $\cos\beta$ positiv,
„ „ „ „ **MR'** „ „ $\cos\alpha$ negativ, $\cos\beta$ positiv,
„ „ „ „ **MR''** „ „ $\cos\alpha$ negativ, $\cos\beta$ negativ,
„ „ „ „ **MR'''** „ „ $\cos\alpha$ positiv, $\cos\beta$ negativ,

woraus man daher sogleich erkennen kann, welche Lage die Richtung der Kraft gegen die positiven Halbaxen hat.

Sind die Richtungen von zwei Kräften, wie **MR** und $\mathbf{MR}_0$ gerade, oder wie **MR** und mp parallel entgegengesetzt, und bezeichnet man

die Winkel, welche **MR** oder die ihr Parallele **Or** mit den positiven Halbaxen einschließt, durch α, β, die von $\mathbf{MR}_0$ und mp oder der ihnen Parallelen $\mathbf{Or}_0$ mit den positiven Halbaxen gebildeten durch α_0, β_0; so ist wegen der gerade entgegengesetzten Richtung von $\mathbf{Or}_0$ mit **Or**

$$\alpha_0 = 180° - \mathbf{X'Or}_0 = 180° - \mathbf{XOr} = 180° - \alpha \text{ und}$$

$$\beta_0 = 180° - \mathbf{Y'Or}_0 = 180° - \mathbf{YOr} = 180° - \beta, \text{ daher}$$

(2) $\quad \cos\alpha_0 = -\cos\alpha, \ \cos\beta_0 = -\cos\beta.$

Werden also diese beiden Gleichungen zwischen den Winkeln α, β und α_0, β_0, welche die Richtungen zweier Kräfte mit den positiven Halbaxen einschließen, zugleich realisirt, so sind diese Richtungen einander gerade oder parallel entgegengesetzt.

II. Betrachtet man (**Fig. 4**) die Richtung **MR** einer Kraft nicht als in einer festgesetzten Ebene, sondern als beliebig im Raume liegend, so nimmt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem von drei Axen **XX'**, **YY'**, **ZZ'** an und bestimmt gegen dasselbe zuerst (nach §. 5.**II.**) die Lage des Angriffspunctes **M**. Durch die Winkel, welche die Richtung **MR**, oder was dasselbe ist, die zu ihr durch den Ursprung **O** gezogene Parallele **Or**, mit den positiven Halbaxen **OX**, **OY**, **OZ** einschließt, nemlich durch die Winkel **XOr**, **YOr**, **ZOr**, die wir respective durch α, β, γ bezeichnen wollen, ist die fragliche Lage um den Punct **M** vollkommen festgestellt, wenn man jeden aus ihnen von der betreffenden positiven Halbaxe aus nach beiden Seiten zu bis 180° rechnet. Denn nimmt man **Or** für die Längeneinheit und construirt über diese und den körperlichen Winkel **XOYZ** das senkrechte Parallelepiped **rOatbc**, so ist **ra** auf **OX**, **rb** auf **OY** und **rc** auf **OZ** senkrecht, mithin

$$\mathbf{Oa} = \cos\alpha, \ \mathbf{Ob} = \cos\beta, \ \mathbf{Oc} = \cos\gamma.$$

Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken **rOt** und **tOa**

$$\mathbf{rO}^2 = \mathbf{rt}^2 + \mathbf{Ot}^2 = \mathbf{Oc}^2 + \mathbf{Ob}^2 + \mathbf{Oa}^2,$$

woraus die Relation

(3) $\quad 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

folgt. Da hierin keine Änderung eintritt, wenn man für den einen oder den andern Winkel sein Supplement setzt, so ist klar, daß zur unzweideutigen Bestimmung der Richtung einer Kraft stets alle drei Winkel, welche sie mit den positiven Halbaxen einschließt, gegeben sein müssen.

Hinsichtlich dieser Winkel ist zu bemerken, daß $\alpha \gtrless 90°$ ist, jenachdem die zur Richtung **MR** der Kraft parallel gezogene Gerade **Or** rechts oder links der coordinirten Ebene **Y'Z'YZ** (yz) liegt; eben so ist $\beta \gtrless 90°$, wenn **Or** hinter oder vor der Ebene **Z'X'ZX** (zx) sich befindet und endlich ist

$\gamma \lesseqgtr 90°$, jenachdem **Or** oder oder unter der Ebene **X'Y'XY** (*xy*) liegt. Ist demnach die Richtung **MR** parallel zur Ebene *yz*, *zx* oder *xy*, so ist $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$ oder $\gamma = 90°$ und ist diese Richtung parallel zu **OX** oder **OX'**, zu **OY** oder **OY'**, zu **OZ** oder **OZ'**, so wird $\alpha = 0$ oder $\alpha = 180°$, $\beta = 0$ oder $\beta = 180°$, $\gamma = 0$ oder $\gamma = 180°$.

Haben zwei Kräfte gerade oder parallel entgegengesetzte Richtungen, so sind die zu denselben durch **O** parallel gezogenen Geraden **Or** und $\mathbf{Or}_0$ gerade entgegengesetzt. Bezeichnen α, β, γ und α_0, β_0, γ_0 die Winkel, welche jene beiden Richtungen oder die ihnen Parallelen **Or** und $\mathbf{Or}_0$ respective mit den positiven Halbaxen bilden, so hat man $r_0OX = 180° - rOX$ oder $\alpha_0 = 180° - \alpha$ und eben so $\beta_0 = 180° - \beta$, $\gamma_0 = 180° - \gamma$, folglich

(4) $\cos\alpha_0 = -\cos\alpha$, $\cos\beta_0 = -\cos\beta$, $\cos\gamma_0 = -\cos\gamma$.

Werden diese drei Gleichungen durch die Winkel, welche die Richtungen zweier Kräfte mit den positiven Halbaxen einschließen, zugleich erfüllt, so sind sich diese Kräfte entweder gerade oder parallel entgegengesetzt.

Anmerkung. Wenn die Richtungen mehrer Kräfte parallel sind, und man sich eine Ebene darauf senkrecht so gelegt denkt, daß alle Angriffspuncte auf dieselbe Seite dieser Ebene zu liegen kommen, so sagt man, daß die Kräfte übereinstimmend oder in einerlei Sinne wirken, wenn alle das Bestreben haben, ihre Angriffspuncte entweder von jener Ebene zu entfernen oder ihr zu nähern. Suchen aber einige der parallelen Kräfte hinsichtlich der angenommenen Ebene ihre Angriffspuncte den übrigen entgegengesetzt zu bewegen, so sagt man, daß die einen im entgegengesetzten Sinne der andern wirken und ihre Richtungen sind einander parallel entgegengesetzt. Kräfte, die ihre Angriffspuncte in derselben Geraden entgegengesetzt zu bewegen streben, heißen gerade entgegengesetzt. Sowohl für die gerade als parallel entgegengesetzten Kräfte müssen stets die Gleichungen (2) oder (4) realisirt werden.

In der Folge wird man sehen, daß Kräfte, die in dem einen Sinne wirken, als positiv und die diesen entgegengesetzt wirkenden als negativ in die Rechnung eingeführt werden können.

§. 18. Der Winkel, den die Richtungen zweier Kräfte mit einander bilden, kann auf folgende Weise durch diejenigen bestimmt werden, welche diese Richtungen mit jeder der positiven Halbaxen eines rechtwinkligen Coordinatensystems einschließen.

I. Liegen die Richtungen **MP** und **M'P'** der Kräfte ***P*** und ***P'*** (**Fig. 5**) in einer Ebene, so werden sie verlängert in einem Puncte **C** sich durchschneiden, und der Winkel, den sie einschließen, ist dann entweder **PCP'**,

wenn P und P' ihre Angriffspuncte **M** und **M'** von **C** zu entfernen suchen, oder es ist der Winkel **pCP'**, wenn P den Punct **M** gegen **p** und P' den Punct **M'** gegen **P'** zu bewegen strebt und allgemein ist der fragliche Winkel derjenige, nach dessen Schenkel die Angriffspuncte der Kräfte gegen die Öffnung des Winkels zugleich bewegt werden.

Denkt man sich durch irgend einen Punct **O** in der Ebene der Kräfte, der zugleich der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems sein soll, zu den Richtungen **MP** und **M'P'** der Kräfte die Parallelen **OA** und **OA'** im Sinne dieser Richtungen gezogen, so ist **AOA'** der Neigungswinkel der Kräfte. Setzt man diesen Winkel $\mathbf{AOA'} = \omega$ und bezeichnet durch α, β, α', β' die Winkel, welche **AO** oder **MP**, **A'O** oder **M'P'** mit **OX** und **OY** einschließen, so wird, da

$$\mathbf{AOA'} = \mathbf{A'OX} - \mathbf{AOX} \text{ ist,}$$

$$\omega = \alpha' - \alpha, \quad \text{also}$$

$$\cos\omega = \cos\alpha'\cos\alpha + \sin\alpha'\sin\alpha,$$

oder da (§. 17. I.) $\sin\alpha = \pm\cos\beta$, $\sin\alpha' = \pm\cos\beta'$ ist,

$$(1) \qquad \cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta',$$

wobei α und α' von **OX**, β und β' von **OY** aus nach beiden Seiten bis 180° (§. 17. I.) zu rechnen sind und zwischen diesen Winkeln noch die Gleichungen

$$(1') \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

$$(1'') \qquad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' = 1$$

bestehen.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1) Wird $\cos\omega = 1$, also $\omega = 0$, so sind die beiden Kräfte P und P' in einerlei Sinne entweder zu einander parallel oder in derselben Richtung wirkend; denn die Summe der beiden letzten Gleichungen um das Doppelte der speciellen

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' = 1$$

vermindert gibt

$$(\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\beta')^2 = 0,$$

woraus, da die Summe von Quadraten reeller Größen nur Null sein kann, wenn jede Größe für sich Null ist,

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \quad \cos\beta = \cos\beta',$$

oder da diese Winkel 180° nicht überschreiten können,

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'$$

folgt, was den übereinstimmenden Sinn der Wirkungen der Kräfte und zugleich sowohl die nemliche als auch parallele Richtung derselben als möglich darstellt.

2) Wird $\cos\omega = -1$, also $\omega = 180°$, so sind die beiden Kräfte P und P' entweder gerade oder parallel entgegengesetzt; denn wird die Summe der Gleichungen (1′) und (1″) um das Doppelte der speciellen

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' = -1$$

vermehrt, so erhält man

$$(\cos\alpha + \cos\alpha')^2 + (\cos\beta + \cos\beta')^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$\cos\alpha = -\cos\alpha', \quad \cos\beta = -\cos\beta'$$

folgt, wie Gleich. (2) §. 17. I.

3) Ist endlich $\cos\omega = 0$, also $\omega = 90°$, so wirken die Kräfte P und P' senkrecht auf einander.

II. Liegen die Richtungen **MP** und **M′P′** der Kräfte P und P' (Fig. 6) nicht in derselben Ebene, so können sie sich, wie immer verlängert, nie durchschneiden. Die Neigung solcher Richtungen zu einander wird durch den Winkel **AOA′** gemessen, den zwei durch einen beliebigen Punct **O** im Sinne derselben zu ihnen parallel gezogene Geraden **OA** und **OA′** mit einander einschließen.

Nimmt man den Punct **O** als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raume an und bezeichnet durch $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ die Winkel, welche **OA** oder **MP**, **OA′** oder **M′P′** mit den positiven Halbaxen **OX**, **OY**, **OZ** (§. 17. II.) einschließen; so muß, da hiedurch die Lage von **OA** und **OA′** festgestellt ist, auch der von ihnen eingeschlossene Winkel **AOA′** durch $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ vollkommen bestimmt sein.

Schneiden wir $OA = OA' = 1$ ab und ziehen die Coordinaten **Oa**, **aβ**, **βA**, und **Oa′**, **a′β′**, **β′A′** der Puncte **A** und **A′**; so ist (§. 17. II.)

$$Oa = \cos\alpha, \quad a\beta = \cos\beta, \quad A\beta = \cos\gamma,$$

$$Oa' = \cos\alpha', \quad a'\beta' = \cos\beta', \quad A'\beta' = \cos\gamma'.$$

Wird ferner **βn** zu **OX**, **A′m** zu **β′β** parallel geführt, so ergibt sich aus den bei **m** und **n** rechtwinkligen Dreiecken **AmA′** und **βnβ′**

$$AA'^2 = mA'^2 + Am^2 = \beta\beta'^2 + (A\beta - A'\beta')^2,$$

$$\beta\beta'^2 = \beta n^2 + \beta' n^2 = (Oa' - Oa)^2 + (a'\beta' - a\beta)^2$$

und aus der Verbindung dieser zwei Gleichungen

$$AA'^2 = (Oa' - Oa)^2 + (a'\beta' - a\beta)^2 + (A\beta - A'\beta')^2$$

oder

$$AA'^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\beta')^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma')^2.$$

Es ist aber auch aus dem Dreiecke **AOA′**, wenn man den zu suchenden Winkel $AOA' = \omega$ setzt,

$$AA'^2 = AO^2 + A'O^2 - 2AO.A'O\cos\omega = 2 - 2\cos\omega,$$

mithin

$$(2) \qquad \cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

wenn man beide Werthe von AA'^2 gleichsetzt und berücksichtigt, daß nach §. 17. II. Gl. (3)

(2′) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ und

(2″) $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$

ist.

Hieraus ergeben sich folgende specielle Fälle:

4) Wird $\cos\omega = 1$ d. h. $\omega = 0$, so wirken die Kräfte P und P' in einerlei Sinne entweder nach derselben oder in paralleler Richtung; denn man findet unter der gemachten Voraussetzung leicht, daß

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta' \text{ und } \gamma = \gamma'$$

werde.

5) Wird $\cos\omega = -1$ oder $\omega = 180°$, so ergeben sich die gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\cos\alpha = -\cos\alpha', \ \cos\beta = -\cos\beta' \text{ und } \cos\gamma = -\cos\gamma',$$

und es sind sonach (vermöge Gl. (4) §. 17. II.) die beiden Kräfte diesfalls entweder gerade oder parallel entgegengesetzt; u. s. w.

§. 19. Die Schwere, welche wir an den Körpern auf der Erdoberfläche wahrnehmen, ist eine Folge der allgemeinen Anziehung der Materie, die wir über die ganze Natur verbreitet finden. Alle materiellen Theilchen äußern nemlich ein Bestreben, sich einander zu nähern, oder was dasselbe ist, alle materiellen Theilchen werden von einander angezogen. Daß sich ferner diese Anziehung über alle materiellen Theilchen gleichförmig verbreitet, beweist das für alle Körper unveränderliche Gesetz des freien Falles. Die Wirkung der Anziehung eines materiellen Theilchens auf ein anderes ist desto größer, je größer die Masse des erstern, oder je kleiner die Entfernung der beiden Theilchen ist; so zwar, daß sich diese Anziehungen, wie es alle bisher angestellten Versuche bestätigen, bei gleichen Entfernungen wie die Massen, und bei gleichen Massen wie umgekehrt die Quadrate der Entfernungen verhalten. Ist nemlich (**Fig. 7**) ein materielles Theilchen in **B** zwischen zwei andere Theilchen in **A** und **C** gesetzt, M die Masse des Theilchens in **A**, N die Entfernung desselben von dem Puncte **B**, P die Kraft, mit welcher das Theilchen in **B** von dem in **A** angezogen wird; ist eben so m die Masse des Theilchens in **C**, p die Größe der Anziehung desselben in Hinsicht auf **B** und n die Entfernung dieses Theilchens von **B**, so wird,

wenn $N = n$ ist,

(1) $P : p = M : m$,

wenn aber $M = m$ ist,

(2) $P : p = n^2 : N^2$.

Aus diesem aufgestellten Gesetze folgt, daß die Größe der Anziehung, mit welcher zwei materielle Theilchen von ungleichen Massen auf ein drittes in verschiedenen Entfernungen von demselben wirken, durch das zusammengesetzte Verhältniß aus dem geraden ihrer Massen und aus dem umgekehrten der Quadrate ihrer Entfernungen von diesem dritten Theilchen gemessen wird. Es ist nemlich

$$P : p = Mn^2 : mN^2.$$

Denn schneidet man $BD = BA = N$ ab und setzt in D ein materielles Theilchen von der Masse m, so wird, wenn man die Anziehung desselben in Hinsicht auf B durch p' bezeichnet, wegen (1)

$P : p' = M : m$ und wegen (2)

$p' : p = n^2 : N^2$, daher

$P : p = Mn^2 : mN^2$.

Ist $P = p$, so ist $Mn^2 = mN^2$ oder $M : m = N^2 : n^2$; d. h.

Ein materielles Theilchen wird von zwei andern gleich stark angezogen, wenn sich die Massen derselben so gegen einander verhalten, wie die Quadrate der Abstände des ersten Theilchens von den beiden andern.

Dies sind die allgemeinen Gesetze der Anziehung der Materie, welche durch unzählige Versuche bestätigt sind. Nach diesen Gesetzen werden die Bewegungen der Planeten bestimmt. Die Wirkungen der Schwere auf unserer Erdoberfläche werden durch die Anziehung der materiellen Theilchen hervorgebracht, welche den Erdkörper constituiren. Ist die Erde eine Kugel, so wird der Erfolg der Anziehung so beschaffen sein, als wenn die Masse der Erde in dem Mittelpuncte vereinigt wäre. Befindet sich nun ein Körper, dessen Schwere an der Erdoberfläche $= p$ ist, um a Klaftern über selbe erhöht, so wird in dieser Erhöhung die Schwere P desselben, wenn man den Erdhalbmesser $= r$ Klaftern setzt, aus

$$P : p = r^2 : (r + a)^2$$

gefunden.

Da ferner die Gewichte als die Wirkungen sich so verhalten müssen, wie die Schweren als die Ursachen der Gewichte, so wird auch das Gewicht des Körpers immer kleiner, je höher er über die Erdoberfläche gesetzt wird. Es sei q das Gewicht desselben an der Oberfläche der Erde und Q in der Erhöhung a über derselben; so ist $P : p = Q : q$, folglich auch

$$Q : q = r^2 : (r + a)^2.$$

Ist z. B. $a = 2000$ W. Kl.; so wird, da der Halbmesser der Erde $r = 3356649$ W. Kl. ist, $Q = 0{\cdot}99881$. $q = q - 0{\cdot}00119$. q; d. h. in einer Erhöhung von 2000 W. Kl. verliert der Körper beinahe $\frac{1}{1000}$tel seines Gewichtes; daher kann man, ohne einen besondern Fehler zu begehen, in allen Erhöhungen über der Erdoberfläche, zu denen man gelangen kann, das Gewicht der Körper als unveränderlich ansehen.

Aus der letzten Proportion folgt, daß ein Körper, um nur noch die Hälfte desjenigen Gewichtes zu haben, welches er auf der Erdoberfläche hat, in eine Höhe von $a = r\,(\sqrt{2} - 1)$ über die Oberfläche der Erde versetzt werden müßte.

Anmerkung. In vielen mechanischen Untersuchungen wird man die Körper als unschwer annehmen, d. h. man wird die Einwirkungen der Kräfte auf gegebene Massen und unter gegebenen Umständen so prüfen, als wenn die Schwere gar nicht vorhanden wäre. Man kann dann leicht schließen, ob die Änderung der Gesetze der Kräfte durch die Schwere bedeutend sein wird oder nicht.

§. 20. Außer den bereits angeführten allgemeinen Eigenschaften der physischen Körper werden sie noch hinsichtlich des mehr oder minder starken Zusammenhanges ihrer materiellen Theilchen wesentlich in starre oder feste und in flüssige Körper abgetheilt. Die Stärke des Zusammenhanges der Theilchen eines Körpers wird Cohäsion genannt. Sie wird durch die Kraft gemessen, welche man anwenden muß, um auf irgend eine der Arten, als: durch Reißen, Brechen, Drücken u. s. w. die Trennung der Theile des Körpers zu bewirken. Fest heißt ein Körper, dessen Theilchen sich entweder gar nicht oder nur durch eine bedeutende Kraft unter einander verschieben lassen und meist, bevor dies geschieht, eine Trennung erleiden, indem der Körper einen Riß oder Bruch erhält. Körper, bei welchen vor dem Bruche gar kein Verschieben ihrer Theilchen stattfindet, nennt man hart, und spröde, wenn sie mit der Härte wenig Festigkeit verbinden, daher durch Stoßen leicht zersplittert werden, wie manche Steine, Glas u. dgl. Jene starren Körper hingegen, welche durch äußere Einwirkung eine bedeutende Verschiebbarkeit ihrer Theile zulassen, ohne daß dabei ihr Zusammenhang gestört wird, werden entweder weiche oder elastische Körper genannt, je nachdem sie nach dem Aufhören der äußern Einwirkung ihre veränderte Gestalt beibehalten oder wieder von selbst zu ihrer frühern Form zurückkehren. Die Elasticität (Federkraft) ist vollkommen oder unvollkommen, wenn der Körper nach Beseitigung der Kräfte, die auf ihn eingewirkt, und sein Volum ausgedehnt oder zusammengedrückt hatten, ganz oder nur zum Theil seine frühere Gestalt wie-

der erlangt. Alle Körper besitzen mehr oder weniger Elasticität; manche zeigen sie blos nach einem starken Drucke oder Stoße, einige geben sie wesentlich bei einem Stoße zu erkennen, wie Elfenbein, Marmor u. dgl., einige durch Biegen, wie Fischbein und Stahlfedern, andere bei ihrer Ausdehnung, wie Darmsaiten; endlich zeigt das Federharz (**gummi elasticum**) seine Elasticität sowohl nach einer Pressung als nach einer Ausdehnung, wie auch beim Stoße.

Ist die Cohäsion eines Körpers so schwach, daß er keine bestimmte Gestalt beizubehalten vermag, sondern die des Gefäßes annimmt, in das er gebracht wird, so heißt er ein *flüssiger* Körper. Unter den flüssigen Körpern unterscheidet man *tropfbar* flüssige, welche sich wenig zusammendrücken lassen und *zusammendrückbare* oder *elastisch* flüssige. Zu den erstern gehören Wasser, Weingeist, Öl, Quecksilber u. s. w., welche, langsam ausgegossen, Tropfen bilden und daher ihren Namen haben; auch haben diese Flüssigkeiten die Eigenschaft, daß ihre obere freie Fläche in einem hinlänglich weiten Gefäße eine horizontale Ebene bildet. Die elastisch flüssigen Körper, die man auch *ausdehnsame* Flüssigkeiten nennt, füllen den Raum des Gefäßes, in welches sie ganz eingeschlossen werden, stets vollkommen aus, daher sie auch mit der Vergrößerung des sie fassenden Raumes ausgedehnt, mit der Verminderung desselben zusammengedrückt werden. Hieher gehören die atmosphärische Luft, die Gas- und Dampfarten. Auch die tropfbaren Flüssigkeiten äußern bei großem Drucke oder Stoße Elasticität.

§. 21. Wenn Kräfte auf einen Körper wirken, so sind sie entweder unter einander im Gleichgewichte, oder es erfolgt eine Bewegung des Körpers. Die Wissenschaft, welche das Gleichgewicht und die Bewegung der Körper behandelt, heißt *Mechanik*. Sie zerfällt demnach in zwei Hauptabtheilungen, wovon die erste, *Statik* genannt, die Bedingungen für das Stattfinden des Gleichgewichtes erforscht, während die andere die Bewegung der Körper bestimmt, wenn die wirkenden Kräfte nicht im Gleichgewichte sind und *Dynamik* heißt. Die Anwendung der Statik und Dynamik auf die Einrichtung von Maschinen heißt *Maschinenlehre*.

Dieses Lehrbuch wird nur die starren Körper betrachten und zwar im ersten Hauptstücke die Statik im Allgemeinen, im zweiten die Statik der Maschinen und im dritten die Dynamik im Allgemeinen nebst ihrer Anwendung auf Maschinen behandeln.

Erstes Hauptstück.

Statik der festen Körper.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Begriffe von dem Gleichgewichte der Kräfte.

§. 22. Die Statik lehrt die Bedingungen auffinden, welche die Kräfte in Rücksicht ihrer Angriffspuncte, Richtungen und Intensitäten zu erfüllen haben, damit Gleichgewicht unter ihnen stattfinden könne. Es versteht sich von selbst, daß nur gleichartige Kräfte (§. 7) sich im Gleichgewichte erhalten können, da nur diese gegenseitig ihre Wirkungen gänzlich tilgen können.

§. 23. Wenn zwei oder mehre gleichartige Kräfte, welche auf einen Körper wirken, unter einander im Gleichgewichte sind, so haben diese auf den Zustand des Körpers, auf die Ruhe oder Bewegung desselben keinen Einfluß; es ist nemlich für die Einwirkung der übrigen Kräfte so viel, als wenn die im Gleichgewichte stehenden Kräfte gar nicht da wären. Der Zustand des Körpers, seine Ruhe oder Bewegung, wird demnach gar nicht geändert, wenn man diese Kräfte ganz hinwegnimmt und nur die übrigen auf denselben wirken läßt.

§. 24. Zwei gleiche Kräfte P, Q, (Fig. 8) die auf denselben Punct C, der gegen alle Seiten zu frei bewegt werden kann, nach gerade entgegengesetzten Richtungen CA, CB wirken, müssen einander das Gleichgewicht halten.

Denn die gleichen Kräfte P, Q wirken nach §. 16 gleich stark auf den Punct C; und da die Richtungen der beiden Kräfte einander gerade entgegengesetzt sind, so ist keine Bewegung außerhalb der Geraden AB denkbar. Wenn aber doch eine Bewegung des Punctes C stattfinden sollte, so müßte diese eben so gut von C gegen A als von C gegen B gleichzeitig geschehen, was unmöglich ist.

§. 25. Wirken zwei gleichartige Kräfte P, Q auf denselben frei beweglichen Punct C nach gerade entgegengesetzten Richtungen CA, CB und sind sie nicht einander gleich, ist z. B. P größer als Q; so können sie einander auch nicht das Gleichgewicht halten, sondern es muß eine Bewegung nach der Richtung der größern Kraft, nemlich von C gegen A erfolgen.

Denn da die beiden Kräfte P und Q gleichartig sind, so kann man statt P zwei andere Kräfte U und V so denken, daß sie zusammen eben so wie P wirken und dabei $U = Q$ ist. Nun sind aber die beiden Kräfte U und Q, weil sie auf denselben Punct nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirken, vermöge §. 24 im Gleichgewichte; folglich kann man sie (§. 23) hinwegnehmen, und es bleibt blos die Kraft V allein übrig, welche den Punct nach ihrer Richtung, d. h. nach der Richtung der größern Kraft P fortbewegt.

§. 26. Sind aber umgekehrt zwei gleichartige Kräfte P, Q, welche auf denselben frei beweglichen Punct C nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirken, im Gleichgewichte, so müssen diese Kräfte einander gleich sein.

Denn wären sie ungleich, so müßte (§. 25) eine Bewegung nach der Richtung der größern Kraft erfolgen, was wider die Voraussetzung ist.

§. 27. Sind endlich zwei Kräfte P, Q, welche denselben frei beweglichen Punct C nach gerade entgegengesetzten Richtungen CA, CB sollicitiren, unter sich nicht im Gleichgewichte, sondern erfolgt eine Bewegung nach der Richtung CA, nemlich von C gegen A; so sind die beiden Kräfte ungleich, und zwar die Kraft P größer als die Kraft Q.

Denn es kann wegen §. 24 nicht $P = Q$ und wegen §. 25 auch nicht $P < Q$ sein; folglich ist bei dieser Voraussetzung die Kraft P größer als die Kraft Q.

§. 28. Bei vollkommen festen Körpern, deren Theile einer angebrachten Kraft nicht nachgeben können, sondern sich alle zugleich fortbewegen müssen, gelten die vorhergehenden Schlüsse, wenn auch die beiden Kräfte P und Q nicht auf denselben Punct des Körpers, sondern auf ganz verschiedene Puncte a und b (Fig. 9) wirken, nur müssen sie mit den Richtungen der Kräfte in derselben Geraden sich befinden.

Denn da die Theile des Körpers, welche die Linie AB durchschneidet, ihres Zusammenhanges wegen ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, so entsteht durch eine nach der Richtung dieser Geraden angebrachte Kraft ein fortgepflanzter Zug, Druck oder Stoß in gleicher Stärke; d. h. alle Puncte in dieser Linie werden dann eben so gezogen, gedrückt oder gestoßen, als wenn die Kraft unmittelbar auf dieselben wirken würde. Bei dieser Voraussetzung wird also die Wirkung der beiden Kräfte so beschaffen sein, als wenn sie in irgend einem Puncte C der Geraden AB in gerade entgegengesetzten Richtungen angebracht wären. Auch ist leicht einzusehen, daß man bei dieser Voraussetzung eine Kraft in was immer für einen Punct ihrer Richtung versetzen könne, ohne daß dadurch die Wirkung derselben verändert würde. Obschon sich solche Körper in der Natur nicht vorfinden, so wird es doch erlaubt sein, die Untersuchungen über die Wirkungen der Kräfte auf Körper so anzustellen, als wenn die Theilchen derselben nicht nachgeben könnten; man kann dann bei der Bewegung auf die größere oder geringere Festigkeit und Dehnbarkeit der Körper die gehörige Rücksicht nehmen. Auch ist, wenn der Körper durch die Einwirkung von Kräften auf die Grenzen zusammengedrückt oder ausgedehnt ist, als es diese Kräfte vermögen, die fernere Wirkung derselben Kräfte wie auf einen vollkommen festen Körper.

§. 29. Wenn die Systeme von Kräften

$A, B, C, \ldots\ldots a, b, c, \ldots\ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$

auf einen gegebenen Körper in beliebiger Anzahl wirken, so müssen sie alle unter sich im Gleichgewichte stehen, wenn jedes der Systeme

$A, B, C, \ldots\ldots a, b, c, \ldots\ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$

für sich allein im Gleichgewichte ist.

Denn da (§. 23) die im Gleichgewichte stehenden Kräfte hinweggenommen werden können, ohne daß dabei der Zustand des Körpers geändert wird, so wird nach der gemachten Voraussetzung keine Kraft mehr übrig bleiben, die den Körper bewegen könnte. Alle Kräfte zusammengenommen stehen daher auch unter einander im Gleichgewichte.

§. 30. Wenn die Systeme von Kräften

$$A, B, C, \ldots . a, b, c, \ldots . \alpha, \beta, \gamma, \ldots .,$$

welche auf einen Körper wirken, unter einander und auch einige derselben wie

$$A, B, C, \ldots . a, b, c, \ldots$$

für sich im Gleichgewichte sind; so muß auch zwischen den übrigen Kräften $\alpha, \beta, \gamma, \ldots .$ Gleichgewicht stattfinden.

Denn da die Kräfte $A, B, C, \ldots . a, b, c, \ldots .$ für sich im Gleichgewichte sind, so kann man sie, ohne die Bewegung oder Ruhe des Körpers zu ändern, (§. 23) hinwegnehmen und es bleiben dann noch die Kräfte $\alpha, \beta, \gamma, \ldots .$ übrig, welche, wenn sie nicht im Gleichgewichte wären, eine Bewegung hervorbringen müßten. Dann könnten sich aber auch gegen die Voraussetzung nicht alle wirkenden Kräfte im Gleichgewichte erhalten.

§. 31. Wenn auf einen materiellen Punct oder auf ein System von unveränderlich mit einander verbundenen Puncten (oder auf einen Körper als ein System von Puncten) mehre Kräfte nach einerlei oder verschiedenen Richtungen wirken, so wird sich in vielen Fällen eine einzige Kraft finden lassen, welche an einem bestimmten Puncte des Systems nach bestimmter Richtung angebracht, dem Puncte oder Systeme von Puncten dasselbe Bestreben zur Bewegung zu ertheilen vermag, als es durch die Gesammtwirkung der gegebenen Kräfte geschieht. Jene einzige Kraft heißt in Beziehung dieser Kräfte die von denselben hervorgebrachte, gleichgeltende oder äquipollente Kraft oder auch die Resultirende und die gegebenen Kräfte werden zusammenwirkende Kräfte oder Composanten genannt.

Wirken die Kräfte blos auf einen Punct unter verschiedenen Richtungen, zwischen welche die Richtung der Resultirenden fällt, so heißt man letztere auch oft die mittlere Kraft und jene die Seitenkräfte.

Da die Resultirende die Gesammtwirkung ihrer Composanten ersetzt, so muß sie, nach gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, offenbar das System der Composanten im Gleichgewichte erhalten und Null sein, wenn ihre Composanten im Gleichgewichte sind, weil sie sonst, nach gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, wider die Voraussetzung erst das Gleichgewicht herstellen müßte. Auch muß im Falle des Gleichgewichtes der Kräfte jede derselben, ihrer Richtung gerade entgegengesetzt angebracht, die Resultirende der übrigen Kräfte vorstellen.

§. 32. Wenn zwei oder mehre Kräfte $P, P', P'', \ldots$ (Fig. 10) nach einerlei Richtung, etwa von C gegen B, in der festen Geraden BA wirken, somit nach §. 28 in ihrer gemeinschaftlichen Richtung auf einen Punct C wirkend gedacht werden können; so ist die Resultirende R aller dieser Kräfte gleich ihrer Summe, nemlich

$$R = P + P' + P'' + \ldots\ldots$$

und ihre Richtung kommt mit jener der Componenten überein. Denn denkt man sich nebst den Kräften $P, P', P'', \ldots$ auf C in der Geraden AB noch die beiden gleichen Kräfte

$$R = R' = P + P' + P'' + \ldots$$

gerade entgegengesetzt angebracht, welche also im Gleichgewichte mit einander sind und sofort (§. 23) die Wirkung der gegebenen Kräfte nicht verändern; so sind (§. 24) die Theile $P, P', P'', \ldots$ von R' mit den gegebenen entgegengesetzten Kräften $P, P', P'', \ldots$ im Gleichgewichte und es muß folglich auch (§. 29) zwischen der ganzen Kraft R' und den gegebenen gerade entgegengesetzten Kräften $P, P', P'', \ldots$ Gleichgewicht bestehen. Nimmt man demnach diese im Gleichgewichte befindlichen Kräfte $R', P, P', P'', \ldots$ hinweg, so muß (§. 23) die in der Richtung der gegebenen Kräfte $P, P', P'', \ldots$ allein angebrachte Kraft

$$R = P + P' + P'' + \ldots$$

die Wirkungen jener vollkommen ersetzen und sofort (§. 31) ihre Resultirende sein.

§. 33. Wirken zwei ungleiche Kräfte $P > Q$ (Fig. 8) nach gerade entgegengesetzten Richtungen CA und CB auf den Punct C, so gleicht ihre Resultirende R der Differenz der beiden gegebenen Kräfte, d. h. es ist

$$R = P - Q$$

und sie wirkt im Sinne der größern Componente P. Denn wegen $P > Q$ kann man P als die Resultirende von zwei in ihrem Sinne wirkenden Kräften Q und R betrachten (§. 32), wobei

$$Q + R = P$$

ist. Man hat dann in der einen Richtung die Kräfte Q und R, in der gerade entgegengesetzten hingegen die Kraft Q, und da sich die Wirkungen der beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte Q aufheben, so bleibt nach der Richtung der Kraft P die Kraft R als der Wirkung der gegebenen Kräfte P und Q gleichgeltend übrig, folglich ist erstere die Resultirende der beiden andern und wegen

$$R + Q = P \text{ wird sofort}$$
$$R = P - Q.$$

§. 34. Wirken von mehren Kräften

$$P,\ P',\ P'',\ldots.\ \text{und}\ Q,\ Q',\ Q'',\ldots$$

die einen $P,\ P',\ P'',\ldots$ nach der gerade entgegengesetzten Richtung der andern $Q,\ Q',\ Q'',\ldots$ in derselben Geraden auf einen Punct, so denke man sich (§. 32) statt der Kräfte $P,\ P',\ P'',\ldots.$ ihre Resultirende

$$U = P + P' + P'' + \ldots.$$

und statt der Kräfte $Q,\ Q',\ Q'',\ldots.$ ihre Resultirende

$$V = Q + Q' + Q'' + \ldots$$

wirkend und es ist offenbar die Resultirende aller gegebenen Kräfte

$$P,\ P',\ P'',\ldots\ \text{und}\ Q,\ Q',\ Q'',\ldots.$$

zugleich die der Kräfte U und V.

Für $U > V$ ist aber (§. 33)

$$R = U - V = (P + P' + P'' + \ldots) - (Q + Q' + Q'' + \ldots)$$

und es kommt die Richtung der Resultirenden R mit jener der größern Kraft U oder der Kräfte $P,\ P',\ P'',\ldots.$, deren Summe gegen die von $Q,\ Q',\ Q'',\ldots$ größer ist, überein.

Für $U = V$, wodurch $R = 0$ wird, ist U mit V im Gleichgewichte, welches sofort auch zwischen den Kräften

$$P,\ P',\ P'',\ldots.\ \text{und}\ Q,\ Q',\ Q'',\ldots.$$

besteht.

Mit Berücksichtigung der §§en 31 und 32 ergibt sich daher der Satz:

Die Resultirende mehrer in einer Geraden wirkenden Kräfte gleicht der algebraischen Summe dieser Kräfte, worin die in einem Sinne wirkenden für positiv, die im gerade entgegengesetzten Sinne wirkenden aber für negativ zu nehmen sind, und ihre Richtung kommt, je nachdem die Resultirende positiv oder negativ ausfällt, mit jener der als positiv oder der als negativ angenommenen Componenten überein.

Zweiter Abschnitt.

Ueber das Gleichgewicht der Kräfte, welche auf einen Punct nach verschiedenen Richtungen wirken.

§. 35. Wenn die Richtungen CA und CB der auf einen Punct C wirkenden Kräfte P und Q (Fig. 11) einen Winkel ACB einschließen, so hat jede Kraft das Bestreben, den Punct C, da sie ihn blos nach ihrer Richtung bewegen kann, in der Ebene beider Kräfte aus der Richtung der andern Kraft abzulenken. Der Punct C kann sonach durch die gleichzeitige Einwirkung der beiden Kräfte P und Q weder der Richtung der einen, noch jener der andern Kraft folgen, sondern muß, wenn P von C gegen A und Q von C gegen B wirkt, in das Innere des Winkels ACB bewegt werden.

Soll demnach eine Kraft allein diese Bewegung des Punctes C verhindern, nemlich Gleichgewicht zwischen den Kräften P und Q hervorbringen können, so muß ihre Richtung CD′ nothwendig innerhalb des Scheitelwinkels A′CB′ liegen, und somit die gerade entgegengesetzte Richtung CD, nemlich die der Resultirenden (§. 31) innerhalb des Winkels ACB fallen, welchen die Richtungen CA und CB der gegebenen Kräfte P und Q mit einander einschließen.

§. 36. Sind die Kräfte P und Q, welche auf den Punct C (Fig. 12) unter dem Winkel ACB wirken, gleich, so muß die Richtung CD ihrer Resultirenden diesen Winkel in zwei gleiche Theile $ACD = BCD$ theilen; denn vermöge vorig. §. liegt die Richtung CD der Resultirenden zwischen den Richtungen CA und CB der beiden Componenten P und Q, und kann, da $P = Q$ ist, nicht mehr gegen die eine als gegen die andere der Richtungen CA und CB geneigt sein.

Schneidet man demnach die Geraden CA und CB im Verhältnisse der Kräfte P und Q ab (§. 16), d. i. macht man $CA = CB$ wegen $P = Q$ und ergänzt den Winkel ACB auf das Parallelogramm ACBD, so theilt die aus C gezogene Diagonale CD den Winkel ACB in zwei gleiche Theile und ist sofort die Richtung der Resultirenden jener beiden Kräfte.

§. 37. Sind aber die auf den Punct C (Fig. 11) wirkenden Kräfte P und Q ungleich, etwa $P > Q$, so ist die Richtung CD ihrer Resultirenden gegen die Richtung CA der größern Kraft P mehr geneigt als gegen die der andern Q, es ist nemlich der Winkel ACD < BCD. Um dies zu beweisen, denken wir uns statt der größern Kraft P in ihrer Richtung CA die Componenten Q und V, wo $Q + V = P$ ist, wirkend, so ergeben sich hiedurch nach den Richtungen CA und CB die zwei gleichen Kräfte Q und Q. Nimmt man statt dieser Kräfte ihre Resultirende, deren Richtung CE vermöge vorig. §. den Winkel ACB in zwei gleiche Theile theilt, so hat man dann für die Kräfte P und Q die Kraft nach CE und die Kraft V nach CA, deren Resultirende in Größe und Richtung mit jener der Kräfte P und Q übereinkommen muß. Vermöge §. 35 fällt aber die Richtung CD dieser Resultirenden zwischen CE und CA, mithin ist der Winkel ACD < ACE = BCE, also um so mehr ACD < BCD.

Man sieht zugleich daraus, daß für das Wachsen oder Abnehmen der einen Seitenkraft P bei der Unveränderlichkeit der andern Seitenkraft Q der Winkel ACD, welchen die Richtung CD ihrer Resultirenden mit ersterer Kraft einschließt, ab- oder zunimmt.

§. 38. Ist D ein Punct in der Richtung der Resultirenden von den Kräften P und Q, der mit C fest verbunden ist, so kann man die Resultirende unbeschadet ihrer Wirkung auch in jenen Punct versetzen (§. 28). Bringt man nun daselbst statt dieser Resultirenden die zu P und Q gleichen und parallelen Kräfte $P' = P$ und $Q' = Q$ an, so haben diese beiden Kräfte P' und Q' für die Bewegung des Punctes C dieselbe Wirkung wie die Kräfte P und Q, welche unmittelbar diesen Punct afficirten; d. h. zwei Kräfte P' und Q' haben mit zwei Kräften P und Q, welche ihnen respective gleich und parallel sind, einerlei Wirkung, wenn die Resultirende der erstern Kräfte mit jener der letztern dieselbe Richtung hat und der Angriffspunct der einen Kräfte mit jenem der andern fest verbunden ist.

§. 39. Werden auf den Richtungen der Kräfte P und Q, (Fig. 13) die unter dem Winkel PCQ auf den Punct C wirken, die Längen CP und CQ im Verhältnisse dieser Kräfte abgeschnitten (§. 16), so daß $CP : CQ = P : Q$ ist, und daher P durch CP und Q durch CQ vorgestellt wird; so ist die aus dem Angriffspuncte C gezogene Diagonale CR des über PCQ verzeichneten Parallelogramms PCQR die Richtung und Größe der Resultirenden der beiden Kräfte P und Q.

Um den Beweis hinsichtlich der Richtung der Resultirenden vollständig zu führen, müssen die beiden Fälle berücksichtigt werden, wenn die Kräfte

P und Q ein rationales, und wenn sie ein irrationales oder transcendentes Verhältniß zu einander haben, mithin entweder unter sich genau meßbar (commensurabel) oder unmeßbar (incommensurabel) sind.

I. Sind P und Q commensurabel, so ist entweder die eine Kraft Q das $n$fache der andern P, also $Q = nP$ für die ganze Zahl n, oder ein $n$ter Theil von P ist $r$mal in der Kraft Q enthalten, so daß für die ganzen Zahlen n und r sich $\frac{P}{n} = \frac{Q}{r}$ ergibt, somit $Q = \frac{r}{n} P$ ist.

a) Ist $Q = nP$ oder $P = \frac{Q}{n}$, so theile man die Kraft Q oder die Gerade CQ in den Puncten a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1} in die n gleichen Kräfte $Q_1 = Q_2 = Q_3 \ldots = Q_n = \frac{Q}{n} = P$, denke sich in der gemeinschaftlichen Richtung CQ dieser Kräfte, Q_2 in a_1, Q_3 in a_2, Q_4 in a_3, ... Q_n in a_{n-1} angebracht und Q_1 in C selbst wirkend, führe dann sowohl durch die genannten Theilungspuncte zu CP die Parallelen a_1p_1, a_2p_2, a_3p_3, ... $a_{n-1}p_{n-1}$ als durch P zu CQ die Parallele PS und ziehe endlich auch in den dadurch erhaltenen Parallelogrammen die Diagonalen CC_1, a_1C_2, a_2C_3, ... $a_{n-1}R$.

Betrachtet man nun zuerst die auf C wirkenden gleichen Kräfte $CP = P$ und $Ca_1 = Q_1$, so kann man statt derselben vermöge vorig. §. die ihnen gleichen und parallelen Kräfte p_1 und q_1 in C_1, anbringen, und diese letztern Kräfte in ihren Richtungen, p_1 nach a_1 und q_1 nach R übertragen. Eben so kann man statt der gleichen Kräfte p_1 und Q_2 in a_1 in dem Puncte C_2 ihrer Resultirenden die ihnen gleichen und parallelen Kräfte p_2 und q_2 anbringen, und p_2 nach a_2 und q_2 nach R versetzen. Desgleichen erhält man statt p_2 und Q_3 in a_2 die ihnen gleichen und parallelen Kräfte p_3 und q_3 in C_3, von denen man wieder in ihren respectiven Richtungen p_3 nach a_3 und q_3 nach R überträgt u. s. w. Setzt man dieses Verfahren fort, so kommt man endlich auf die beiden gleichen Kräfte p_{n-1} und Q_n, von welchen erstere in C_{n-1} parallel zu CP, letztere in a_{n-1} nach der Richtung CQ wirkt. Versetzt man sofort p_{n-1} ebenfalls nach a_{n-1} und bringt statt dieser Kräfte in R die ihnen gleichen und parallelen p_n und q_n an; so hat man in diesem Puncte blos die Kraft p_n gleich und parallel mit P, und die Kraft

$$S = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n = Q$$

parallel zu Q, d. h. durch den beschriebenen Vorgang sind die Kräfte P und Q, welche unmittelbar auf C wirkten, ohne Änderung ihrer Wirkung, pa-

rallel zu ihren Richtungen in den Punct **R** versetzt worden; mithin muß dieser Punct nach vorigem §. in der Richtung der Resultirenden dieser Kräfte sein, und weil auch **C** ein Punct derselben Richtung ist, so ist **CR** oder die Diagonale des Parallelogramms **CPRQ** die Richtung der Resultirenden von den Kräften P und Q.

b) Ist $Q = \frac{r}{n} P$, also $\frac{Q}{r} = \frac{P}{n}$ und schneidet man auf $CQ = Q$ (Fig. 14) die r gleichen Kräfte $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_r = \frac{Q}{r} = \frac{P}{n}$ ab, bringt q_2, q_3, q_4, ... respective in den Theilungspuncten a_1, a_2 a_3, ... an und läßt q_1 unmittelbar auf **C** wirken, zieht dann zu **CQ** die Parallele **PS**, zu **CP** die Parallelen a_1C_1, a_2C_2, a_3C_3, ... $a_{r-1}C_{r-1}$, **QR** und endlich in den hiedurch entstandenen Parallelogrammen die Diagonalen CC_1, a_1C_2, a_2C_3, ... $a_{r-1}R$, so ist nach a) wegen $P = nq_1$ die Diagonale CC_1 die Richtung der Resultirenden von P und q_1 und man kann statt dieser Kräfte in C_1 die ihnen gleich wirkenden parallelen Kräfte $P_1 = P$ und $p_1 = q_1$ anbringen. Versetzt man von diesen Kräften p_1 und P_1 erstere nach **R** und letztere in ihrer Richtung nach a_1, so kann man wieder statt der Kräfte P_1 und q_2 wegen $P_1 = P = nq_2$ in den Punct C_2 ihrer Resultirenden die gleich wirkenden parallelen Kräfte $P_2 = P_1$ und $p_2 = q_2$ anbringen und von diesen p_2 wieder nach **R** und P_2 nach a_2 versetzen. Bringt man statt letzterer Kraft und der q_3 die parallelen Kräfte $P_3 = P_2$ und $p_3 = q_3$ in C_3 an, versetzt p_3 nach **R** und P_3 nach a_3 und fährt auf diese Art fort, bis man zu dem Puncte C_{r-1} gelangt; so werden sich hier die beiden Kräfte $P_{r-1} = P = nq_r$ und $p_{r-1} = q_{r-1}$ ergeben, von denen man p_{r-1} in **R** und P_{r-1} in a_{r-1} anbringen wird. Da man endlich statt letzterer Kraft P_{r-1} und q_r in a_{r-1} in dem Puncte **R** ihrer Resultirenden die ihnen parallelen und gleich wirkenden Kräfte $P_r = P_{r-1}$ und $p_r = q_r$ anbringen kann, so hat man durch das bisherige Verfahren statt der Kräfte P und Q in **C** die ihnen in **R** gleich wirkenden parallelen Kräfte $P_r = P$ und $S = p_1 + p_2 + p_3 \ldots + p_r = r.\frac{P}{n} = Q$, und sofort muß auch der Punct **R** in der Richtung der Resultirenden der auf **C** wirkenden Kräfte P und Q liegen, nemlich die Diagonale **CR** des über diese Kräfte construirten Parallelogramms **PCQR** die Richtung ihrer Resultirenden sein.

II. Sind die beiden Kräfte $P = CP$ und $Q = CQ$ (Fig. 15) *incommensurabel*, ist folglich kein noch so kleiner Theil von P genau in Q enthalten, so gibt es für jede ganze Zahl n immer eine andere ganze r, daß

$Q > \frac{r}{n} P$ und zugleich $Q < \frac{r+1}{n} P$ stattfinden muß. *)

Schneidet man demnach $CP = P$ und nebst $CQ = Q$ einmal $CQ' = Q' = \frac{r}{n} P$, dann $CQ'' = Q'' = \frac{r+1}{n} P$ ab und verzeichnet im ersten Falle das Parallelogramm $PCQ'R'$, im zweiten das Parallelogramm $PCQ''R''$, so wird vermöge b) die Diagonale CR' die Richtung der Resultirenden von P und Q' und CR'' jene der Resultirenden von P und Q'' vorstellen. Da aber $Q > Q'$ und zugleich $Q < Q''$ wegen $Q > \frac{r}{n} P$ und $Q < \frac{r+1}{n} P$ ist; so liegt die Richtung der Resultirenden von P und Q stets oberhalb CR' und unterhalb CR'' (§. 37), also zwischen diesen Richtungen CR' und CR'' und muß sofort die Parallele PR'' zwischen den Puncten R' und R'' durchschneiden. Da aber auch für dieselben Zahlen n und r, wodurch $CQ > CQ'$ und zugleich $CQ < CQ''$ ist, die aus Q zu CP gezogene Parallele QR die Gerade PR'' zwischen R' und R'' durchschneiden muß und diese Puncte bei dem fortwährenden Wachsen von n und r einander so nahe, als man will, gebracht werden können; so folgt daraus offenbar, daß die besagten beiden Durchschnittspuncte zwischen R' und R'', nemlich der von der Resultirenden der Kräfte P und Q, und der von der Parallelen QR in einen Punct R zusammenfallen müssen. Man sieht also, daß auch in dem Falle, wenn die Kräfte P und Q incommensurabel sind, die Diagonale CR des über PCQ verzeichneten Parallelogramms $CPRQ$ die Richtung der Resultirenden dieser Kräfte ist.

§. 40. Nun erübrigt noch zu zeigen, daß die Größe der Resultirenden von zwei auf einen Punct nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften durch die Länge der Diagonale, welche die Richtung der Resultirenden (§. 39) bestimmt, vorgestellt wird.

Zu diesem Ende seien P und Q (Fig. 16) zwei auf den Punct C nach CA und CB wirkende Kräfte. Schneiden wir $CA = P$ und $CB = Q$

---

*) Z. B. für $Q = P\sqrt{2} = 1{,}414213 \ldots \times P$, ist

$Q > \frac{2}{2} P$, $Q < \frac{3}{2} P$; also $n = 2$ und $r = 2$,

$Q > \frac{4}{3} P$, $Q < \frac{5}{3} P$; „ $n = 3$ „ $r = 4$,

$Q > \frac{5}{4} P$, $Q < \frac{6}{4} P$; „ $n = 4$ „ $r = 5$,

. . . . . .

$Q > \frac{141421}{100000} P$, $Q < \frac{141422}{100000} P$; $n = 100000$, $r = 141421$ u. s. w.

ab und verzeichnen über ACB das Parallelogramm ACBD, so ist die aus C gezogene Diagonale CD die Richtung der Resultirenden der beiden Kräfte (vorig. §.). Bezeichnen wir die noch unbekannte Größe dieser Resultirenden mit R und bringen wir statt derselben in der gerade entgegengesetzten Richtung eine Kraft $R' = R$ an, so muß nicht nur (§. 31) zwischen den Kräften R', P, Q das Gleichgewicht bestehen, sondern es muß auch die Resultirende von irgend zweien dieser Kräfte sowohl in Größe als Richtung mit der gerade entgegengesetzt angebrachten dritten Kraft übereinkommen. Nimmt man nemlich R' und Q für jene beiden Kräfte und denkt sich über dieselben das Parallelogramm verzeichnet, so muß die aus C gezogene Diagonale in die Richtung CA' fallen, welche der Richtung CA der dritten Kraft P gerade entgegengesetzt ist. Man hat also von dem zu construirenden Parallelogramme die Richtung CA' seiner aus C ausgehenden Diagonale, ferner die Größe und Richtung der einen einschließenden Seite CB und die Richtung CE der andern Seite bekannt, folglich darf man nur durch B zu CE die Parallele Ba ziehen, bis CA' in a geschnitten wird und durch a zu CB die Parallele aD' bis CE führen, um das erwähnte Parallelogramm aD'CB zu erhalten, in welchem wegen CB $= Q$ nothwendig CD' die Größe der Kraft R' vorstellen muß. Berücksichtigt man, daß CD' $=$ aB $= R'$ und CD $=$ aB ist, so ergibt sich wegen $R' = R$ endlich CD $= R$ als die gesuchte Resultirende; d. h. *von zwei auf einen Punct C unter einem Winkel wirkenden Kräften* $P =$ CA und $Q =$ CB *wird die Größe und Richtung ihrer Resultirenden durch die aus diesem Puncte gezogene Diagonale* CD *des über beide Kräfte beschriebenen Parallelogramms* BCAD *bestimmt.* Man pflegt deswegen dieses Parallelogramm das *Kräftenparallelogramm* und den Winkel ACB, der von den Seitenkräften P und Q eingeschlossen wird, den *Kräftenwinkel* zu nennen.

Anmerkung. Dieser so eben aufgestellte Satz des Kräftenparallelogramms kann mit Recht die Grundlage zu dem Lehrgebäude der Mechanik, insbesondere der Statik genannt werden, weil auf demselben fast alle Untersuchungen in der Mechanik beruhen.

Der hier mitgetheilte Beweis dieses Satzes wurde zuerst von *Duchayla* gegeben.

§. 41. Mit Hilfe des Kräftenparallelogramms vermag man mehre Kräfte in eine Resultirende zusammenzusetzen, und umgekehrt eine Kraft in mehre ihr gleich wirkende Kräfte zu zerlegen. Die erste dieser Verfah-

rungsarten nennt man die Zusammensetzung und die andere die Zerlegung (Auflösung) der Kräfte.

Wir wollen hier bei einigen Fällen die Anwendung zeigen.

§. 42. Auf einen Punct A (Fig. 17) wirken mehre Kräfte

$$P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots.$$

unter verschiedenen Richtungen; man soll ihre Resultirende finden.

Dieser Anforderung kann immer entsprochen werden, die Richtungen der Kräfte mögen in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen, weil wegen des gemeinschaftlichen Angriffspunctes aller Kräfte immer je zwei in einer Ebene sind, sofort durch das Kräftenparallelogramm in eine Kraft zusammengesetzt werden können. Werden nemlich durch die Geraden AP, AP′, AP″, AP‴, AP^{IV}, ... die Größen und Richtungen der gegebenen Kräfte vorgestellt und die Kräftenparallelogramme APRP′, ARR′P″, AR′R″P‴, AR″R‴P^{IV}, ... verzeichnet; so ist AR $= R$ die Resultirende von P und P', AR′ $= R'$ jene von R und P'', also auch von P, P' und P'', AR″ $= R''$ die von R' und P''' oder von P, P', P'', P''' und AR‴ $= R'''$ die von R'' und P^{IV} oder von P, P', P'', P''', P^{IV}, u. s. w.

Man sieht leicht, daß die so eben gelehrte Construction einfacher ausgeführt werden kann. Denn man hat nur nöthig, durch P die zu AP′ parallele und gleiche Gerade PR, durch R die zu AP″ parallele und gleiche RR′, durch R′ zu AP‴ die parallele und gleiche R′R″, durch R″ die R″R‴ parallel und gleich mit AP^{IV} u. s. w. zu ziehen, und es ist die letzte Verbindungslinie AR‴ die gesuchte Resultirende.

Schließt das Polygon APRR′R″R‴ in A, d. h. fällt bei der Construction desselben der Punct R‴ auf A, so ist die Resultirende gleich Null und man kann sagen, die gegebene Kräfte P, P', P'', P''', P^{IV}, ... sind im Gleichgewichte.

Anmerkung. Es ist wohl für sich klar, daß man durch die so eben gezeigte Construction dieselbe Größe und Richtung der Resultirenden erhält, man mag bei was immer für einer der gegebenen Kräfte den Anfang machen; nur ist für die zuletzt erwähnte einfachere Construction zu bemerken, daß man die Parallele zu einer Kraft immer im Sinne der letztern zu ziehen habe. So mußte R″R‴ von der Rechten zur Linken gezogen werden, weil die Kraft P^{IV}, welcher R″R‴ parallel und gleich gemacht wurde, jene Richtung hat.

§. 43. Bemerkenswerth ist der Fall, wenn die Resultirende von blos drei auf einen Punct A wirkenden Kräften AP $= P$, AP′ $= P'$, AP $= P''$,

(Fig 18), deren Richtungen in verschiedenen Ebenen liegen, gesucht wird. Denn macht man auf die vorhin gezeigte Art Pq parallel und gleich der Kraft AP′, dann qR parallel und gleich der AP″, so ist AR die gesuchte Resultirende und dabei ist die Ebene RqP parallel zur Ebene P″AP′. Wird nun RqP zu dem Parallelogramme RqPr, indem man Rr parallel zu Pq und Pr parallel zu qR zieht, und P″AP′ zu dem Parallelogramme P″AP′r′ durch die zu AP′ und AP″ Parallelen P″r′ und P′r′ ergänzt; so sind nicht allein diese Parallelogramme congruent, sondern es besteht auch die Congruenz zwischen den Parallelogrammen P″APr und RqP′r′, P′APq und P″rRr′; sonach ist PAP″r′Rrq ein über die drei Kräfte AP, AP′, AP″ construirtes Parallelpiped, in welchem die aus dem Angriffspuncte A gezogene Diagonale AR die Größe und Richtung der Resultirenden vorstellt.

Dieser Fall ist jenem von zwei auf einen Punct unter verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften analog, nur daß die Größe und Lage der Resultirenden von drei Kräften durch die Diagonale eines Parallelepipedes, jene von zwei Kräften aber durch die eines Parallogrammes bestimmt ist.

§. 44. Man kann auch umgekehrt eine gegebene Kraft in zwei und mehre Kräfte, deren Richtungen gegeben sind, zerlegen.

a) Soll eine gegebene Kraft in zwei Kräfte nach gegebenen Richtungen zerlegt werden können, so müssen letztere sammt der erstern in derselben Ebene liegen und in ihrem, 180° nicht überschreitenden Winkel die Richtung der gegebenen Kraft einschließen. Sind CA, CB, CD (Fig. 16) die drei Richtungen, die in einer Ebene liegen, und ist CD die gegebene Kraft, welche in zwei Seitenkräfte nach den beiden andern Richtungen zu zerlegen ist; so zieht man durch D zu CA und CB die Parallelen DB und DA, und man hat die gesuchten Seitenkräfte CA und CB. Wäre aber CB die gegebene Kraft, so kann man diese nicht nach CD und CA in Seitenkräfte zerlegen, wohl aber nach CD und CA′, wovon letztere Richtung die entgegengesetzte Verlängerung von CA ist. Man muß also diesfalls durch B die Parallelen BD und Ba zu CA′ und CD führen, und man wird CD und Ca als die verlangten Seitenkräfte erhalten, wobei aber Ca in Bezug einer nach der gegebenen Richtung CA wirkenden Kraft als negativ zu betrachten ist.

b) Soll man eine gegebene Kraft unmittelbar in drei Kräfte nach gegebenen Richtungen zerlegen können, so brauchen letztere nicht in derselben Ebene zu liegen. Ist AR (Fig. 18) die Größe und Richtung der auf A wirkenden Kraft, die nach den in verschiedenen Ebenen liegenden Richtun-

gen AB, AB′, AB″ zerlegt werden soll, so kann diese Zerlegung nach denselben Richtungen nur geschehen, wenn AR innerhalb des körperlichen Winkels BAB′B″, oder was dasselbe ist, zwischen den Ebenen BAB′ BAB″, B′AB″ sich befindet. Legt man in diesem Falle durch R zur Ebene B′AB″ die Ebene RrPq, zur B″AB die Rr′P′q und zur BAB′ die RrP″r′parallel, so werden hiedurch auf den gegebenen Richtungen die gesuchten Seitenkräfte AP, AP′, AP″ abgeschnitten.

Liegt die Richtung der gegebenen Kraft nicht innerhalb des körperlichen Winkels, den die Richtungen der zu suchenden Kräfte bilden, so kann zwar die Zerlegung jener Kraft nicht nach den gegebenen Richtungen, doch aber entweder nach zweien dieser Richtungen und der entgegengesetzt verlängerten dritten, oder nach einer derselben und den verlängerten beiden übrigen, oder nach den entgegengesetzten Verlängerungen aller drei geschehen, wobei dann die nach den entgegengesetzten Richtungen erhaltenen Componenten als negativ anzusehen sind.

§. 45. Ist blos der Angriffspunct, die Größe und Richtung einer Kraft gegeben, so kann man diese auf unzählig viele Arten in mehre Kräfte zerlegen, die zusammen dieselbe Wirkung hervorbringen; denn man kann sowohl über die gegebene Kraft als Diagonale eines Parallelogramms in irgend einer durch dieselbe gelegten Ebene was immer für ein Parallelogramm construiren, von welchem die im Angriffspuncte der gegebenen Kraft zusammenstoßenden Seiten die beiden Seitenkräfte sein werden, als auch jede solche Seitenkraft wieder in irgend einer durch dieselbe gelegten Ebene mittels des Kräftenparallelogrammes in zwei willkürliche Seitenkräfte zerlegen u. s. f. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergeben sich endlich so viele Kräfte (Componenten), als man zu erhalten wünscht, die zusammen auf den Angriffspunct der gegebenen Kraft eben so wirken, wie diese allein. Bringt man aber jede auf die besagte Art erhaltene Componente nach ihrer Richtung in irgend einem Puncte an, der mit jenem Angriffspuncte fest verbunden ist, so hat man dann statt der gegebenen Kraft mehre, die auf ein frei bewegliches System von fest mit einander verbundenen Puncten nach verschiedenen Richtungen wirken. Endlich werden diese Kräfte noch mehr zerstreuet, wenn man bei der fortgesetzten Zerlegung jeder der Componenten in irgend einen Punct ihre Richtung versetzt und dann erst weiter zerlegt.

Will man die durch Zerlegung erhaltenen Kräfte wieder zusammensetzen, so muß man zuerst zwei dieser Kräfte aufsuchen, deren Richtungen gehörig verlängert sich durchschneiden, sie dann in diesem Puncte nach ih-

ren Richtungen anbringen und mittels des Kräftenparallelogramms in ihre Resultirende zusammensetzen. Zu dieser Resultirenden sucht man hierauf diejenige der übrigen Kräfte, welche mit ihr einen Durchschnittspunct gibt, versetzt beide in diesen Punct und bestimmt ihre Resultirende u. s. w. Auf diese Art wird man endlich zur Resultirenden aller Kräfte gelangen, die mit der vorhin zerlegten gegebenen Kraft in Größe und Richtung ganz übereinkommen wird.

Nach diesem scheint es, als könnte man allgemein für mehre gegebene Kräfte, die nach verschiedenen Richtungen auf ein System von Puncten wirken, eine Resultirende finden. Allein nicht immer haben Kräfte, die auf verschiedene Puncte wirken, eine Resultirende und können sonach auch nicht durch eine einzige Kraft in Gleichgewicht gebracht werden (§. 31), weil sich nemlich diesfalls nicht stets zwei Kräfte finden werden, die in eine Resultirende zusammengesetzt werden könnten.

§. 46. Wir wollen nun die Beziehungen zwischen mehren, nach verschiedenen Richtungen auf einen Punct wirkenden Kräften und ihrer Resultirenden analytisch darstellen.

Betrachten wir zuerst zwei Kräfte $CA = P$ und $CB = Q$, (Fig. 16) welche auf den Punct C wirken und $CD = R$ zu ihrer Resultirenden haben; so sieht man, daß das Kräftenparallelogramm ACBD durch CD in zwei congruente Dreiecke ACD und BCD zerfällt; folglich muß sich durch das eine dieser Dreiecke die Abhängigkeit der drei Kräfte P, Q, R und ihrer gegenseitigen Neigungswinkel bestimmen lassen. Bezeichnet man den Kräftenwinkel ACB durch λ, ferner die Winkel ACD, BCD, welche die Seitenkräfte P, Q mit der mittlern Kraft R einschließen, durch α, β; so enthält in der That das Dreieck ACD die Kräfte $P = AC$, $Q = CB = AD$ und $R = CD$ als Seiten und $ADC = DCB = \beta$, $ACD = \alpha$, $CAD = 180° - BCA = 180° - \lambda$ als gegenüberliegende Winkel. Man kann also, wenn drei Stücke dieses Dreieckes gegeben sind, (die drei Winkel ausgenommen) die drei übrigen Stücke bestimmen.

Hier wollen wir blos die beiden Fälle der directen Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, da selbe in der Folge allein vorkommen werden, in Betracht ziehen. Die übrigen Fälle kann der Anfänger zu mehrer Übung sowohl durch Rechnung als durch Verzeichnung leicht selbst lösen. *)

*) In Allem sind 11 verschiedene Fälle, weil von den 20 Verbindungen der 6 Stücke des Dreieckes zu dreien außer den drei Winkeln als gegeben noch 8 Fälle, welche doppelt vorkommen, ausgeschlossen werden müssen. Nach

Erſter Fall. Sind die Kräfte P, Q und der Kräftenwinkel λ, alſo $CAD = 180° - \lambda$ gegeben, ſo erhält man für die Größe und Richtung der Reſultirenden aus dem Dreiecke CAD

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos CAD} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\lambda},$$

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + P^2 - Q^2}{2RP} = \frac{P + Q\cos\lambda}{R},$$

$$\cos\beta = \frac{R^2 + Q^2 - P^2}{2RQ} = \frac{Q + P\cos\lambda}{R},$$

oder für die bequemere Beſtimmung dieſer Winkel, da $\alpha + \beta = \lambda$ iſt,

$$(P+Q) : (P-Q) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha).$$

Zweiter Fall. Sind hingegen nebſt der Reſultirenden R die Richtungen der Kräfte P und Q, nemlich die Winkel α und β gegeben, wodurch auch $\lambda = \alpha + \beta$ bekannt iſt; ſo erhält man zur Beſtimmung der Seitenkräfte

$$P = \frac{R\sin\beta}{\sin\lambda},\quad Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin\lambda},$$

woraus ſofort auch

$$P : Q : R = \sin\beta : \sin\alpha : \sin\lambda = \sin BCD : \sin DCA : \sin BCA$$

hervorgeht.

Wird aber ſtatt der Reſultirenden R, ihrer Richtung gerade entgegengeſetzt, die gleiche Kraft $R' = R$ angebracht, ſo daß alſo R', P und Q im Gleichgewichte ſind, ſo ergibt ſich, wegen $\sin\beta = \sin D'CB$ und $\sin\alpha = \sin ACD'$, aus der vorigen zuſammengeſetzten Proportion auch noch

$$P : Q : R' = \sin D'CB : \sin ACD' : \sin ACB.$$

Beide zuſammengeſetzte Proportionen geben ſonach den Satz:

Wenn drei Kräfte auf einen Punct wirken, und die eine davon die Reſultirende der beiden andern Kräfte iſt, oder alle drei unter ſich im Gleichgewicht ſind, ſo verhalten ſich dieſe Kräfte wie die Sinus der Winkel, welche die beiden andern Kräfte mit einander einſchließen.

---

jenen 11 Fällen kann alſo gegeben ſein: P, Q, R; (P, Q, β); P, Q, λ; (P, R, β); P, R, α; (P, R, λ); P, β, α; P, β, λ; P, α, λ; R, β, α; R, β, λ, worunter die drei eingeklammerten Fälle bekanntlich unbeſtimmte Löſungen geben können, da bei denſelben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben ſind.

§. 47. Durch wiederholte Anwendung des so eben gezeigten Verfahrens läßt sich auch zu mehren auf einen Punct wirkenden Kräften, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, die Größe und Richtung ihrer Resultirenden durch Rechnung finden. Da dieses Problem leicht zu lösen ist, so wird es dem fleißigen Schüler zur eigenen Übung überlassen.

Nebstdem mag zur Erlangung eines schnellen Überblickes in der Lehre über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte hier noch folgende Aufgabe gelöst werden.

Aufgabe. Auf den Punct **A** (Fig 19) wirken nach den gegebenen Richtungen **AB** und **AF** zwei gegebene Kräfte P und Q; es sollen an diesem Puncte nach den gegebenen Richtungen **AC** und **AJ**, die in der Ebene der erstern Richtungen liegen, noch zwei andere Kräfte angebracht werden, welche mit den gegebenen im Gleichgewichte sind.

Lösung durch Construction. Es seien durch **AB** und **AF** die Größen und Richtungen der gegebenen Kräfte vorgestellt. Verlängert man **AB** und macht diese Verlängerung $AD = AB$, so ist (§. 31) **AD** die Resultirende der drei übrigen Kräfte. Denkt man sich ferner **AG** als die mittlere Kraft zwischen der gegebenen **AF** und der zu suchenden nach der Richtung **AC**; so muß, wenn man aus **F** zu **AC** eine Parallele zieht, der Punct **G** in dieser Parallelen liegen. Da nun auch **AD** die Resultirende zur Kraft **AG** und zu der andern zu suchenden nach der Richtung **AJ** ist; so muß, wenn man aus **D** zu **AJ** eine Parallele führt, der Punct **G** auch in dieser Parallelen liegen und sofort der Durchschnitt der auf die angezeigte Art gezogenen Parallelen **FG** und **DG** sein. Werden endlich noch durch **G** und **D** zu **AF** und **AG** die Parallelen **GE** und **DH** geführt, so sind **AE** und **AH** die beiden gesuchten Kräfte.

Lösung durch Rechnung. Setzt man $AB = AD = P$, $AF = Q$ und die zu suchenden Kräfte $AE = x$, $AH = y$, ferner die Winkel $FAE = \varphi$, $EAH = n$, $DAH = m$, so sind hiedurch die Richtungen der vier Kräfte gegen einander bestimmt. Ist endlich noch $AG = z$ und der Winkel $GAE = \omega$, so hat man mit Rücksicht der im vorigen §. abgeleiteten Formeln im Dreiecke **GAE**

$$\sin\omega = \frac{Q\sin\varphi}{z}, \quad \cos\omega = \frac{x + Q\cos\varphi}{z}$$

und im Dreiecke **DAH**

$P\sin m = z\sin(n+\omega) = z\cos\omega\sin n + z\sin\omega\cos n$ und

$y\sin m = z\sin(n-m+\omega) = z\cos\omega\sin(n-m) + z\sin\omega\cos(n-m)$.

Werden in diese beiden Gleichungen die vorhin gefundenen Ausdrücke für $\sin\omega$ und $\cos\omega$ substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$P\sin m = x\sin n + Q\sin(n+\varphi) \text{ und}$$
$$y\sin m = x\sin(n-m) + Q\sin(n+\varphi-m),$$

woraus

$$x = \frac{P\sin m - Q\sin(n+\varphi)}{\sin n} \text{ und } y = \frac{P\sin(n-m) + Q\sin\varphi}{\sin n}$$

sich ergibt.

Geht aus diesen Formeln eine der Kräfte x oder y negativ hervor, so muß sie in ihrer gegebenen Richtung von A aus entgegengesetzt aufgetragen werden.

Anmerkung. Leichter kann die Lösung der vorgelegten Aufgabe geschehen, wenn man berücksichtigt, daß des Gleichgewichtes wegen die Resultirende der gegebenen jener von den zu suchenden Kräften gleich und gerade entgegengesetzt sein muß. Sucht man demnach mittels des Kräftenparallelogramms zuerst die mittlere Kraft zu den gegebenen Kräften AF und AB, trägt dann diese in ihrer Richtung gerade entgegengesetzt auf, und sucht zu dieser als mittleren Kraft die beiden Seitenkräfte nach den gegebenen Richtungen AC und AJ, so ist die Aufgabe durch Verzeichnung gelöst. Der Anfänger mag nach dieser Construction die Lösung durch Rechnung vornehmen, und zum Vergleiche der vorigen Formeln die Winkeln φ, n, m wie vorhin anwenden.

§. 48. Um zu mehren auf einen Punct wirkenden Kräften, deren Richtungen in verschiedenen Ebenen liegen, die Resultirende durch Rechnung zu bestimmen, müssen die Winkel gegeben sein, welche je zwei dieser gegebenen Kräfte einschließen.

Bei n Kräften gibt $\frac{n(n-1)}{2}$ ihre Anzahl.

Wirken auf den Punct A (Fig. 20) drei Kräfte

$$AP' = P',\ AP'' = P'',\ AP''' = P''',$$

deren Resultirende bestimmt werden soll; so berechnet man zuerst die Resultirende $AR' = R'$ von zweien dieser Kräfte P' und P'', wofür man nach §. 46

$$(1)\quad R'^2 = P'^2 + P''^2 + 2P'P''\cos P'AP''$$

erhält, und es gibt dann das Parallelogramm $R'AP'''R''$ die Resultirende $AR'' = R''$ von R' und P''' oder von den gegebenen Kräften P', P'', P''', nemlich

$$(a)\quad R''^2 = R'^2 + P'''^2 + 2R'P'''\cos R'AP'''.$$

Um $\cos R'AP'''$ durch die bekannten Größen auszudrücken, lege man durch die Puncte P′ und P″ die auf AP‴ senkrechten, also zu einander parallelen Ebenen P′ac und P″bd, so sind auch die Geraden P′c, P″d, ac und bd auf AP‴ senkrecht und dabei ac und bd als in derselben Ebene AP‴R′ liegend zu einander parallel, so wie P′a parallel zu P″b ist, weil beide Geraden die Durchschnittslinien der parallelen Ebenen P′ac und P″db mit der Ebene P′AP′R′ sind. Da sonach die Seiten der Dreiecke P′aR′ und P″bA wechselweise parallel und überdies die gleichnamigen Seiten P′R′ und AP′ gleich sind, so hat man wegen der Congruenz dieser Dreiecke R′a = Ab und daher

$$AR' = Aa + aR' \text{ oder}$$
$$R' = Aa + Ab.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken acA, P′cA, Adb und P″dA ist

$$Ac = Aa\cos R'AP''' = AP'\cos P'AP''' \text{ und}$$
$$Ad = Ab\cos R'AP''' = AP''\cos P''AP''',$$

mithin wird durch Addition beider Gleichungen

$$\text{(b)}\quad R'\cos R'AP''' = P'\cos P'AP''' + P''\cos P''AP'''.$$

Wird dieser Ausdruck, dann jener für R'^2 aus der Gleichung (1) in (a) substituirt, so erhält man für die mittlere Kraft von P', P'', P'''

$$\text{(2)}\quad R'''^2 = P'^2 + P''^2 + P'''^2 + 2P'P''\cos P'AP'' + 2P'P'''\cos P'AP''' + 2P''P'''\cos P''AP'''.$$

Zur Bestimmung der Richtung dieser Resultirenden ergibt sich aus dem Dreiecke R′AP″ der Winkel R′AP″ oder sofort auch R′AP′ und aus dem Dreiecke R″AR′ der Winkel R″AR′, nemlich

$$\cos R'AP'' = \frac{P''^2 + R'^2 - P'^2}{2P''R'} = \frac{P'' + P'\cos P'AP''}{R'}, \text{ und analog}$$

$$\cos R''AR' = \frac{R' + P'''\cos P'''AR'}{R''}.$$

Will man aber die Richtung der Resultirenden durch jene der Componenten unmittelbar bestimmen, so muß man die Winkel R″AP′, R″AP″, R″AP‴, die wir der Ordnung nach durch α, β, γ bezeichnen, suchen. Denkt man sich zu diesem Ende die Gerade R″P′ gezogen und berücksichtigt, daß R′R″ = P‴, R′P′ = P″ und der Winkel R″R′P′ das Supplement von P″AP‴ ist; so hat man im Dreiecke R″R′P′

$$R''P'^2 = P''^2 + P'''^2 + 2P''P'''\cos P''AP'''$$

und im Dreiecke R″AP′

$$R''P'^2 = R''^2 + P'^2 - 2R''P'\cos R''AP',$$

also durch Vergleichung beider Ausdrücke, wenn man zugleich für R''^2 seinen Werth setzt,

$$(3)\quad \cos\alpha = \frac{P' + P''\cos\ P'AP'' + P'''\cos\ P'AP'''}{R''}$$

und daraus durch Analogie

$$(3)\quad \cos\beta = \frac{P'' + P'\cos\ P''AP' + P'''\cos\ P''AP'''}{R''},$$

$$(3)\quad \cos\gamma = \frac{P''' + P'\cos\ P'''AP' + P''\cos\ P'''AP''}{R''}.$$

Nimmt man zu den vorigen drei Kräften eine vierte Kraft hinzu, so bedarf man zur Bestimmung der mittleren Kraft von den vier Kräften P', P'', P''', P^{IV}, die wir R''' nennen wollen, keiner ferneren Construction, sondern wir vermögen das Nöthige durch Analogie aus den bereits erhaltenen Formeln abzuleiten.

Da nemlich R''' auch die Resultirende von R'' und P^{IV} ist, so hat man erstlich

$$(c)\quad R'''^2 = R''^2 + P^{IV\,2} + 2R''P^{IV}\cos R''AP^{IV}.$$

Betrachtet man jetzt die Gleichung (b), welche die Relation der drei Kräfte P', P'', R' mit den Winkeln derselben gegen eine vierte Kraft P''' ausdrückt und wobei R' die Resultirende von P', P'' ist; so kann man dieselben Relationen sowohl zwischen den Kräften R', P''', R'' und ihren Winkeln mit P^{IV}, als auch zwischen den Kräften P', P'', R' und ihren Winkeln mit P^{IV} aufstellen, wo auch in beiden Fällen die dritte Kraft die Resultirende der beiden andern ist.

Nach diesem ist also

$$R''\cos R''AP^{IV} = R'\cos R'AP^{IV} + P'''\cos P'''AP^{IV} \text{ und}$$
$$R'\cos R'AP^{IV} = P'\cos P'AP^{IV} + P''\cos P''AP^{IV};$$

folglich wird, wenn man beide Gleichungen addirt,

$$R''\cos R''AP^{IV} = P'\cos P'AP^{IV} + P''\cos P''AP^{IV} + P'''\cos P'''AP^{IV}.$$

Die Substitution des letztern Ausdruckes und des von R'''^2 aus Formel (2) in die Gleichung (c), gibt für die gesuchte Resultirende R''' der Componenten P', P'', P''', P^{IV} den Ausdruck

$$(4)\quad R'''^2 = P'^2 + P''^2 + P'''^2 + P^{IV\,2} + 2P'P''\cos P'AP'' + 2P'P'''\cos P'AP'''$$
$$+ 2P'P^{IV}\cos P'AP^{IV} + 2P''P'''\cos P''AP''' + 2P''P^{IV}\cos P''AP^{IV}$$
$$+ 2P'''P^{IV}\cos P'''AP^{IV}.$$

Aus dem Gange dieser Rechnungen, welche der Anfänger zu mehrer Übung auch mittels der sphärischen Trigonometrie vorzunehmen gut thun wird, ist zu ersehen, daß für die Größe der Resultirenden von fünf und mehren Kräften ähnliche Ausdrücke, wie sie die Formeln (1), (2) und (4) für die Resultirende von zwei, drei und vier Kräften darbieten, sich ergeben und daraus der Satz hervorgeht: das Quadrat der Resultiren-

den von mehren auf einen Punct nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften, — diese Richtungen mögen in einer Ebene liegen oder nicht, — besteht aus der Summe der Quadrate aller Kräfte, vermehrt um die doppelten Producte aus je zwei Kräften in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Was die Bestimmung der Richtung der Resultirenden von vier und mehren Kräften betrifft, so könnten wir ähnliche Formeln wie die (3) ableiten. Allein, wie man sieht, muß man dabei mit der Zunahme der Anzahl Kräfte auf immer verwickeltere Formeln kommen, die dann nicht einmal bequem für die practischen Berechnungen sind. Wir werden daher im Folgenden dasjenige allgemeine und einfache Verfahren bei der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte anwenden, welches gegenwärtig fast in allen neuern Schriften über Mechanik in Anwendung ist.

Dritter Abschnitt.

Fortsetzung über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, welche auf denselben Punct nach verschiedenen Richtungen wirken.

§. 49. Der einfachste Fall für die Zerlegung einer Kraft in zwei oder drei Seitenkräfte nach verschiedenen Richtungen ist der, wenn diese Richtungen auf einander senkrecht sind. Und umgekehrt ist der einfachste Fall bei der Zusammensetzung von zwei und drei Kräften, die auf einen Punct nach verschiedenen Richtungen wirken, in eine Resultirende eben auch der, wenn jene gegebenen Kräfte unter sich rechte Winkel einschließen.

Alles dieses geben auch die Formeln §. 46 und §. 48 für die Annahme, daß die von den Seitenkräften eingeschlossenen Winkel $= 90°$, also diese Kräfte auf einander senkrecht sind.

Da diese zwei Fälle in der Folge der Zusammensetzung und Zerlegung von noch so vielen Kräften zur Grundlage dienen werden, so wollen wir dieselben vollständig erörtern.

§. 50. Soll die auf den Punct **M** (Fig. 21) wirkende Kraft $\mathbf{MR}=R$ nach den auf einander senkrechten Richtungen **MP** und **MP′**, zwischen denen die Richtung **MR** liegt, in zwei Kräfte zerlegt werden, die denselben Angriffspunct **M** haben; so erhält man nach dem Vorhergehenden durch das über **MR** und den rechten Winkel **PMP′** verzeichnete Parallelogramm (Rechteck) **MPRP′** die Seitenkräfte **MP** und **MP′**. Setzt man $\mathbf{MP}=P$, $\mathbf{MP'}=P'$, und bezeichnet die Winkel **RMP**, **RMP′**, welche die Mittelkraft R mit den gegebenen Richtungen der Seitenkräfte einschließt, durch α, β; so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke **MPR**

$$(1) \qquad P = R\cos\alpha, \quad P' = R\cos\beta.$$

Da nach der Construction **RP** auf **MP** und **RP′** auf **MP′** senkrecht ist, so ist jede Seitenkraft die Projection der mittlern Kraft auf die Richtung der erstern, und aus den beiden Formeln geht hervor, daß jede Seitenkraft dem Producte der mittlern in den Cosinus des Winkels, den diese beiden Kräfte bilden, gleich ist.

Die Gleichungen (1) genügen auch, wenn die Richtung der zu zerlegenden Kraft R in Beziehung auf die positiven Halbaxen eines rechtwinkligen Coordinatensystems gegeben ist. Denn setzt man voraus, daß MP und MP′ im Sinne dieser Halbaxen gezogen sind, so hat man, wenn die Winkel α und β von ihnen aus beiderseits bis 180° gerechnet werden, (nach §. 17. I)

für die Richtung MR von R $\cos\alpha$ positiv, $\cos\beta$ positiv,
„ „ „ MR′ „ R $\cos\alpha$ negativ, $\cos\beta$ positiv,
„ „ „ MR″ „ R $\cos\alpha$ negativ, $\cos\beta$ negativ und
„ „ „ MR‴ „ R $\cos\alpha$ positiv, $\cos\beta$ negativ;

da aber auch, wenn man die nach MP und MP′ wirkenden Seitenkräfte als positiv, sofort die gerade entgegengesetzten nach Mp und Mp′ als negativ (§. 17. Anmerk., dann §§. 33 und 34) nimmt,

für die Richtung MR von R P positiv, P' positiv,
„ „ „ MR′ „ R P negativ, P' positiv,
„ „ „ MR″ „ R P negativ, P' negativ und
„ „ „ MR‴ „ R P positiv, P' negativ wird, so folgt hieraus die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung und man erkennt zugleich, daß die Zeichen von P und P' beziehungsweise mit jenen von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ in allen Fällen übereinstimmen.

§. 51. Sind umgekehrt die Kräfte $MP = P$ und $MP' = P'$ gegeben, welche auf den Punct M unter einem rechten Winkel wirken und soll zu denselben die mittlere Kraft gesucht werden; so gibt die Diagonale MR des über PMP′ verzeichneten Rechteckes PMP′R die gesuchte mittlere Kraft MR. Bezeichnen wir diese mit R, so ist aus dem rechtwinkligen Dreiecke RPM

$$(2)\quad R^2 = P^2 + P'^2, \text{ oder } R = \sqrt{P^2 + P'^2},$$

wobei die Quadratwurzel oder R immer positiv zu nehmen ist. Ferner erhält man für die Richtung von R gegen die bekannten Richtungen von P und P', oder für die Winkel $PMR = \alpha$, $P'MR = \beta$ aus demselben Dreiecke

$$(3)\quad \cos\alpha = \frac{P}{R},\quad \cos\beta = \frac{P'}{R}.$$

Die Formeln (2) und (3) folgen auch aus denen (1), wenn man

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$$

(§. 17. I) zur Bestimmung der erstern aus ihnen berücksichtigt.

Hat man die auf einander senkrechten Richtungen von P und P' ohne Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so braucht man zur Bestimmung der Richtung ihrer Resultirenden R blos eine der Formeln (3),

nemlich blos einen der Winkel α oder β, weil diesfalls die Bedingung aushilft, daß die gesuchte Richtung zwischen den Richtungen von P und P' liegen muß und daher $\alpha+\beta=90°$ ist. Beziehen sich aber die Richtungen von P und P' auf die positiven Halbaxen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, zu denen sie parallel, entweder in dem Sinne dieser Axen wie MP und MP', oder entgegengesetzt wie Mp und Mp' sind, und wird angenommen, daß P und P' positiv oder negativ in die Rechnung kommen, je nachdem erstere Kraft nach MP oder Mp und letztere nach MP' oder Mp' wirkt; so wird dadurch die Richtung von R, da sie zwischen den Richtungen von P und P' liegt, jede Lage gegen die positiven Halbaxen erhalten können, welche Lage jedoch, da nach vorigem §. die Kräfte P und P' mit $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ in allen Fällen gleiche Zeichen haben, jederzeit bei gehöriger Annahme dieser Vorzeichen nach den Gl. (3) bestimmt in Bezug auf die positiven Halbaxen angegeben wird.

§. 52. Um sogleich eine Anwendung von den Ergebnissen der beiden vorhergehenden §en zu zeigen, wollen wir die Größe und Richtung der Resultirenden von noch so vielen auf einen Punct wirkenden Kräften, deren Richtungen jedoch in der nemlichen Ebene liegen, bestimmen.

Es seien P, P', P'', P''', ... (Fig. 22) diese Kräfte, die den Punct O zum Angriffspuncte haben und deren Richtungen OP, OP', OP'', OP''', ... in derselben Ebene liegen. Zieht man durch O in dieser Ebene willkürlich zwei sich rechtwinklig schneidende Axen XX', YY', bestimmt (nach §. 17. I) die Winkel, welche die Richtung einer jeden Kraft mit den für positiv angenommenen Halbaxen OX, OY einschließt, bezeichnet diese Winkel für P mit α, β, für P' mit α', β', für P'' mit α'', β'', u. s. w. und zerlegt jede Kraft in zwei auf einander senkrechte, zu den Axen parallele Seitenkräfte; so erhält man nach der Axe der x die Seitenkräfte

$$P\cos\alpha,\ P'\cos\alpha',\ P''\cos\alpha'',\ldots$$

und nach der Axe der y die Seitenkräfte

$$P\cos\beta,\ P'\cos\beta',\ P''\cos\beta'',\ \ldots,$$

wovon, je nach den positiven oder negativen Zeichen der Cosinus, die Richtungen der Seitenkräfte der ersten Reihe nach OX oder OX' und die der Seitenkräfte der zweiten Reihe nach OY oder OY' anzunehmen sind (§.50).*)

*) Nach den Winkeln α, α', α'', ... β, β', β'', ... in der Figur würden $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P^{v}\cos\alpha^{v}$, $P^{vi}\cos\alpha^{vi}$ und $P\cos\beta$, $P'\cos\beta'$, $P''\cos\beta''$ positiv, daher respective nach OX und OY gerichtet sein, während $P''\cos\alpha''$, $P'''\cos\alpha'''$, $P^{iv}\cos\alpha^{iv}$ und $P''\cos\beta''$, $P^{iv}\cos\beta^{iv}$, $P^{v}\cos\beta^{v}$, $P^{vi}\cos\beta^{vi}$ negativ, sofort jenen Kräften entgegengesetzt, nach OX' und OY' gerichtet sein würden.

Nennt man nun X die Resultirende der nach der Axe der x, und Y jene der nach der Axe der y wirkenden Seitenkräfte, so ist (§. 34)

$$(4)\quad \begin{cases} X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots, \\ Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots, \end{cases}$$

wobei der rechts stehende Theil jeder Gleichung die algebraische Summe vorstellt, indem jedes Glied das Zeichen seines Cosinus erhält.

Wird ferner mit R die Resultirende der Kräfte X, Y bezeichnet, die sofort auch die Resultirende der gegebenen Kräfte P, P', P'', . . . ist, und sind a, b die Winkel von R mit den positiven Halbaxen OX, OY, so hat man (vorig. §.)

$$(5)\quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{und}$$

$$(6)\quad \cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}.$$

Das Zeichen von X bestimmt jenes von $\cos a$ und das von Y jenes von $\cos b$.

Setzt man in die Gleichung (5) für X und Y ihre Werthe aus den Gleichungen (4), macht ihre Quadrate und berücksichtigt die Gleichungen (1) §. 17 und §. 18)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1, \quad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' = 1, \text{ u. s. w.}$$
$$\cos POP' = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta',$$
$$\cos POP' = \cos\alpha.\cos\alpha'' + \cos\beta.\cos\beta'', \text{ u. s. w.}$$

so erhält man für R den Ausdruck

$$R = \sqrt{(P^2 + P'^2 + P'^2 + \ldots + 2PP''\cos POP' + 2PP''\cos POP'' + \ldots + 2P'P''\cos P'OP'' + \ldots)},$$

welcher hier in seiner Allgemeinheit den im §. 48 durch Induction abgeleiteten Satz ausspricht.

§. 53. Sind die auf den Punct O in einer Ebene wirkenden Kräfte $P, P', P'', P''', \ldots$ im Gleichgewichte, sofort ihre Resultirende $R=0$ (§. 31), so müssen zugleich auch $X=0$ und $Y=0$ sein; weil nur unter dieser Voraussetzung die Gleichung $X^2 + Y^2 = 0$ bestehen kann. Demnach hat man für das Gleichgewicht der Kräfte P, P', P'', P''', . . . die beiden Bedingungsgleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0, \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0. \end{cases}$$

Wäre blos $X=0$, oder $P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0$, so sind die nach OX und OX′ sich entgegengesetzten Kräfte im Gleichgewichte und die Resultirende der Kräfte P, P', P'', . . . ist diesfalls $R = Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots$ und nach OY oder OY′ gerichtet, je nachdem hiebei Y positiv oder negativ ausfällt. Eben so ist $R = X$ für $Y = 0$ nach OX oder OX′ gerichtet.

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (7) läßt sich die Aufgabe §. 47, wo die Kräfte P, Q, x, y im Gleichgewichte sein sollen und die beiden letztern aus den beiden ersten und den bekannten Richtungen aller zu bestimmen sind, leichter lösen. Denn man braucht blos durch den gemeinschaftlichen Angriffspunct **A** (Fig. 19) willkürlich zwei auf einander rechtwinklige Axen zu ziehen, wozu der Einfachheit wegen **AJ** für die eine und die darauf Senkrechte **AK** für die andere positive Halbaxe angenommen werden kann. Mit diesen Halbaxen schließen die Kräfte y, x, Q, P folgende Winkel ein:

mit **AJ** 0, n, $n+\varphi$, $180°-m$,
„ **AK** $90°$, $90°-n$, $n+\varphi-90°$, $90°+m$.

Multiplicirt man diese Kräfte der Ordnung nach vermöge Gl. (7) mit den Cosinus dieser Winkel, so hat man

$$y+x\cos n+Q\cos(n+\varphi)-P\cos m=0 \quad \text{und}$$
$$x\sin n+Q\sin(n+\varphi)-P\sin m=0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$x=\frac{P\sin m-Q\sin(n+\varphi)}{\sin n}$$

und durch Elimination von x aus der ersten Gleichung

$$y=\frac{P\sin(n-m)+Q\sin\varphi}{\sin n},$$

wie in §. 47.

§. 54. Wenden wir uns zu dem zweiten einfachsten Falle, nemlich eine Kraft in drei auf einander senkrechte Kräfte zu zerlegen, und umgekehrt drei auf einen Punct gegenseitig senkrecht wirkende Kräfte in eine mittlere Kraft zusammenzusetzen.

Ist $\mathbf{MR}=R$ (Fig. 23) die auf den Punct **M** wirkende Kraft, welche nach den Richtungen **MP**, **MP′**, **MP″**, von denen jede auf der Ebene der beiden andern senkrecht ist, in die Kräfte P, P', P'' zerlegt werden soll; so muß die Richtung **MR** (§. 44. b) zwischen jenen gegebenen Richtungen, d. i. innerhalb des von denselben gebildeten körperlichen Winkels liegen und gegen diese Richtungen bestimmt sein, wozu die Winkel $\mathbf{RMP}=\alpha$, $\mathbf{RMP'}=\beta$, $\mathbf{RMP''}=\gamma$ vollkommen genügen (§. 17. II).

Legt man, dieses angenommen, durch R zu den Ebenen **P′MP″**, **PMP″**, **PMP′** die parallelen Ebenen **PR**, **P′R**, **P″R**, so ergibt sich ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Seiten **MP**, **MP′**, **MP″** die gesuchten Seitenkräfte sind.

Diese Kräfte sind die Projectionen von **MR** auf die gegebenen Richtungen und man hat, wenn $\mathbf{MP}=P$, $\mathbf{MP'}=P'$, $\mathbf{MP''}=P''$ gesetzt wird, zur Bestimmung derselben die Formeln

(1) $\quad P=R\cos\alpha,\ P'=R\cos\beta,\ P''=R\cos\gamma.$

Ist aber die Richtung der zu zerlegenden Kraft R gegen die positiven Halbaxen eines rechtwinkligen Coordinatensystems durch die Winkel α, β, γ

bestimmt, wobei diese Winkel nach §. 17. II gerechnet werden und sind MP, MP′, MP″ zu jenen Halbaxen parallel, so werden die gesuchten Seitenkräfte P, P', P'' nicht immer jene Richtungen haben, sondern P wird nach MP oder Mp, P' nach MP′ oder Mp′, P'' nach MP″ oder Mp″ wirken können. Nimmt man jede Kraft in der ersten Richtung für positiv, mithin in der andern entgegengesetzten für negativ, so ergibt sich nach den verschiedenen Richtungen von R innerhalb der um den Angriffspunct M befindlichen acht körperlichen Winkel für die Grenzen der Winkel α, β, γ und die Zeichen ihrer Cosinus nebst denen der gesuchten Seitenkräfte, da sie immer R zwischen sich enthalten, nachstehendes Schema:

für R in dem körperl. Winkel	Vorzeichen von			Grenzen von			Vorzeichen von		
	P,	P',	P'',	α,	β,	γ,	$\cos\alpha$,	$\cos\beta$,	$\cos\gamma$,
PMP′P″	+,	+,	+,	$<90°$,	$<90°$,	$<90°$	+,	+,	+,
pMP′P″	−,	+,	+,	$>90°$,	$<90°$,	$<90°$	−,	+,	+,
pMp′P″	−,	−,	+,	$>90°$,	$>90°$,	$<90°$	−,	−,	+,
PMp′P″	+,	−,	+,	$<90°$,	$>90°$,	$<90°$	+,	−,	+,
PMP′p″	+,	+,	−,	$<90°$,	$<90°$,	$>90°$	+,	+,	−,
pMP′p″	−,	+,	−,	$>90°$,	$<90°$,	$>90°$	−,	+,	−,
pMp′p″	−,	−,	−,	$>90°$,	$>90°$,	$>90°$	−,	−,	−,
PMp′p″	+,	−,	−,	$<90°$,	$>90°$,	$>90°$	+,	−,	−.

Da also nach dieser Darstellung die Zeichen der Cosinus von α, β, γ jedesmal mit den Zeichen der Seitenkräfte P, P', P'', genau übereinstimmen, so werden diese Kräfte der Größe und Richtung nach durch die Formeln (1) für jede Lage von R gegen die positiven Halbaxen richtig bestimmt.

§. 55. Ist die Resultirende von drei auf den Punct M rechtwinklig wirkenden Kräften $MP = P$, $MP' = P'$, $MP'' = P''$ zu bestimmen, so ist diese die aus M gezogene Diagonale MR des über jene Kräfte construirten Parallelepipedes (§. 43). Setzt man diese Resultirende $MR = R$ und die Winkel mit den gegebenen Richtungen $PMR = \alpha$, $P'MR = \beta$, $P''MR = \gamma$; so ergibt sich durch die Summe der Quadrate der Gleichungen (1) §. 54 mit Rücksicht auf

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (\text{§. 17. II})$$

$$(2) \qquad R = \sqrt{P^2 + P'^2 + P''^2},$$

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{P}{R}, \quad \cos\beta = \frac{P'}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{P''}{R},$$

wo man aus der Formel (2), deren Quadratwurzel stets positiv zu nehmen ist, die Größe der Resultirenden R, und aus den Formeln (3) die Winkel α, β, γ für die Richtung der Resultirenden gegen die gegebenen Seitenkräfte erhält.

Nimmt man wieder die gegebenen Kräfte P, P', P'' für positiv, wenn sie respective nach MP, MP', MP'' parallel zu den positiven Halbaxen wirken, daher für negativ, wenn sie die entgegengesetzten Richtungen nach Mp, Mp', Mp'' haben und berücksichtigt, daß in den Formeln (3) $\cos\alpha$ das Zeichen von P, $\cos\beta$ das von P', $\cos\gamma$ jenes von P'' erhält, was mit der Darstellung im vorigen §. übereinkommt; so ist klar, daß durch jene Formeln die Größen der Winkel α, β, γ, somit auch die Richtung der gesuchten Resultirenden R in irgend welchem der um den Punct M liegenden acht körperlichen Winkel genau angegeben werden.

§. 56. Durch das in den beiden vorigen §en erläuterte Verfahren läßt sich leicht zu noch so vielen auf einen Punct O (Fig. 24) wirkenden Kräften P, P', P'', ... deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, die Resultirende finden. Man ziehe diesfalls durch den gemeinschaftlichen Angriffspunct O willkürlich drei sich rechtwinklig schneidende Axen und bestimme die Winkel, welche jede gegebene Kraft mit den positiven Halbaxen OX, OY, OZ (nach §. 17. II) einschließt. Sind α, β, γ diese Winkel für P, α', β', γ' für P', α'', β'', γ'' für P'', u. s. w. und zerlegt man jede der Kräfte nach den Richtungen der drei angenommenen Axen; so erhält man (§. 54)

nach der Axe der x die Seitenkräfte $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$, ...
" " " " y " " " $P\cos\beta$, $P'\cos\beta'$, $P''\cos\beta''$, ...
" " " " z " " " $P\cos\gamma$, $P'\cos\gamma'$, $P''\cos\gamma''$, ...

wovon, je nach den Zeichen der Cosinus, die einen dieser Kräfte positiv, die andern negativ sind und dabei die positiven oder negativen Kräfte der ersten Reihe nach OX oder OX', die der zweiten Reihe nach OY oder OY', endlich die Kräfte der dritten Reihe nach OZ oder OZ' wirken.

Bezeichnet man die Resultirende jeder Reihe von Kräften der Ordnung nach mit X, Y, Z, so hat man (§. 34)

$$(4)\quad \begin{cases} X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots. \\ Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots. \\ Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots., \end{cases}$$

wo jede Summe algebraisch d. i. jedes Glied mit seinem durch den Cosinus erhaltenen Zeichen zu nehmen ist. Je nachdem daraus X, Y, Z positiv oder negativ hervorgeht, ist X nach OX oder OX', Y nach OY oder OY', Z nach OZ oder OZ' gerichtet.

Da nun die gegebenen Kräfte $P, P', P'', \ldots$ durch jene rechtwinklig wirkenden X, Y, Z ersetzt sind, daher die Resultirende der letztern auch die der erstern ist, so wird, wenn man diese Resultirende mit R und die von ihr mit OX, OY, OZ eingeschlossenen Winkel mit a, b, c bezeichnet,

$$(5) \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$(6) \qquad \cos a = \frac{X}{R}, \cos b = \frac{Y}{R}, \cos c = \frac{Z}{R}.$$

In den Formeln (6) gibt das Zeichen des Zählers jenes des betreffenden Cosinus und somit auch zu erkennen, ob der dazu gehörige spitze Winkel oder dessen Supplement auf 180° zu nehmen sei. Es bestimmen sonach die Winkel a, b, c die Richtung von R gegen die positiven Halbaxen OX, OY, OZ.

Setzt man die Ausdrücke für X, Y, Z aus (4) in (5) und nimmt nach ausgeführtem Quadriren auf die Gleichung (3) §. 17 und Gleichung (2) §. 18 Rücksicht; so erhält man für R einen Ausdruck in $P, P', P'', \ldots$ und den Cosinus der Winkel, welche von je zweien dieser Kräfte eingeschlossen werden, wodurch der Satz §. 48 abermals gerechtfertigt ist. Der Anfänger kann die hier nöthigen Rechnungen leicht ausführen.

§. 57. Halten sich die Kräfte $P, P', P'', \ldots$ die auf einen Punct nach was immer für Richtungen wirken, im Gleichgewicht, so muß die Resultirende der nach jeder der drei Axen wirkenden Kräfte Null sein, d. i.

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = 0$$

stattfinden, was übrigens auch aus der Formel (5) für $R = 0$ fließt. Demnach müssen für das Gleichgewicht jener Kräfte stets die drei Bedingungsgleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0, \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0, \\ P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = 0 \end{cases}$$

zugleich bestehen.

Wird $X = 0$, oder $Y = 0$, oder $Z = 0$, so wird im ersten Falle die Resultirende $R = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ und in der Ebene yz liegen, im zweiten Falle $R = \sqrt{X^2 + Z^2}$ und ihre Richtung in der Ebene xz haben u. s. w.

Endlich wird für $X = 0$ und $Y = 0$, oder $X = 0$ und $Z = 0$, oder $Y = 0$ und $Z = 0$, respective die Resultirende $R = Z$, oder $= Y$, oder $= X$, und je nachdem sie positiv oder negativ ausfällt, im ersten Falle nach OZ oder OZ', im zweiten nach OY oder OY', im dritten nach OX oder OX' wirken.

Vierter Abschnitt.

Von den Kräften, welche auf ein System von unveränderlich mit einander verbundenen Puncten nach parallelen Richtungen wirken und von den statischen Momenten.

§. 58. Betrachten wir zuerst als den einfachsten Fall zwei Kräfte P und Q (Fig. 25. a und b), welche auf zwei mit einander fest verbundene Puncte A und B zu einander parallel, entweder in einerlei (Fig. 25. a) oder im entgegengesetzten Sinne (Fig. 25. b) wirken (Anmerk. §. 17).

Da die Puncte A und B weder einander genähert noch von einander entfernt werden können, also die Kräfte wie auf eine feste unschwere Linie wirkend anzunehmen sind; so wird in der Wirkung der betrachteten beiden Kräfte P und Q nichts geändert, wenn man in ihren Angriffspuncten A und B zwei gleiche, in der Linie AB gerade entgegengesetzt wirkende Kräfte S und T anbringt, dann die Kräfte S und P in die mittlere Kraft U, T und Q in V zusammensetzt. Man hat demnach statt der gegebenen Kräfte P und Q die ihnen gleich wirkenden U und V.

Da (Fig. 25. a) AP zu BQ parallel, also $UAB+VBA>180^\circ$ ist, so müssen sich die Richtungen UA und VB in irgend einem Puncte D durchschneiden. Dagegen findet (Fig. 25. b) nur dann ein Durchschnitt der Richtungen UA und VB statt, wenn P und Q ungleich sind; denn für $P=Q$ sind die beiden Dreiecke BTV und UPA congruent, daher der Winkel $VBT=AUP$, sofort BV parallel zu UA. Sind aber Q und P verschieden, was wir hier annehmen wollen, z. B. $Q>P$, so läßt sich leicht nachweisen, daß der Winkel $VBT>AUP=DAB$ ist und sich sonach UA und BV in einem Puncte D durchschneiden müssen.

Versetzt man nun die Kräfte U und V nach ihren respectiven Richtungen in ihren Durchschnittspunct D, wodurch wegen der Unveränderlichkeit dieses Punctes gegen A und B in dem bestimmten Dreiecke ADB die Wirkung dieser Kräfte unverändert bleibt (§. 28) und zerlegt hier jede derselben in zwei Seitenkräfte, nemlich $U=DU'$ in die Kräfte $DS'=S$

und $DP' = P'$ parallel zu AS und AP, $V = DV'$ in die zu BT und BQ parallelen Kräfte $DT' = T'$ und $DQ' = Q'$; so sieht man leicht aus der Gleichheit der Parallelogramme $DP'U'S' = APUS$ und $DQ'V'T' = BQVT$, daß $S' = S$, $T' = T$, $P' = P$, $Q' = Q$ ist.

Der Voraussetzung wegen ist aber $S = T$, mithin auch $S' = T'$, und weil letztere Kräfte gerade entgegengesetzt, sofort im Gleichgewichte sind, so vertreten die Kräfte P' und Q' die Wirkung der Kräfte P und Q, und haben daher mit diesen dieselbe Resultirende. Nennen wir letztere R, so hat man, wenn P und Q in demselben Sinne parallel sind (Fig. 25. a), also P' und Q' nach einerlei Richtung wirken (§. 32),

$$R = P' + Q' = P + Q$$

und wenn P und Q (Fig. 25. b) parallel entgegengesetzt, also P' und Q' gerade entgegengesetzt sind,

$$R = Q' - P' = Q - P \text{ für } Q > P;$$

d. h. die Resultirende von zwei parallelen Kräften gleicht der Summe oder Differenz dieser Kräfte, je nachdem diese in einerlei oder in entgegengesetztem Sinne wirken; und dabei ist die Richtung der Resultirenden im ersten Falle zwischen den Richtungen der Componenten und in demselben Sinne, im zweiten Falle außer jenen Richtungen im Sinne der größern Componente und dieser näher als der kleineren.

§. 59. Verlängert man die Richtung der Resultirenden R, bis sie die Verbindungslinie AB der Angriffspuncte von P und Q in C durchschneidet, so ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken UAP und ADC, VBQ und BDC

$$UP : AP = AC : CD, \text{ oder } S : P = AC : CD,$$
$$BQ : QV = DC : CB, \text{ „ } Q : T = DC : CB,$$

und daraus wegen $S = T$

$$Q : P = AC : CB; \quad (A)$$

d. h. zwei parallele Kräfte P und Q verhalten sich zu einander wie umgekehrt die Abstände ihrer Angriffspuncte von dem Durchschnittspuncte C der Resultirenden mit der Verbindungslinie AB jener Angriffspuncte.

Der Angriffspunct der Resultirenden kann dabei in ihrer Richtung wo immer angenommen werden. Wird aber dafür ihr Durchschnittspunct C in der Geraden AB beibehalten und bringt man die parallelen Kräfte um ihre Angriffspuncte in was immer für parallele Lagen, jedoch so, daß sie in ihren neuen Richtungen wie Ap, Bq, Cr in dem vorigen gegen sei-

tigen Sinne wirken, so ändert sich hiedurch weder die Größe der Resultirenden noch die Proportion (A). Man nennt deswegen auch den Angriffspunct C der Resultirenden in der Verbindungslinie der Angriffspuncte A und B den Mittelpunct der parallelen Kräfte P und Q.

Aus der Proportion (A) folgen durch übereinstimmende Addition und Subtraction, wenn man $Q \pm P = R$ setzt, wo für das obere Zeichen P und Q (Fig. 25. a) in einerlei, für das untere Zeichen (Fig. 25. b) im entgegengesetzten Sinne wirken, die Proportionen:

$$\left.\begin{array}{l} Q : Q \pm P = AC : AC \pm CB \text{ oder } Q : R = AC : AB \\ P : Q \pm P = BC : AC \pm CB \quad „ \quad P : R = BC : AB \end{array}\right\} \quad (B)$$

und durch Vergleichung mit der Proportion (A) folgt allgemein

$$P : Q : R = BC : CA : AB \quad (C).$$

Da überdies, wenn man die Richtungen der parallelen Kräfte durch irgend eine willkürliche Gerade ab in den Puncten a, b, c durchschneidet, die Proportion

$$BC : CA : AB = bc : ca : ab$$

stattfindet, so hat man auch

$$P : Q : R = BC : CA : AB = bc : ca : ab;$$

d. h. wenn man die Richtungen von drei parallelen Kräften, wovon eine die Resultirende der beiden andern ist, durch irgend eine Gerade schneidet, so verhalten sich die Kräfte, wie die Abstände der Durchschnittspuncte von den Richtungen der beiden andern Kräfte auf dieser Geraden, oder wie die Abstände der Angriffspuncte der beiden andern Kräfte.

Sind drei von den Größen P, Q, R, BC, CA, AB gegeben, worunter wenigstens eine Kraft und wenigstens ein Abstand sein muß, so kann man bei der Voraussetzung, ob P und Q parallel in einerlei oder entgegengesetztem Sinne wirken sollen, jederzeit die übrigen drei Größen bestimmen, womit sich der Anfänger beschäftigen mag.

Anmerkung. Wenn zwei Kräfte zu einander parallel wirken, so wird von ihnen nebst der fortschreitenden, meist auch eine drehende Bewegung hervorgebracht. Da eine Kraft allein (hier die Resultirende) blos erstere Bewegung hervorzubringen vermag (§. 7), so wird die Resultirende und ihre Richtung hier in dem Sinne verstanden, daß sie, nach gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, jenen parallelen Componenten das Gleichgewicht hält. Daraus folgt dann auch, daß bei der Befestigung irgend eines Punctes in der Richtung der Resultirenden, ohne dadurch die Beweglichkeit des Systems um den befestigten Punct zu hemmen, die beiden Componenten nicht vermö-

gend sind, eine Bewegung um diesen Punct hervorzubringen. Sie sind nemlich diesfalls unter sich im Gleichgewichte und bleiben es in jeder parallelen Lage, wenn der befestigte Punct zugleich ihr Mittelpunct ist.

§. 60. Wir haben (§. 58) bemerkt, daß zwei parallel entgegengesetzte Kräfte P und Q (Fig. 25. b) verschieden sein müssen, wenn die aus den daselbst gemachten Annahmen hervorgehenden Kräfte U und V sich durchschneiden sollen. Demnach erheischet der Fall $P = Q$ oder $R = P - Q = 0$ eine eigene Untersuchung, wozu uns die aus den Proportionen (B) gebildeten Gleichungen

$$AC \,.\, R = AB \,.\, Q,$$
$$BC \,.\, R = AB \,.\, P$$

dienlich sein werden. Denn setzt man in diesen Gleichungen $P = Q$ oder $R = 0$; so können hier zwei Fälle eintreten.

1) Entweder ist nebst $R = 0$ auch $AB = 0$, in welchem Falle beiden Gleichungen Genüge geleistet wird, und dabei wegen $AB = 0$ die beiden gleichen entgegengesetzten Kräfte denselben Angriffspunct haben und sofort im Gleichgewichte sind.

2) Oder es ist AB von Null verschieden; da hiedurch aus diesen Gleichungen wegen $R = 0$, die Abstände dieser Null gewordenen Resultirenden

$$AC = \frac{AB \,.\, Q}{0}, \quad BC = \frac{AB \,.\, P}{0}$$

unendlich groß hervorgehen; so zeigt dieser Widerspruch, daß zu zwei gleichen, parallel entgegengesetzten Kräften keine Resultirende möglich ist, und daß sie sofort durch eine einzige Kraft nicht in Gleichgewicht gebracht werden können.

Solche zwei gleiche, parallel entgegengesetzte Kräfte nennen manche Schriftsteller ein Kräftenpaar. Es bringt wesentlich eine drehende Bewegung in der Ebene seiner Kräfte hervor.

A. Von den statischen Momenten, auf einen Punct bezogen.

§. 61. Wenn man aus irgend einem angenommenen Puncte auf die Richtung einer Kraft eine Senkrechte fällt, so nennt man das Product der Kraft in den Abstand derselben von dem angenommenen Puncte das statische Moment der Kraft in Bezug auf diesen Punct, oder wo keine

Zweideutigkeit zu besorgen ist, auch blos das Moment der Kraft, der Punct aber, worauf sich die Momente beziehen, heißt Momentenpunct.

§. 62. Durchschneidet man die Richtungen der parallelen Kräfte P, Q, R (Fig. 26. a und b) durch eine willkürliche Gerade GN, die aber hier senkrecht auf jene Richtungen sein soll und ist R die Resultirende der beiden andern Kräfte, so hat man vermöge §. 59

$$P : Q = bc : ca \quad \text{oder}$$
$$Q.bc = P.ca. \qquad (A)$$

Wird nun in der Geraden GN der Punct M als Momentenpunct angenommen und setzt man in (A) statt bc und ca die Abstände Ma, Mb, Mc der Kräfte P, Q, R von dem Momentenpuncte M; so hat man

Fig. 26. a für $P+Q=R$,

$$Q(Mc-Mb)=P(Ma-Mc),$$

und daraus

$$Mc(Q+P)=P.Ma+Q.Mb,$$

oder

$$R.Mc=P.Ma+Q.Mb, \quad (\alpha)$$

Fig. 26. b für $Q-P=R$ und $Q>P$,

$$Q(Mb-Mc)=P(Ma-Mc),$$

also

$$Mc(Q-P)=Q.Mb-P.Ma,$$

oder

$$R.Mc=Q.Mb-P.Ma. \quad (\beta)$$

Wird ferner M′ zwischen den Richtungen der Kräfte als Momentenpunct angenommen und werden sonach die Abstände M′a, M′b, M′c der Kräfte von M′ in die Gleichungen (α) und (β) eingeführt; so erhält man nach gehöriger Reduction

Fig. 26. a

$$R.M'c=P.M'a-Q.M'b, \quad (\alpha')$$

Fig. 26. b

$$R.M'c=P.M'a+Q.M'b. \quad (\beta')$$

Wird endlich noch in Fig. 26. b der Punct M″ als Momentenpunct angenommen; so folgt für die neuen Abstände M″a, M″b, M″c aus der Gleichung (β′)

$$R.M''c = P.M''a - Q.M''b. \quad (\beta'')$$

Nehmen wir die Resultirende R stets für positiv, indem wir in dem Falle, wo P und Q parallel entgegengesetzt sind (Fig. 26. b), die größere dieser Kräfte als positiv, die andere als negativ in Rechnung bringen; so gibt die Untersuchung der Gleichungen (α), (β), (α′), (β′), (β″), die man auch Momenten-Gleichungen zu nennen pflegt, folgendes Bemerkenswerthes.

Bei den Gleichungen (α) und (α′), wo P, Q, R (Fig. 26. a) positiv sind, hat man in der erstern alle Momente positiv, also müssen auch die zweiten Factoren derselben Ma, Mb, Mc positiv sein. Es sind aber auch diese Abstände von M aus in einerlei Richtung gegen N. In der Gleichung (α′) für den Momentenpunct M′ ist das Moment $Q.M'b$ negativ, also M′b negativ, M′a und M′c dagegen sind positiv; und man sieht zugleich, daß der er-

stere Abstand von M′ gegen G, mithin als den Abständen M′a und M′c entgegengesetzt zu rechnen ist.

Da in den Gleichungen (β), (β′), (β″) (Fig. 26. b) wegen der Annahme $Q > P$, sowohl R als Q positiv, dagegen P negativ zu nehmen ist, so ergibt sich in der Gleichung (β) das Moment $P.Ma$ negativ, also muß wegen des negativen P der Abstand Ma mit jenen Mb, Mc positiv sein und man sieht auch, daß diese drei Abstände von M gegen N in einerlei Sinne sind. In der Gleichung (β′) für den Momentenpunct M′ sind alle Momente positiv, daher muß, da P negativ ist, der Abstand M′a negativ sein, und es zeigt sich, daß dieser Abstand von M′ gegen N gerichtet, den Abständen M′b und M′c entgegengesetzt ist. In der Gleichung (β″) bei dem Momentenpuncte M″ ist das Moment $Q.M''b$ negativ, welches, da R, Q positiv sind und P negativ ist, nur für das negative Zeichen von M″b und M″a und für das positive von M″c möglich sein kann. Man sieht auch (Fig. 26. b), daß erstere Abstände von M″ die entgegengesetzte Richtung des letztern Abstandes haben; indessen könnten auch umgekehrt M″b, M″a positiv und M″c negativ angenommen werden, indem hiedurch blos alle Zeichen der Gleich. (β″) zugleich verändert werden, die sich durch die Multiplication mit -1 wieder herstellen lassen.

§. 63. Aus der Untersuchung im vorigen §. fließt sonach der Satz: Das Moment der Resultirenden von zwei parallelen Kräften gleicht der algebraischen Summe der Momente dieser beiden Kräfte; wobei hinsichtlich der Zeichen der Momente folgendes zu beobachten ist.

Man nehme die beiden Componenten, wenn sie in einerlei und die größere derselben, wenn sie im entgegengesetzten Sinne wirken, positiv, wodurch die Resultirende stets positiv wird; den beiden Abständen der Componenten vom Momentenpuncte gibt man das positive oder negative Zeichen, je nachdem beide Abstände in einerlei oder in entgegengesetzter Richtung vom Momentenpuncte ausgehen, während der Abstand der Resultirenden vorläufig positiv anzunehmen ist. Geht nun letzterer Abstand aus der aufgestellten Momentengleichung positiv oder negativ hervor, so ist derselbe im ersten Falle vom Momentenpuncte gegen die Richtung der für positiv, im zweiten gegen jene der für negativ angenommenen Abstände der Componenten aufzutragen.

Wichtiger für die Folge ist eine andere Betrachtung, nach der sich die Zeichen der Momente bestimmen, deren Richtigkeit wir daher mit Hinblick auf die Gleichungen (α), (α′), (β), (β′), (β″) und auf die zugehörigen Fig. 26 hier nachweisen wollen.

Man nehme vor Allem die Zeichen der parallelen Kräfte auf die vorhin gesagte Art, denke sich dann den Momentenpunct so befestigt, daß um denselben in der Ebene der Kräfte eine freie Drehung möglich ist und beobachte das Drehungsbestreben um den für den Augenblick festgehaltenen Punct. Findet man, daß beide Componenten in einerlei Sinne drehen, so sind ihre Momente positiv — Gl. (α) **Fig. 26. a.** Mom. Punct **M**, und Gleich. (β') **Fig. 26. b** Mom. P. **M'** — sind aber ihre Drehungsbestrebungen entgegengesetzt, so müssen ihren Momenten entgegengesetzte Zeichen gegeben werden — Gl. (α') **Fig. 26. a.** Mom. P. **M'**, Gl. (β) und (β'') **Fig. 26. b** Mom. Puncte **M** und **M''**. — Die nach diesen Betrachtungen für die algebraische Summe der Momente aufgestellte Gleichung gibt dann das Moment der Resultirenden positiv oder negativ, woraus, da R positiv ist, auch der Abstand der Resultirenden von dem angenommenen Momentenpuncte positiv oder negativ erhalten wird. Trägt man nun diesen Abstand gegen jene Richtung vom Momentenpuncte auf, um das Drehungsbestreben der Resultirenden — von der schon der Sinn ihrer Wirkung bekannt ist — mit dem Drehungsbestreben derjenigen Componenten übereinstimmend zu erhalten, von der das Moment positiv oder negativ angenommen worden war, so ist dadurch die Richtung der Resultirenden vollkommen bestimmt.

Der Durchschnittspunct **C** der gefundenen Richtung der Resultirenden mit der die beiden Angriffspuncte **A** und **B** verbindenden Geraden **AB** gibt endlich auch den wahren Angriffspunct der Resultirenden oder den Mittelpunct **C** der beiden Componenten P und Q (§. 59).

Anmerkung. Da der Mittelpunct **C** die Eigenschaft hat, daß man um denselben die Resultirende und gleichzeitig um **A** und **B** die Componenten in was immer für parallele Richtungen mit Beibehaltung des gegenseitigen Sinnes der Wirkungen der drei Kräfte drehen kann, ohne hiedurch in der gegenseitigen Wirkung dieser Kräfte etwas zu verändern; so ist klar, daß, wenn man bei denselben Angriffspuncten der Componenten diese in zwei verschiedene parallele Lagen bringt und mittels eines einzigen Momentenpunctes die jedesmalige Richtung der Resultirenden sucht, diese beiden Richtungen sich im Mittelpuncte jener Componenten durchschneiden müssen.

§. 64. Benennt man die Abstände der Kräfte P, Q, R von einem Momentenpuncte allgemein mit p, q, r, so hat man zufolge des vorigen §en die Momentengleichung

$$Rr = Pp + Qq,$$

worin die Zeichen der Momente auf die daselbst angegebene Art zu nehmen sind.

Haben die Momente der parallelen Kräfte P und Q verschiedene Zeichen, so kann es geschehen, daß die algebraische Summe dieser Momente, mithin auch das Moment ihrer Resultirenden Null wird.

Für $Rr = 0$ kann aber $r = 0$, oder $R = 0$ sein.

1) Ist $r = 0$ und R von Null verschieden, so liegt der Momentenpunct wie o (Fig. 26. a und b) in der Richtung der Resultirenden und weil diesfalls die parallelen Kräfte P und Q, sie mögen in einerlei oder in entgegengesetztem Sinne wirken, entgegengesetzte Drehungsbestrebungen um diesen Punct o haben, so ist

$$0 = Pp - Qq \quad \text{oder}$$

$$Qq = Pp,$$

woraus sofort auch die Proportion

$$P : Q = q : p = bc : ca$$

hervorgeht; d. h. für irgend einen in der Richtung der Resultirenden angenommenen Momentenpunct sind die Momente der Componenten gleich, oder diese Kräfte verhalten sich wie umgekehrt ihre Abstände von einem Puncte der Resultirenden; übereinstimmend mit Gl. (A) §. 62. Wird ein solcher Momentenpunct befestigt, ohne die Drehung um denselben zu hemmen; so sind die beiden Kräfte P und Q im Gleichgewichte (§. 59. Anm.).

2) Ist $R = 0$ oder $P = Q$, so ergibt sich die Momentengleichung

$$0 = Pp - Qq = Q(p - q) \text{ oder } p - q = 0.$$

Aber dieser Gleichung wird nur für $p = q$ Genüge geleistet, in welchem Falle die beiden gleichen Kräfte P und Q gleichweit vom Momentenpuncte entfernt sind, und da sie entgegengesetztes Drehungsbestreben haben, gerade entgegengesetzt, sofort im Gleichgewichte sein müssen.

Ist aber p verschieden von q, so wird die Gleichung $p - q = 0$ nicht realisirt, die Kräfte $P = Q$ sind daher parallel entgegengesetzt und bilden somit ein Kräftenpaar (§. 60. 2).

§. 65. Bevor wir zu den Momenten mehrer parallelen Kräfte übergehen können, müssen wir zuerst die Resultirende von noch so vielen parallelen Kräften bestimmen, die auf ein System von fest mit einander verbundenen Puncten wirken, ihre Richtungen mögen in einerlei Ebene liegen oder nicht.

Wenn die parallelen Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ sämmtlich in einerlei Sinne wirken, so findet man (§. 58) für zwei dieser Kräfte P_1 und P_2 die Resultirende $P_1 + P_2$, diese und die Kraft P_3 geben die Re-

sultirende $P_1+P_2+P_3$, desgleichen erhält man für letztere und die Kraft P_4 die Resultirende $P_1+P_2+P_3+P_4$, u. s. w.; also ist die Resultirende von noch so vielen in einerlei Sinne wirkenden parallelen Kräften ihrer Summe gleich und wirkt mit denselben in gleichem Sinne.

Da überdies in der so eben erwähnten successiven Zusammensetzung von je zwei Kräften jede erhaltene Resultirende zwischen den Richtungen ihrer Componenten liegt; so folgt daraus, daß die Resultirende von noch so vielen parallelen, in einerlei Sinne wirkenden Kräften zwischen den Richtungen der letztern liegen muß.

Sind hingegen von den parallelen Kräften

$$P, P', P'', \ldots\ Q, Q', Q'', \ldots$$

einige derselben $P, P', P'', \ldots$ mit den andern $Q, Q', Q'', \ldots$ im entgegengesetzten Sinne wirkend, und bezeichnet man mit U die Resultirende der Kräfte $P, P', P'', \ldots$, mit V jene der Kräfte $Q, Q', Q'', \ldots$; so ist nach Vorigem

$$U = P + P' + P'' + \ldots,$$
$$V = Q + Q' + Q'' + \ldots.$$

Bezeichnet endlich R die Resultirende aller parallelen Kräfte, die sofort auch die Resultirende der Kräfte U und V ist und ergibt sich U verschieden von V, z. B. $U > V$, so hat man

$$R = U - V = P + P' + P'' + \ldots - (Q + Q' + Q'' + \ldots).$$

Es ist sonach allgemein die Resultirende von parallelen Kräften gleich der algebraischen Summe dieser Kräfte, indem man in dieser Summe die in dem einen Sinne wirkenden positiv, die entgegengesetzt wirkenden aber negativ nimmt, und die Resultirende wirkt, je nachdem sie daraus positiv oder negativ hervorgeht, im Sinne der positiv oder der negativ angenommenen Kräfte. Indessen kann die Resultirende stets positiv erhalten werden, wenn man die Summe der in dem einen, dann die Summe der im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräfte macht und die kleinere von der größern subtrahirt. Die Resultirende ist bei solchem Verfahren im Sinne der in der Differenz positiv vorkommenden Kräfte.

§. 66. Von mehren parallelen Kräften, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, kann man mittels eines in dieser Ebene angenommenen Momentenpunctes sowohl die Lage der Resultirenden als auch ihren wahren Angriffspunct (Mittelpunct jener Kräfte) bestimmen. Da jedoch hinsichtlich der gegenseitigen Wirkungen der Kräfte und der Lage des Momentenpunctes gegen dieselben verschiedene Fälle vorkommen können, so sollen diese hier einzeln betrachtet werden.

1) Wirken die in einer Ebene liegenden parallelen Kräfte

$$P, P', P'', P''', \ldots \text{ (Fig. 27. a)}$$

auf ein System von Puncten A, A′, A″, A‴, ... in einerlei Sinne, und bezeichnet R ihre Resultirende, so ist

$$R = P + P' + P'' + P''' + \ldots$$

α) Wird nun diesfalls der Momentenpunct M zuerst außerhalb der Richtungen der Kräfte angenommen und denkt man sich Q als die Resultirende von P und P'; Q' als die von Q und P'' oder von P, P', P''; Q'' als jene von Q' und P''' oder von P, P', P'', P''', u. s. w.; so ist, weil $Q, Q', Q'', \ldots R$ zwischen den Richtungen von $P, P', P'', P''', \ldots$ liegen müssen (vorig. §.), der Momentenpunct M auch außerhalb der Richtungen aller dieser Kräfte $P, P', P'', \ldots Q, Q', Q'', \ldots R$. Bezeichnet man demnach ihre Abstände vom Momentenpuncte M mit $p, p', p'', \ldots q, q', q'', \ldots r$, so hat man vermöge §. 64 die Momentengleichungen

$$Qq = Pp + P'p',$$
$$Q'q' = Qq + P''p'' = Pp + P'p' + P''p'',$$
$$Q''q'' = Q'q' + P'''p''' = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''',$$
$$\text{u. s. w.}$$

also ist auch

$$\text{(a)} \quad Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots.$$

β) Wird aber der Momentenpunct wie M′ zwischen den Richtungen der in einerlei Sinne wirkenden parallelen Kräfte angenommen und bezeichnen diesfalls $p_1, p'_1, p''_1, p'''_1, \ldots r_1$ die Abstände der Kräfte $P, P', P'', P''', \ldots R$ von diesem Puncte, so sind bei Fig. 27. a für $MM' = k$ die vorigen Abstände:

$p = k + p_1$, $p' = k + p'_1$, $p'' = k - p''_1$, $p''' = k - p'''_1$, $\ldots r = k + r_1$,

und die Gleichung (a) verwandelt sich in

$$R(k + r_1) = P(k + p_1) + P'(k + p'_1) + P''(k - p''_1) + P'''(k - p'''_1) + \ldots.,$$

woraus sofort wegen

$$Rk = Pk + P'k + P''k + \ldots$$

die auf den Punct M′ bezogene Momentengleichung

$$\text{(b)} \quad Rr_1 = Pp_1 + P'p'_1 - P''p''_1 - P'''p'''_1 + \ldots$$

hervorgeht.

2) Wirken hingegen von den in einer Ebene liegenden parallelen Kräften

$$P, P', P'', P''', \ldots Q, Q', Q'', Q''', \ldots$$

einige wie $P, P', P'', P''', \ldots$ (Fig. 27. b) in dem einen Sinne, die übrigen wie $Q, Q', Q'', Q''', \ldots$ entgegengesetzt auf das System von Puncten A, A′, A″, A‴, ... B, B′, B″, B‴, ... und bezeichnet U die Resultirende

der erstern, V die der letztern, endlich R die Resultirende von allen Kräften; so ist für $U > V$

$$R = U - V = P + P' + P'' + \ldots - (Q + Q' + Q'' + \ldots),$$

und dabei R im Sinne von U oder von $P, P', P'', \ldots$ und der Richtung von U näher als der von V (§. 58).

γ) Ist **M** der Momentenpunct außerhalb der Richtungen von $P, P', P'', \ldots Q, Q', Q'', \ldots U, V$, sind ferner $p, p', p'', \ldots q, q', q'', \ldots u, v$ die Abstände dieser Kräfte von dem Momentenpuncte und r den Abstand der Resultirenden, so ist vermöge 1) (α)

$$Uu = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots,$$
$$Vv = Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots.$$

Ergibt sich hieraus $u > v$, also, da R näher bei U als bei V ist, $r > u > v$; so ist, da die Momente von U und V in Bezug auf den Punct r der Resultirenden gleich sind (§. 64. 1),

$$U(r-u) = V(r-v), \text{ und daraus}$$
$$r(U-V) = Uu - Vv, \text{ oder } Rr = Uu - Vv.$$

Findet sich aber $u < v$, wo man sich den Punct u in u', jenen r in r' denken kann; so ist $r < u < v$ und man erhält zur Vergleichung der Momente von U und V in Bezug des Punctes r' der Resultirenden die Gleichung

$$U(u-r) = V(v-r),$$

welche wieder

$$r(U-V) = Uu - Vv \text{ oder } Rr = Uu - Vv$$

gibt.

Die Fälle, daß hier wegen $u < v$, ungeachtet $U > V$ ist, $Uu = Vv$, also $r = 0$ oder $Uu < Vv$, d. i. r negativ werden kann, braucht man nicht besonders zu berücksichtigen, indem dies blos anzeigt, daß im ersten Falle die Resultirende durch **M**, im zweiten Falle rechts von **M** ihre Richtung hat.

Es ist sonach bei parallel entgegengesetzten Kräften, wenn der Momentenpunct außerhalb ihrer Richtungen angenommen ist,

(c) $Rr = Uu - Vv = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots - (Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots)$.

δ) Liegt endlich bei derselben Lage der Kräfte (Fig. 27. b) der Momentenpunct **M'** zwischen den Richtungen derselben, dessen Abstand von **M**, nemlich $MM' = k$ sein mag, und bezeichnen $p_1, p_1', p_1'', \ldots q_1, q_1', q_1'', \ldots r_1$ die Abstände der Kräfte $P, P', P'', P''', \ldots Q, Q', Q'', Q''', \ldots R$ von dem neuen Momentenpuncte **M'**, wodurch die Abstände in Gleichung (c)

$$p = k + p_1,\ p' = k + p_1',\ p'' = k - p_1'',\ p''' = k - p_1''' \ldots,$$
$$q = k + q_1,\ q' = k + q_1',\ q'' = k - q_1'', \ldots r = k + r_1$$

werden; so hat man durch die Substitution dieser Werthe in (c) mit Rücksicht, daß

$$Rk = Pk + P'k + P''k + \ldots - (Qk + Q'k + Q''k + \ldots)$$

ist, die Momentengleichung in Bezug auf M'

(d) $Rr_1 = Pp_1 + P'p_1' - P''p_1'' - P'''p_1''' - \ldots - Qq_1 - Q'q_1' + Q''q_1'' + \ldots$

§. 67. Aus den Gleichungen (a), (b), (c), (d) des vorigen §en mit Rücksicht auf die dazu gehörige Figur fließt nun der Satz: **Das Moment der Resultirenden von parallelen, in einer Ebene liegenden Kräften gleicht der algebraischen Summe der Momente dieser Kräfte (Composanten).**

In diesen Summen sind nemlich, wie die genannten Gleichungen mit der entsprechenden Figur zeigen, zur Bestimmung der Zeichen der einzelnen Momente die in dem einen Sinne wirkenden Kräfte positiv, die entgegengesetzt wirkenden negativ und die Abstände derselben vom Momentenpuncte positiv oder negativ in Rechnung zu nehmen, je nachdem die Abstände von diesem Puncte die eine oder die entgegengesetzte Richtung haben. Oder man denkt sich den Momentenpunct befestigt, nimmt die Momente der Kräfte positiv, die das Bestreben haben, um diesen Punct nach der einen Seite zu drehen und die Momente der entgegengesetzt zu drehen strebenden Kräfte negativ.

So wie man dabei die Resultirende R stets positiv erhalten kann (§. 65), eben so kann man auch für Rr einen positiven Werth erhalten, wenn man die Summe der Momente, denen das eine Zeichen, dann die Summe der Momente, welchen das entgegengesetzte Zeichen zukommt, macht, beide Summen positiv nimmt, und dann die kleinere von der größern Summe subtrahirt. Da hiedurch auch r aus der Momentengleichung positiv hervorgeht, so wird dieser Abstand vom Momentenpuncte gegen die Richtung der positiv angenommenen Abstände aufgetragen. Hat man aber bei Aufstellung der Momentengleichung nicht erst die Zeichen der Abstände, sondern gleich jene der Momente nach den Drehungsarten der Kräfte bestimmt, so wird r so aufgetragen, damit die Resultirende in diesem Abstande nach ihrem vorhin bestimmten Sinne wirkend, das Drehungsbestreben mit jenen ihrer Composanten übereinstimmend erhält, deren Momente positiv in Rechnung genommen worden sind.

Hat man demnach die in einer Ebene liegenden parallelen Kräfte $P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots$, welche entweder in einerlei, oder theils in dem einen, theils im entgegengesetzten Sinne wirken und ist R ihre Resultirende; sind ferner $p, p', p'', p''', p^{IV}, \ldots r$ die Abstände aller dieser Kräfte von einem angenommenen Momentenpuncte in der erwähnten Ebene; so wird

$$(1)\quad R = P + P' + P'' + P''' + P^{IV} + \ldots = \Sigma P,$$

$$(2)\quad Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + P^{IV}p^{IV} + \ldots = \Sigma Pp,$$

wobei Σ ein Summenzeichen vorstellt, welches wir der Kürze wegen bei ähnlich gebauten Gliedern einer Summe öfters anwenden werden.

Die Zeichen für die Kräfte und Momente in diesen Summen sind nach voriger Anleitung zu nehmen.

Damit sich der Anfänger hierin Übung verschaffe, möge er für folgende parallele Kräfte die Größe und Richtung der Resultirenden suchen.

Es sei nach irgend einer Kraft- oder Gewichtseinheit

$P = 8$, $P' = 6$, $P'' = 9$ in dem einen Sinne,

$P''' = 5$, $P^{IV} = 10$, $P^{V} = 12$ „ „ entgegengesetzten Sinne.

Ferner seien, auf irgend einen Momentenpunct bezogen, die Abstände $p = 3$, $p' = -3$, $p'' = 4$, $p''' = -5$, $p^{IV} = -1$, $p^{V} = 7$ in was immer für gleichem Längenmaße.

§. 68. Erwägt man, daß (§. 59 und §. 63 Anm.) die Resultirende von zwei parallelen Kräften stets durch denselben Punct (Mittelpunct) gehen müsse, diese Kräfte mögen um ihre Angriffspuncte, mit Beibehaltung des gegenseitigen Sinnes ihrer Wirkungen, in was immer für parallele Lagen gebracht werden; bedenkt man ferner, daß man noch so viele parallele Kräfte zu je zweien zusammenzusetzen vermag, und daß von jeden solchen zwei Kräften der Mittelpunct durch Drehung derselben um ihre Angriffspuncte in eine andere parallele Lage nicht verändert wird; so folgt daraus offenbar, daß der Mittelpunct von noch so vielen parallelen Kräften, sie mögen ihrer gegenseitigen Wirkung unbeschadet in was immer für eine andere parallele Lage gebracht werden, unverrückt bleibt, oder was dasselbe ist: die Richtung der Resultirenden muß bei jeder solchen Lageveränderung ihrer parallelen Componenten stets durch den Mittelpunct der letztern gehen.

Wenn man sonach auf diese Bemerkung gestützt, bei zwei verschiedenen Lagen von parallelen Kräften jedesmal mit Hilfe der Momente die Richtung ihrer Resultirenden sucht, so gibt der Durchschnitt der beiden gefundenen Richtungen den Mittelpunct dieser parallelen Kräfte.

Hat man nach dem Beispiele im vorig. §. die Richtung der Resultirenden gefunden und dreht man die gegebenen Kräfte um ihre Angriffspuncte — die wir der Einfachheit halber hier in die durch den Momentenpunct auf die Richtungen der Kräfte gezogene senkrechte Gerade versetzen wollen — gleich viel z. B. um 45°, so man dann ihre Abstände von dem vorigen Momentenpuncte

$p = 2{\cdot}1$, $p' = -2{\cdot}1$, $p'' = 2{\cdot}8$, $p''' = -3{\cdot}5$, $p^{IV} = -0{\cdot}7$, $p^{V} = 4{\cdot}9$

erhält; so wird die darnach gefundene Richtung der Resultirenden mit der vorigen Richtung derselben als Durchschnittspunct den gesuchten Mittelpunct geben.

Endlich weiß man, daß die Resultirende, wenn sie ihrer Richtung gerade entgegengesetzt angebracht wird, ihren Componenten das Gleichgewicht hält. Da sie dabei blos das Fortrücken des Mittelpunctes der Kräfte verhindert, was aber auch durch die Befestigung dieses Punctes bewirkt wird, so kann man sagen: die parallelen Kräfte sind bei Befestigung ihres Mittelpunctes in jeder parallelen Lage, die man ihnen um ihre Angriffspuncte geben mag, stets im Gleichgewichte.

§. 69. Aus den Gleichungen (1) und (2) (§. 67) lassen sich einige bemerkenswerthe Fälle herausheben, die hier folgen sollen.

1) Wird die Summe der Momente $\Sigma Pp = 0$ und ist ΣP von Null verschieden, so ist Gl. (2) $r = 0$ und die Resultirende $R = \Sigma P$ geht diesfalls durch den Momentenpunct.

2) Wird $\Sigma P = 0$, nemlich $R = 0$ und ist ΣPp nicht Null, so folgt aus Gl. (2)

$$r = \frac{\Sigma Pp}{0},$$

was anzeigt, daß sich die parallelen Kräfte $P, P', P'', \ldots$ auf ein Kräftenpaar, d. i. auf zwei gleiche, parallel entgegengesetzte Kräfte reduciren (§. 60. 2). Denn läßt man eine Kraft, z. B. P, außer Acht, indem man die Resultirende R' der übrigen Kräfte und ihren Abstand r' sucht; so ist

$$R'r' = P'p' + P''p'' + \ldots = \Sigma Pp - Pp$$

und wegen $\Sigma P = 0$

$$R' = P' + P'' + P''' + \ldots = \Sigma P - P = -P,$$

folglich

$$r' = \frac{\Sigma Pp - Pp}{R'} = \frac{\Sigma Pp - Pp}{-P} = p - \frac{\Sigma Pp}{P},$$

woraus man sieht, daß r' verschieden von p ist, und sonach die gleichen Kräfte $R' = -P$ und P parallel entgegengesetzt sind.

3) Ist hingegen mit $\Sigma P = 0$ auch $\Sigma Pp = 0$, so erhält man bei Außerachtlassung einer der parallelen Kräfte, z. B. P, für die übrigen die Resultirende $R' = -P$, und ihren Abstand $r' = p$, d. h. die Kräfte $P, P', P'', P''', \ldots$ reduciren sich diesfalls auf zwei gleiche, gerade entgegengesetzte Kräfte $R' = -P$ und P und sind sofort im Gleichgewichte.

B. Von den statischen Momenten, auf eine Ebene oder Gerade bezogen.

§. 70. Man nennt analog mit §. 61 auch *statisches Moment* oder blos *Moment einer Kraft* das Product der Kraft in den senkrechten Abstand ihres Angriffspunctes von einer angenommenen Ebene, und wie man im angeführten §. den Punct, auf den sich die Momente beziehen, Momentenpunct genannt; so kann man auch hier die Ebene, worauf die Momente der Kräfte bezogen werden, *Momentenebene* nennen.

§. 71. Betrachten wir in Beziehung dieser Momente wieder zuerst zwei parallele Kräfte P und Q (Fig. 29. a und b), welche auf die mit einander fest verbundenen Puncte A und B entweder in einerlei (Fig. 29. a), oder im entgegengesetzten Sinne (Fig. 29. b) wirken.

Ist C in der Geraden AB der Mittelpunct der Kräfte P und Q oder der wahre Angriffspunct ihrer Resultirenden, der bei einerlei Sinne der Kräfte zwischen A und B, bei entgegengesetztem aber in der Verlängerung von AB und zwar für $Q > P$ näher an B als an A liegt; so hat man bekanntlich in Beziehung dieses Punctes die Momentengleichung

$$P.CA = Q.BC, \text{ oder } P : Q = BC : CA.$$

Ist nun MN irgend eine Momentenebene, auf welche wir aus den Angriffspuncten A, B, C die Senkrechten $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ fällen, und ziehen wir durch C zu den hiedurch in jener Ebene entstandenen projicirten Geraden $a\beta$ oder $a\gamma$ die Parallelen mn; so folgt aus den ähnlichen Dreiecken CAm und CBn

$$BC : CA = Bn : Am \text{ und daher}$$
$$P : Q = Bn : Am \text{ oder}$$
$$P.Am = Q.Bn.$$

Bringen wir in diese Gleichung anstatt Am und Bn die senkrechten Abstände $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ der Angriffspuncte von der Momentenebene und setzen die Resultirende $= R$; so erhält man auf diese Ebene bezogen die Momentengleichungen:

(Fig. 29. a)

$$P(A\alpha - C\gamma) = Q(C\gamma - B\beta)$$
oder wegen $P + Q = R$,
$$R.C\gamma = P.A\alpha + Q.B\beta, \quad (a)$$

(Fig. 29. b)

$$P(A\alpha - C\gamma) = Q(B\beta - C\gamma)$$
und daraus wegen $Q - P = R$,
$$R.C\gamma = Q.B\beta - P.A\alpha. \quad (b)$$

Ist ferner $M'N'$ die Momentenebene und $\alpha'\beta'$ die auf selbe projicirte Gerade, durch welche AB in u geschnitten wird, so sind die Abstände der Angriffspuncte von dieser Ebene $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, welche an die Stelle von $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in die Gleichungen (a) und (b) gesetzt, folgende Momentengleichungen geben

(Fig. 29. a)

$$R(C\gamma' + \gamma\gamma') = P(\gamma\gamma' + A\alpha') + Q(\gamma\gamma' - B\beta')$$

oder in Rücksicht auf $P + Q = R$,

$$R.C\gamma' = P.A\alpha' - Q.B\beta', \qquad (a')$$

(Fig. 29. b)

$$R(\gamma\gamma' - C\gamma') = Q(\gamma\gamma' - B\beta') - P(A\alpha' + \gamma\gamma')$$

und daraus für $Q - P = R$

$$R.C\gamma' = P.A\alpha' + Q.B\beta'. \qquad (b')$$

Wird endlich noch bei Fig. 29. b die Momentenebene wie $M''N''$ so angenommen, daß die auf dieselbe projicirte Gerade $\alpha''\gamma''$ die AB zwischen B und C in w durchschneidet und bringt man die neuen Abstände $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ der Angriffspuncte von dieser Ebene in die Gleichung (b'), so ergibt sich

$$R(C\gamma'' + \gamma'\gamma'') = P(A\alpha'' - \gamma'\gamma'') + Q(\gamma'\gamma'' - B\beta'')$$

oder weil diesfalls $Q - P = R$ ist,

$$R.C\gamma'' = P.A\alpha'' - Q.B\beta''. \qquad (b'')$$

§. 72. Nimmt man die parallelen Kräfte P und Q positiv, wenn sie in einerlei Sinne und die kleinere davon (hier P) negativ, wenn sie entgegengesetzt sind; gibt man ferner den Abständen ihrer Angriffspuncte von der Momentenebene, welche auf einer Seite dieser Ebene liegen, das positive, den auf der andern Seite liegenden das negative Zeichen und bildet nach diesen Annahmen die Momente der genannten Kräfte; so wird man diese in Größe und Zeichen genau mit jenen der Gleichungen (a), (a'), (b), (b'), (b'') des vorigen §. übereinstimmend finden. So sieht man z. B. in Fig. 29. b, wenn R, Q positiv, P negativ, dann $C\gamma''$ positiv, also $B\beta''$ und $A\alpha''$ negativ ist, daß

$$RC\gamma'' = Q. - B\beta'' - P. - A\alpha'' \text{ oder } R.C\gamma'' = P.A\alpha'' - Q.B\beta''$$

wird, was genau mit Gleichung (b'') übereinkommt. Eben so könnte man auch die aufgestellten Annahmen über die Zeichen der Kräfte und ihrer Abstände durch die übrigen Momentengleichungen rechtfertigen. Man hat sonach allgemein das Moment der Resultirenden, auf eine an-

genommene Ebene bezogen, gleich der algebraischen Summe der auf dieselbe Ebene bezogenen Momente ihrer beiden Componenten.

Erhält man aus der aufgestellten Momentengleichung den Abstand des Angriffspunctes der Resultirenden positiv oder negativ, so liegt dieser Punct auf der Seite der als positiv oder auf jener der als negativ angenommenen Abstände. Eine in dem gefundenen Abstande zur Momentenebene parallel gelegte Ebene wird auf der Verbindungslinie **AB** der Angriffspuncte beider Componenten den Mittelpunct dieser Kräfte abschneiden.

Überdies wird bei der Ableitung der Momentengleichungen im vorigen §. nicht unbemerkt geblieben sein, daß dabei die Lage der Momentenebene gegen die Richtungen der Kräfte in gar keine Beachtung gekommen ist, woraus folgt, daß ohne Veränderung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den drei Momenten die Momentenebene nach Belieben sowohl parallel als auch senkrecht zu den Richtungen der Kräfte angenommen werden kann und daß anderseits bei festgesetzten Lagen der Momentenebene die einzelnen Momente keine Veränderung erfahren, die Kräfte mögen um ihre Angriffspuncte in was immer für parallele Lagen, mit Beibehaltung des gegenseitigen Sinnes ihrer Wirkung, gebracht werden. Der Fall jedoch ist ausgenommen, wenn die parallel entgegengesetzten Kräfte P und Q (Fig. 29. b) gleich sind und bei der Drehung um ihre Angriffspuncte in die Verbindungslinie der letztern gebracht werden, wodurch sie dann gerade entgegengesetzt liegen, somit in Gleichgewicht kommen, was doch in jeder andern parallelen Lage dieser Kräfte unmöglich ist.

§. 73. Bei noch so vielen parallelen Kräften, welche auf ein System fest mit einander verbundener Puncte wirken, ist, auf eine Ebene bezogen, das Moment der Resultirenden gleich der algebraischen Summe der Momente ihrer Componenten. Dabei sind die Zeichen der Kräfte nach §. 65 und die Zeichen der Abstände ihrer Angriffspuncte von der Ebene nach §. 72 zu nehmen.

Es seien P, P', P'', P''', ... parallele, in einerlei oder in verschiedenem Sinne wirkende Kräfte und R ihre Resultirende. Bezeichnen wir mit R' die Resultirende von P und P', mit R'' die von R' und P'' oder von P, P', P'', mit R''' die von R'' und P''' oder von P, P', P'', P''', u. s. w. Ferner seien bezüglich auf eine Momentenebene p, p', p'', p''', ... die in Größe und Zeichen gegebenen Abstände der Kräfte P, P', P'', P''', .., dagegen r', r'', r''', ... r die noch unbekannten Abstände der Angriffs-

puncte von $R', R'', R''', \ldots R$; so ist vermöge vorigen §.

$$R'r' = Pp + P'p',$$
$$R''r'' = R'r' + P''p'' = Pp + P'p' + P''p'',$$
$$R'''r''' = R''r'' + P'''p''' = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''',$$

u. s. w.

also auch, wenn man auf diese Art fortfährt, die algebraische Summe der Momente

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots,$$

was den oben ausgesprochenen Satz rechtfertigt.

Durch den aus dieser Gleichung hervorgehenden Werth von r erfährt man blos, daß der Angriffspunct der Resultirenden in einer zur Momentenebene in diesem Abstande parallel gelegten Ebene liegt und zwar auf der Seite der positiv oder negativ angenommenen Abstände der Composanten, je nachdem r positiv oder negativ gefunden worden ist. Zur vollkommenen Bestimmung des Angriffspunctes der Resultirenden bedarf man drei, zu einander nicht parallele Momentenebenen oder ein Coordinatensystem.

Wird die algebraische Summe der Momente Null, so ist, wenn R von Null verschieden, $r = 0$, d. h. die Summe der Momente paralleler Kräfte ist für jede durch den Angriffspunct der Resultirenden gelegte Momentenebene Null.

§. 74. Um den Angriffspunct der Resultirenden R von mehren parallelen Kräften $P, P', P'', \ldots$, welche auf ein System von fest mit einander verbundenen Puncten m, m′, m″, . . . (Fig. 30) wirken, zu bestimmen, wird man drei auf einander rechtwinklige Momenten- oder coordinirte Ebenen XY, YZ, ZX annehmen und in Bezug auf jede derselben nach vorigem §en die Momentengleichung aufstellen. Da die Abstände der Angriffspuncte m, m′, m″, . . . von den angenommenen Ebenen zugleich die Coordinaten dieser Puncte gegen das rechtwinklige Coordinatensystem der drei Axen XX′, YY′, ZZ′ sind, wozu O der Ursprung ist; so kann man diese Abstände bezüglich auf die Ebenen YZ, ZX und XY mit $x, x', x'', \ldots$, mit $y, y', y'', \ldots$ und mit $z, z', z'', \ldots$ bezeichnen und sie mit den Zeichen, welches ihnen nach §. 5 zukommt, nehmen *). Sind nun a, b, c die Abstände oder Coordinaten des Angriffspunctes der Resultirenden; so hat man (§. 65 und 73) folgende Gleichungen

*) In der Figur, wo n, n′, n″, n‴, . . . die Projectionen von m, m′, m″, m‴, . . . auf die Ebene XY vorstellen, würden $x, x', x'', x^{VI}, y, y', y'', y''', y^{V}, z, z', z''', z^{V}$ das positive, $x''', x^{IV}, x^{V}, y^{IV}, y^{VI}, z'', z^{IV}, z^{VI}$ das negative Zeichen erhalten.

$$(1) \qquad R = P + P' + P'' + \ldots = \Sigma P,$$

$$(2) \quad \begin{cases} Ra = Px + P'x' + P''x'' + \ldots = \Sigma Px, \\ Rb = Py + P'y' + P''y'' + \ldots = \Sigma Py, \\ Rc = Pz + P'z' + P''z'' + \ldots = \Sigma Pz, \end{cases}$$

worin die Summen algebraisch, und die Zeichen der Kräfte so anzunehmen sind, daß R positiv wird.

Die Gleichung (1) gibt die Größe der Resultirenden im Sinne der positiv angenommenen Componenten und aus den Gleichungen (2) erhält man die Coordinaten a, b, c des Angriffspunctes der Resultirenden. Diese Coordinaten nach ihren Größen und Zeichen von **O** aus auf den betreffenden Axen aufgetragen, bestimmen den gesuchten Angriffspunct.

Übrigens muß bemerkt werden, daß aus den Gleichungen (2) nur dann bestimmte Werthe für a, b, c hervorgehen, wenn nach Gleichung (1) die algebraische Summe der Kräfte, nemlich ΣP oder der Werth von R nicht Null wird. Denn für $\Sigma P = 0$ werden die Nenner der Ausdrücke für a, b, c nach jenen Gleichungen Null, also diese Coordinaten entweder unendlich groß, oder sie erhalten, wenn zugleich eine der Momentensummen ΣPx, ΣPy, ΣPz Null wird, den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$. Die folgenden Untersuchungen werden über alle diese Fälle genügende Aufklärung geben.

§. 75. Wie schon erwähnt, haben parallele Kräfte eine Resultirende, wenn die algebraische Summe derselben ΣP nicht Null wird, indem diesfalls für den Angriffspunct der Resultirenden die Coordinaten a, b, c aus den Gleichungen (2) bestimmte Werthe erhalten.

Da also die Angriffspuncte der parallelen Kräfte und der Angriffspunct ihrer Resultirenden gegen das angenommene Coordinatensystem festgesetzte Lagen haben, so bilden alle diese Angriffspuncte auch unter sich ein festes System, d. h. jeder dieser Puncte ist gegen die übrigen Puncte unbeweglich. Denkt man sich daher durch irgend einen der Angriffspuncte, welcher also auch jener der Resultirenden sein kann, eine Ebene gelegt, die mit dem Systeme der Puncte fest verbunden sein soll und dreht diese Ebene um den betreffenden Punct in was immer für eine Lage, wobei man aber die Richtungen der parallelen Kräfte und ihrer Resultirenden gegen die Ebene unverändert läßt; so muß in jeder neuen Lage des Systems der Angriffspuncte die Größe der Resultirenden dieselbe bleiben, und falls eine solche Drehung um den Angriffspunct der Resultirenden selbst geschieht, so müssen, ungeachtet hiedurch die Coordinaten $x, x', x'', \ldots$,

$y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots$ gegen das unbeweglich gelassene Coordinatensystem verändert werden, dennoch die aus den Gleichungen (2) hervorgehenden Coordinaten a, b, c stets dieselben Werthe behalten. Erwägt man nebstbei, daß die Richtung der parallelen Kräfte gegen das Coordinatensystem auf die Gleichungen (2) keinen Einfluß hat und sonach alle parallelen Kräfte um ihre Angriffspuncte in was immer für eine Richtung mit Beibehaltung ihres Parallelismus und des unveränderten gegenseitigen Sinnes ihrer Wirkungen gedreht werden können, ohne hiedurch in den Werthen der Coordinaten a, b, c des Angriffspunctes ihrer Resultirenden eine Veränderung hervorzubringen; so läßt sich die Folgerung machen:

Das System der Angriffspuncte paralleler Kräfte mag um den Angriffspunct irgend einer der Kräfte oder um den der Resultirenden in was immer für eine Lage und die Kräfte mögen gleichzeitig in was immer für eine Richtung um ihre Angriffspuncte gebracht werden, wenn nur dabei der Sinn ihrer gegenseitigen Wirkung unverändert bleibt; so wird dadurch blos die Richtung der Resultirenden verändert, da sie ihren Componenten in jeder Lage parallel sein muß, ihre Größe aber und die Lage ihres Angriffspunctes gegen die der Componenten erfahren keine Veränderung.

Der Angriffspunct der Resultirenden ist sonach dieser Eigenschaft wegen auch hier, wo die Angriffspuncte der Kräfte wie immer zerstreut oder auch blos in einer Ebene liegen, der Mittelpunct dieser Kräfte.

Nachdem ferner die Resultirende, ihrer Richtung gerade entgegengesetzt angebracht, den parallelen Componenten Gleichgewicht halten muß (§. 31), so ist klar, daß es zwischen den letztern Kräften noch fortbestehen wird, wenn die Resultirende beseitigt, und anstatt derselben ihr Angriffspunct festgehalten wird. Der Druck von den parallelen Kräften auf den befestigten Punct wird in der Richtung der Resultirenden geschehen und dem von ihr allein hervorgebrachten Drucke gleich sein.

Besondere Lagen des Mittelpunctes paralleler Kräfte, deren Summe ΣP nicht Null ist, sind folgende.

Wenn eine der Momentensummen ΣPx, ΣPy oder ΣPz in Null übergeht, so ist der Angriffspunct der Resultirenden oder der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der Ebene, worauf sich die Momente beziehen, deren Summe Null geworden ist. Z. B. für $\Sigma Px = 0$ ist $a = 0$, somit der Mittelpunct

in der Ebene YZ; für $\Sigma Py = 0$ wird $b = 0$, und der Mittelpunct liegt in der Ebene XZ, u. s. w. Erhalten demnach zwei der Momentensummen als ΣPx und ΣPy, ΣPx und ΣPz, oder ΣPy und ΣPz zugleich den Werth Null, so liegt der Mittelpunct in jener Coordinatenaxe, in der sich die beiden Ebenen durchschneiden, auf die sich die Momente, deren Summen Null geworden sind, beziehen. Werden endlich alle drei Momentensummen zugleich Null, nemlich $\Sigma Px = 0$, $\Sigma Py = 0$, $\Sigma Pz = 0$, so fällt der Mittelpunct mit dem Ursprunge O der Coordinaten zusammen.

§. 76. Gehen wir jetzt zur Untersuchung des Falles über, wenn die Summe der parallelen Kräfte $\Sigma P = 0$ wird.

Zur Vereinfachung derselben wollen wir, was erlaubt ist, das rechtwinklige Coordinatensystem so stellen, daß die Axe OZ zu den Richtungen der Kräfte parallel ist, und es sollen in Bezug auf dieses Coordinatensystem die Abstände der Angriffspuncte der parallelen Kräfte P, P', P'', . . . von den coordinirten Ebenen YZ, ZX, XY oder die Coordinaten dieser Puncte $x, x', x'', \ldots, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots$ heißen.

Da die Summe

$$\Sigma P = P + P' + P'' + P''' + \ldots = 0$$

ist, so wollen wir anfangs eine von diesen Kräften, z. B. P, unberücksichtigt lassen, und die Resultirende R' der übrigen Kräfte $P', P'', P''', \ldots$, deren Summe sonach nicht Null sein kann, suchen. Sind a', b', c' die Coordinaten ihres Angriffspunctes, so ist

$$(3) \qquad R' = P' + P'' + P''' + \ldots = \Sigma P - P = -P \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \begin{cases} R'a' = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots = \Sigma Px - Px, \\ R'b' = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots = \Sigma Py - Py, \\ R'c' = P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots = \Sigma Pz - Pz. \end{cases}$$

Aus den letzten Gleichungen mit Rücksicht auf die Gleichung (3) erhält man

$$(5) \quad \begin{cases} a' = \dfrac{\Sigma Px - Px}{R'} = x - \dfrac{\Sigma Px}{P}, \\ b' = \dfrac{\Sigma Py - Py}{R'} = y - \dfrac{\Sigma Py}{P}, \\ c' = \dfrac{\Sigma Pz - Pz}{R'} = z - \dfrac{\Sigma Pz}{P}. \end{cases}$$

Hier gibt vor Allem die Gleichung (3) wegen $R' = -P$ zu erkennen, daß diese Resultirende R' der parallelen Kräfte P', P'', P''', ... mit der vorhin unbeachtet gelassenen Kraft P von einerlei Größe, aber entgegengesetztem Zeichen ist. Demnach reduciren sich für $\Sigma P = 0$ alle parallelen Kräfte P, P', P'', P''', ... immer auf zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte. In welchen Fällen jedoch diese beiden Kräfte parallel oder gerade entgegengesetzt sein werden, wird die hier folgende Untersuchung mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) zeigen.

1) Ist mit $\Sigma P = 0$ zugleich auch $\Sigma Px = 0$, $\Sigma Py = 0$, $\Sigma Pz = 0$, so ist nach den Gleichungen (5) $a' = x$, $b' = y$, $c' = z$; d. h. die beiden entgegengesetzten Kräfte $R' = -P$ und P haben diesfalls einerlei Angriffspunct, und sind sofort im Gleichgewichte, welches sonach auch zwischen allen parallelen Kräften P, P', P'', ... bestehen muß.

Lassen wir ferner um den Punct, dessen Coordinaten a', b', c' oder x, y, z sind, das unveränderliche System der Angriffspuncte in irgend eine Lage drehen, die Kräfte P, P', P'', ... mögen dabei auch noch für sich um ihre Angriffspuncte in was immer für eine Richtung mit Beibehaltung des gegenseitigen Sinnes ihrer Wirkungen gedreht werden; so weiß man, (vorig. §.) daß bei allen diesen Lagenveränderungen die Momentensummen

$$P'x' + P''x'' + \ldots,\quad P'y' + P''y'' + \ldots,\quad P'z' + P''z'' + \ldots$$

(als die Momente der Resultirenden R') keine Veränderung erfahren, und daß deshalb, da x, y, z, mithin auch Px, Py, Pz ihre Werthe beibehalten, nebst $\Sigma P = 0$ auch wegen der Gleichungen (4) immer noch die Gleichungen

$$\Sigma Px = 0,\quad \Sigma Py = 0,\quad \Sigma Pz = 0$$

bestehen, sofort die parallelen Kräfte P, P', P'', ... im Gleichgewichte bleiben.

Man nennt daher ein solches, für alle besagten Lagenveränderungen des Systems der Angriffspuncte und der Kräfte, beharrliches Gleichgewicht, stabil und die Bedingungsgleichungen für das stabile Gleichgewicht sind:

$$(6)\quad \Sigma P = 0,$$
$$(7)\quad \Sigma Px = 0,\quad \Sigma Py = 0,\quad \Sigma Pz = 0.$$

2) Ist mit $\Sigma P = 0$ zugleich $\Sigma Px = 0$ und $\Sigma Py = 0$, dagegen ΣPz von Null verschieden, wodurch also nach Gleichungen (5) $a' = x$, $b' = y$ und c' von z verschieden ausfällt; so sieht man daraus mit Bezug des Parallelismus der Axe **OZ** zu den Richtungen der Kräfte, daß die gleichen

$R' = -P$ und P gerade entgegengesetzt, somit im Gleichgewichte sind und daß daher auch zwischen allen parallelen Kräften P, P', P'', . . . Gleichgewicht bestehen muß. Allein dieses Gleichgewicht ist nicht stabil; denn der Ungleichheit wegen, welche zwischen den zur Axe OZ parallen Coordinaten c' und z der Angriffspuncte von R' und P besteht, liegen diese beiden Angriffspuncte, wie M' und m, von einander getrennt und sonach ist, bei der Drehung der parallelen Kräfte P, P', P'', . . . um ihre respectiven Angriffspuncte, wodurch

$$\Sigma Px, \quad \Sigma Py, \quad \Sigma Pz,$$

also auch a', b', c' dieselben Werthe behalten, dann R' nicht mehr gerade entgegengesetzt der Kraft P, sondern die Richtungen dieser beiden gleichen Kräfte werden, wie M'r und mp, parallel entgegengesetzt, daher die parallelen Kräfte $P, P', P'', \ldots$, in ihrer neuen Richtung nicht im Gleichgewichte sind. Nur wenn die Drehung aller Kräfte aus ihrer anfänglichen Richtung, wo sie im Gleichgewichte waren, um 180° oder in die gerade entgegengesetzte Richtung geschieht, treten die Kräfte wieder in Gleichgewicht; weil diesfalls P die Richtung mM' und R' die gerade entgegengesetzte Richtung M'm erhält.

Ein Gleichgewicht der Art, welches blos in zwei entgegengesetzten Richtungen der parallelen Kräfte besteht, während diese Kräfte bei jeder andern Richtung sich auf ein Kräftenpaar zurück führen lassen, nennt man ein labiles Gleichgewicht. Die Bedingungsgleichungen dafür sind

$$(8) \quad \Sigma P = 0,$$
$$(9) \quad \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0,$$

wenn die coordinirten Ebenen zu den Kräften, auf welche sich die Momente der letztern beiden Gleichungen beziehen, parallel angenommen sind.

3) Werden endlich mit $\Sigma P = 0$ entweder ΣPx und ΣPy von Null verschieden oder wird nur eine dieser Momentensummen Null, während ΣPz irgend einen Werth, selbst Null nicht ausgenommen, erhält; so sieht man leicht aus den Gleichungen (5), daß in jedem dieser Fälle die Angriffspuncte der gleichen entgegengesetzten Kräfte $R' = -P$ und P nicht in einer zur Axe OZ parallelen Geraden liegen, weswegen diesfalls die beiden genannten gleichen Kräfte blos parallel entgegengesetzt sind. Es reduciren sich nemlich die parallelen Kräfte $P, P', P'', \ldots$, blos auf ein Kräftenpaar, wenn $\Sigma P = 0$ ist, aber nicht zugleich die Summen ΣPx und ΣPy derjenigen Momente Null werden, die sich auf die zu den Kräften parallelen Momentenebenen YZ und ZX beziehen.

Da gleiche, parallel entgegengesetzte Kräfte, wenn sie um ihre Angriffspuncte in die Verbindungslinie der letzteren gebracht werden, in ein labiles Gleichgewicht treten; so müssen auch parallele Kräfte P, P', P'', . . ., die sich auf ein Kräftenpaar reduciren, in ein labiles Gleichgewicht übergehen, wenn sie um ihre Angriffspuncte in die parallele Richtung mit der Verbindungslinie der Angriffspuncte des Kräftenpaares gebracht werden. Berücksichtigt man nun mit dieser Thatsache, daß dieses Kräftenpaar aus P mit der Resultirenden $-P$ der übrigen Kräfte, oder aus P' mit jener $-P'$ der übrigen Kräfte, oder aus P'' mit der $-P''$, u. s. w. oder auch aus der Resultirenden des einen — mit der des andern Theils der parallelen Kräfte bestehen kann und daß solche Kräfte $P, P, P'', \ldots$ nur in zwei gerade entgegengesetzten Richtungen ein labiles Gleichgewicht geben; so müssen, wenn man bei jedem jener Kräftenpaare die Verbindungslinie seiner Angriffspuncte zieht, alle diese Verbindungslinien zu einander parallel sein.

§. 77. Liegen die Angriffspuncte der parallelen Kräfte $P, P', P'', \ldots$ in einer Ebene, für welche wir **XY** annehmen wollen, die Richtungen der Kräfte mögen innerhalb oder außerhalb dieser Ebene liegen; so ist in der letzten der Gleichungen (2) (§. 74) $z = z' = z'' = z''' = 0$, u. s. w. folglich auch $c = 0$. Der Angriffspunct der Resultirenden liegt sonach ebenfalls in der Ebene **XY** und wird durch die folgenden Gleichungen bestimmt

$$(10) \qquad R = P + P' + P'' + \ldots = \Sigma P,$$

$$(11) \qquad \begin{cases} Ra = Px + P'x' + P''x'' + \ldots = \Sigma Px, \\ Rb = Py + P'y' + P''y'' + \ldots = \Sigma Py. \end{cases}$$

Die Momente beziehen sich also hier auf zwei rechtwinklige Coordinatenaxen **OX** und **OY**, die in der Ebene der Angriffspuncte m, m′, m″, . . . (Fig. 31) angenommen sind; daher die Werthe der Coordinaten

$$x, x', x'', \ldots, y, y', y'', \ldots$$

nach §. 5. I anzunehmen, und eben so die gefundenen Coordinaten a, b des Angriffspunctes der Resultirenden in ihrem algebraischen Sinne von **O** aus auf den Axen aufzutragen sind.

Aus diesen Gleichungen läßt sich folgern:

1) Ist die algebraische Summe der parallelen Kräfte ΣP nicht Null, so haben die Kräfte stets eine Resultirende $R = \Sigma P$, für deren Angriffspunct die Gleichungen (11) die Coordinaten a, b geben. Wird dabei $\Sigma Px = 0$ oder $\Sigma Py = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$ und der Angriffspunct der Resultirenden ist im ersten Falle in der Axe **Y′Y**, und im zweiten in der Axe **X′X**. Werden aber zugleich $\Sigma Px = 0$ und $\Sigma Py = 0$,

also $a = 0$ und $b = 0$, so ist der Ursprung **O** der Angriffspunct der Resultirenden.

Der Angriffspunct der Resultirenden hat die in §. 75 erörterten Eigenschaften, und ist sonach auch hier der Mittelpunct der parallelen Kräfte.

2) Wird $\Sigma P = 0$, so reduciren sich die parallelen Kräfte auf ein Kräftenpaar und zwar:

α) Wenn zugleich $\Sigma Px = 0$ und $\Sigma Py = 0$ werden, auf zwei in einem Puncte gerade entgegengesetzte gleiche Kräfte, die sofort anzeigen, daß sämmtliche parallelen Kräfte im stabilen Gleichgewichte sind. Die Bedingungsgleichungen hiefür sind sonach

$$(12) \quad \Sigma P = 0,$$
$$(13) \quad \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0.$$

β) Fallen aber die beiden Momentensummen ΣPx und ΣPy von Null verschieden aus, oder wird blos die eine davon Null, so reduciren sich die parallelen Kräfte auf ein Kräftenpaar.

γ) Nur in dem Falle, als sämmtliche parallelen Kräfte in der Ebene ihrer Angriffspuncte liegen und eine der rechtwinkligen Coordinatenaxen **OY** zu ihren Richtungen parallel angenommen wird, sind diese Kräfte bei dem Nullwerden der Summe der auf diese Axe bezogenen Momente, nemlich bei $\Sigma Px = 0$, im labilen Gleichgewichte.

Die Beweise über alle diese Fälle sind jenen im vorigen §. ähnlich, daher vom Anfänger leicht auszuführen.

§. 78. Sind endlich die Angriffspuncte der parallelen Kräfte

$$P, P', P'', P''', \ldots$$

in einer Geraden, z. B. in der angenommenen Axe **XX**, so sind ihre Richtungen in einer Ebene, und dabei ist in der zweiten Gleichung (11) $y = y' = y'' = y''' = 0$, u. s. w. daher $b = 0$. Man hat sonach diesfalls zur Bestimmung des Angriffspunctes der Resultirenden in der Geraden **XX**, worin **O** der Ursprung der Coordinaten x, x', x'', x''', ... ist, die beiden Gleichungen

$$(14) \quad R = P + P' + P'' + \ldots = \Sigma P,$$
$$(15) \quad Ra = Px + P'x' + P''x'' + \ldots = \Sigma Px.$$

Die Momente beziehen sich nemlich hier auf einen Punct **O** der Geraden **X'X** (Fig. 32), von welchem die Abstände Om, Om', Om'', Om''', ... oder x, x', x'', x''', ... gegen **X** das eine, gegen **X'** gerechnet, das

entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wornach dann auch mit dem gefundenen Werthe von a zu verfahren ist.

Aus den Gleichungen (14) und (15) folgt:

1) Ist ΣP nicht Null, so haben die parallelen Kräfte eine Resultirende $R = \Sigma P$, deren Angriffspunct den Abstand $a = \frac{\Sigma Px}{R}$ von O hat, und nach dem erhaltenen Vorzeichen von a gegen X oder X' zu liegt.

Wird dabei $\Sigma Px = 0$, also $a = 0$, so ist O der Angriffspunct der Resultirenden.

Der Angriffspunct der Resultirenden ist ebenfalls der Mittelpunct der Kräfte und bringt bei seinem Festhalten letztere in Gleichgewicht.

2) Ist $\Sigma P = 0$ und zugleich $\Sigma Px = 0$, so sind die parallelen Kräfte im stabilen Gleichgewichte.

3) Wird dagegen mit $\Sigma P = 0$ und ΣPx nicht Null, so reduciren sich die parallelen Kräfte auf ein Kräftenpaar.

Fünfter Abschnitt.

Von dem specifischen Gewichte und von dem Schwerpuncte der Körper.

A. Vom specifischen Gewichte.

§. 79. Wenn man die für jedes materielle Theilchen gleiche Kraft, mit welcher es gegen die Erde zu fallen strebt, d. h. dieselbe Wirkung der Schwerkraft $= g$ annimmt und erwägt (§. 1 und §. 13), daß die Masse M eines Körpers die Menge seiner materiellen Theilchen und das Gewicht P desselben die Summe oder die Resultirende der auf diese Theilchen hervorgebrachten verticalen Wirkungen ist; so kann man die Gleichung

$$(1) \quad P = gM$$

aufstellen. Hieraus sieht man, daß g das Gewicht der Masseneinheit vorstellt und daß sich die Gewichte der Körper wie ihre Massen verhalten, wie schon §. 13 erwähnt wurde.

§. 80. Wenn bei einem Körper die materiellen Theilchen näher an einander gerückt sind als bei einem andern Körper oder mit andern Worten, wenn ein Körper eine größere Masse hat als ein anderer unter demselben Volum; so ist der erste Körper dichter als der zweite. Ein Körper ist gleichförmig dicht oder homogen, wenn (was immer für große oder kleine) gleiche Theile seines Volums gleiche Massen enthalten; demnach ist bei einem homogenen Körper die Dichte der Quotient seiner Masse durch sein Volum. Homogene Körper von einerlei Materie nennt man gleichartig.

Bezeichnet nun M die Masse, K den Cubikinhalt und D die Dichte eines homogenen Körpers, so ist zufolge der so eben gemachten Erklärung

$$D = \frac{M}{K}, \text{ oder}$$

$$(2) \quad M = DK$$

und daher wegen (1) auch

$$(3) \quad P = gDK.$$

Bezeichnet man endlich das Gewicht des homogenen Körpers unter der Einheit des Cubikinhalts mit S, welches das eigenthümliche oder specifische Gewicht seiner Materie genannt wird, so ist nothwendig

$$(4) \quad P = SK.$$

Anmerkung. Unter Einheit des Cubikinhaltes wird gewöhnlich ein Wiener Cubikschuh verstanden. Manchmal wird auch ein Cubikzoll zur Einheit genommen, doch wird dieses immer eigens erwähnt werden. Die Gewichte werden wir stets auf das zur Einheit angenommene Wiener Pfund beziehen.

§. 81. Aus der Formel

$$(4) \quad P=SK \text{ folgt } K=\frac{P}{S}, \quad S=\frac{P}{K}.$$

Durch die erste dieser Formeln erhält man das wirkliche Gewicht eines Körpers aus dem Volum desselben und aus dem specifischen Gewichte seiner Materie. Hat z. B. ein Körper von Gußeisen $K = 1{\cdot}403$ Cubikschuh und ist das specifische Gewicht des Gußeisens $S = 417$ Pfunden, so ergibt sich das Gewicht dieses Körpers $1{\cdot}403 \times 417 = 585$ Pfunden. Die zweite Formel bestimmt das Volum des Körpers aus dem Gewichte desselben und aus dem specifischen Gewichte seiner Materie; so z. B. enthält ein metallener Bombenmörser, der 1755 Pfunde zum Gewichte hat, da das specifische Gewicht des Stuckmetalls $=504$ Pfunden ist, $\frac{1755}{504} = 3{\cdot}4821$ Cubikschuh. Die dritte Formel dient zur Bestimmung der specifischen Gewichte homogener Körper. So erhält man z. B. das specifische Gewicht des Schießpulvers, wenn man mit demselben ein Gefäß, dessen Volum sich genau angeben läßt, ganz ausfüllt und dann die hineingebrachte Pulvermenge gut abwägt. Das Gewicht in Pfunden durch das in Cubikschuhen ausgedrückte Volum dividirt, gibt das gesuchte specifische Gewicht des Pulvers. Um das specifische Gewicht vom Gußeisen, woraus die Kanonenkugeln bestehen, zu erhalten, wird man durch Abwägen das Gesammtgewicht von

mehren genau calibermäßigen Kugeln bestimmen und dieses durch den Cubikinhalt aller abgewogenen Kugeln dividiren.

Bei der Annahme, daß dieses specifische Gewicht einer Materie das Gewicht einer Volumeneinheit derselben Materie ist, muß man die specifischen Gewichte nach den Angaben in dem einen Lande zum Gebrauche für ein anderes mit Hilfe der bekannten Maß- und Gewichtsverhältnisse beider Länder erst auf das Maß und Gewicht des letztern reduciren, was unbequem ist, wie das folgende Beispiel zeigt. Man hat auf Wiener Maß und Gewicht bezogen das specifische Gewicht des Gußeisens = 417 Pfunden; man will das specifische Gewicht desselben Eisens für Berliner Maß und Gewicht wissen. Da 0·835181 Wiener Pfunde = 1 Berliner Pfund, und 0·992886 W. Fuß = 1 Berl. Fuß sind; so verwandeln sich 417 W. Pfde in $\frac{417}{0{\cdot}835181}$ Berlin. Pfde $= P$, und 1 W. Cubikfuß in $\frac{1}{(0{\cdot}992886)^3}$ Berliner Cubikfuß $= K$; also ist nach der dritten Formel das gesuchte specifische Gewicht

$$S = \frac{P}{K} = \frac{417(0{\cdot}992886)^3}{0{\cdot}835181} = 48{\cdot}87 \text{ Berl. Pfden}$$

für 1 Berliner Cubikfuß.

§. 82. Um daher diesen unbequemen Reductionen auszuweichen, hat man die specifischen Gewichte in einem, von den Maß- und Gewichtsverhältnissen der verschiedenen Länder unabhängigen Sinne dargestellt.

Man erhält nemlich durch die Vergleichung der Formeln (3) und (4) (§. 80) die Gleichung

$$S = gD,$$

und eben so für eine andere Materie, deren specifisches Gewicht s und Dichte d ist;

$$s = gd,$$

folglich aus der Verbindung beider Gleichungen die Proportion

$$(5)\quad S : s = D : d,$$

nach welcher sich sofort die specifischen Gewichte homogener Körper wie ihre Dichten verhalten.

Wird nun die Dichte eines homogenen Körpers, der an allen Orten der Erde gleichartig erhalten werden kann, für die Einheit angenommen, wozu man das destillirte Regenwasser als am geeignetsten anerkannte; so kann die Dichte aller übrigen homogenen Körper in Theilen dieser Einheit ausgedrückt werden. Setzt man demnach in der aufgestellten Proportion $d = 1$ und nimmt s für das specifische Gewicht des destillirten Regenwassers; so ergibt sich daraus der Quotient

$$(6) \quad D = \frac{S}{s},$$

welcher das Verhältniß des specifischen Gewichtes eines jeden homogenen Körpers zu dem specifischen Gewichte des Regenwassers darstellt. Man nennt daher diesen Quotienten das specifische Gewicht der Körper in einer zweiten Bedeutung.

Eine Tafel über die specifischen Gewichte der Körper in dieser zweiten Bedeutung, die sich nemlich auf das specifische Gewicht des Regenwassers beziehen, findet man in Lindner's logarithmischen und logarithmisch-trigonometrischen Handbuche, zweite Auflage. Daselbst findet man z. B. bei dem Queckfilber für die Temperatur von 0°R die Zahl 13·599 eingetragen, also hat das Queckfilber das 13·599fache Gewicht des Waffers unter derselben Temperatur und demselben Volum.

Ferner folgt aus der Gleichung (6)

$$(7) \quad S = sD;$$

d. h. das specifische Gewicht S eines Körpers in der ersten Bedeutung (§. 80) wird erhalten, wenn man nach der erwähnten Tafel sein specifisches Gewicht in der zweiten Bedeutung mit dem specifischen Gewicht s des destillirten Regenwassers multiplicirt.

Nach den neuesten, vom Professor Stampfer im hiesigen k. k. polytechnischen Institute, unternommenen genauen Versuchen beträgt das Gewicht eines Wiener Cubikfchuhes destillirten Regenwassers in seiner größten Dichte bei 3°R 56·346 Wiener Pfunde, daher das specifische Gewicht eines jeden andern homogenen Körpers, nemlich das Gewicht eines Cubikfchuhes seiner Materie $S = 56{\cdot}346 . D$. So ist bei Platin $S = 56{\cdot}346 \times 21{\cdot}343 = 1202{\cdot}6$ Pfunden.

Diese Erörterungen dürften hinreichend gezeigt haben, daß eine solche Tafel der specifischen Gewichte in der zweiten Bedeutung gleich bequeme Anwendung für alle Länder hat; nur muß man in jedem Lande das specifische Gewicht des Waffers für eine bestimmte Volumeinheit kennen, um das specifische Gewicht eines andern Körpers für dieselbe Volumeinheit des betreffenden Landes leicht bestimmen zu können. So ist z. B. nach der Tafel 7·4 das specifische Gewicht des Gußeisens; weiß man nun, daß der Berliner Cubikfchuh destillirten Regenwassers = 66·04 Berliner Pfunden ist, so erhält man für den Berliner Cubikfchuh desselben Eisens $66{\cdot}04 \times 7{\cdot}4 = 488{\cdot}7$ Berliner Pfunden.

§. 83. Nimmt man die Formel (4) (§. 80)

$$P = SK = sDK$$

nochmals und drückt das Gewicht eines andern Körpers durch P', sein Volum durch K', das specifische Gewicht seiner Materie durch S' in der ersten und durch D' in der zweiten Bedeutung aus, so ist auch

$$P' = S'K' = sD'K',$$

folglich

$$P : P' = SK : S'K' = DK : D'K';$$

d. h. die Gewichte homogener Körper verhalten sich wie die Producte ihrer specifischen Gewichte (der ersten oder zweiten Bedeutung) in ihre Cubikinhalte.

Ferner folgt aus dieser Proportion:

1) $P : P' = S : S' = D : D'$ für $K = K'$;

d. h. bei homogenen Körpern von gleichem Volum verhalten sich die Gewichte wie die specifischen Gewichte in beiden Bedeutungen.

2) Ist $P = P'$, so wird $KS = K'S'$ und $KD = K'D'$; sonach

$$K : K' = S' : S = D' : D;$$

d. h. bei homogenen Körpern von gleichem Gewichte sind die Cubikinhalte der Körper im verkehrten Verhältnisse ihrer specifischen Gewichte.

3) Ist endlich

$$S = S' \text{ oder } D = D',$$

haben nemlich die homogenen Körper gleiche specifische Gewichte, in welchem Falle sie von einerlei Materie oder gleichartige Körper sind; so ist

$$P : P' = K : K',$$

oder die Gewichte gleichartiger Körper verhalten sich wie ihre Cubikinhalte.

Sind überdies diese Körper ähnlich und bezeichnen A und A' gleichnamige Abmessungen derselben, so ist

$$K : K' = A^3 : A'^3, \text{ also auch } P : P' = A^3 : A'^3;$$

d. i. bei gleichartigen und ähnlichen Körpern verhalten sich die Gewichte derselben wie die dritten Potenzen ihrer gleichnamigen Abmessungen. Ein Satz, dessen Anwendbarkeit in der ausübenden Artillerie bei Bestimmung der Kugeldurchmesser und zur Einrichtung von Caliberstäben viel zu bekannt ist, als daß hier Beispiele zu seiner Erläuterung nöthig wären.

B. Vom Schwerpuncte.

§. 84. Wenn man sich einen Körper geometrisch in sehr kleine Theilchen abgetheilt denkt und erwägt (§. 79), daß auf jedes solche Theilchen eine seiner Masse proportionale Kraft vertical wirkt; so kann man sich den Körper als ein System von Puncten vorstellen, auf welches Kräfte, deren Summe das Gewicht des Körpers ist, vertical, also in einerlei Sinne parallel wirken. Diese Kräfte haben sonach stets eine Resultirende gleich dem Gewichte des Körpers (§. 74), und der Angriffspunct der Resultirenden oder der Mittelpunct der Kräfte ist gegen die Puncte des Körpers bei jeder Lagenveränderung des letztern unveränderlich. Dieser Mittelpunct, den man den Mittelpunct der Schwere oder blos den Schwerpunct des Körpers nennt, hat also auch die Eigenschaft, daß bei verticaler Unterstützung desselben die verticalen Schwerkräfte des Körpers in jeder Lage des letztern im stabilen Gleichgewichte sein müssen, oder man sagt diesfalls, der Körper ist bei verticaler Unterstützung seines Schwerpunctes im Gleichgewichte und die Unterstützung erleidet einen dem Gewichte des Körpers gleichen Druck.

Man kann sich nemlich (wie bei parallelen Kräften überhaupt) anstatt der Gesammtwirkung der die Theile des Körpers sollicitirenden verticalen Kräfte stets die Resultirende, hier das Gewicht oder die Masse des Körpers, in seinem Schwerpuncte vereinigt denken. Bilden demnach mehre schwere Massen ein System und kennt man den Schwerpunct jeder einzelnen Masse, die man sich in diesem Puncte vereint denkt; so hat man ein System beschwerter Puncte, worauf parallele Kräfte wirken, deren Mittelpunct oder Schwerpunct nach §. 74 leicht zu bestimmen ist.

§. 85. Man nennt jede Gerade, die durch den Schwerpunct geht, eine Schwerpuncts- oder Schwerlinie und jede durch denselben gelegte Ebene eine Schwerpuncts- oder Schwerebene. Da also der Durchschnitt zweier Schwerlinien den Schwerpunct und der Durchschnitt zweier Schwerebenen eine Schwerlinie gibt; so findet man den Schwerpunct durch zwei verschiedene Schwerlinien oder drei verschiedene Schwerebenen oder auch durch eine Schwerebene und eine nicht in derselben liegende Schwerlinie.

Die Eigenschaft des Schwerpunctes, daß bei dessen verticaler Unterstützung der betreffende Körper ruht, bietet nun auch die Mittel, den

Schwerpunct practisch zu bestimmen. Man hängt den Körper mit einem seiner Puncte an einen Faden frei auf, läßt ihn so von selbst in Ruhe, d. i. in Gleichgewicht kommen und bemerkt auf seiner Oberfläche zwei Puncte in der Verlängerung des vertical ausgespannten Fadens; dann gibt die Verbindungslinie beider Puncte eine Schwerlinie. Sucht man eben so durch Aufhängen des Körpers an einem andern Puncte eine zweite Schwerlinie, so gibt der Durchschnitt beider Schwerlinien den gesuchten Schwerpunct. Oder man bringt den Körper auf die horizontale scharfe Kante eines andern und verschiebt ihn darauf so lange, bis er sich auf ihr schwebend erhält, und dann ist die durch selbe gelegte Verticalebene eine Schwerebene des Körpers, welche man auf dessen Oberfläche durch eine zusammenhängende Linie bemerkt. Sucht man nun auf dieselbe Art noch zwei Schwerebenen, so gibt der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Schwerebenen den Schwerpunct.

Ist der Körper gebrechlich, so bringt man zuerst ein um eine Axe bewegliches Brett in horizontaler Lage in Gleichgewicht, gibt den besagten Körper darauf und verschiebt ihn so lange, bis er mit dem Brette bei horizontaler Lage des Letztern in Gleichgewicht tritt. Eine verticale Ebene durch die Drehaxe der Ebene gibt eine Schwerebene des Körpers u. s. w.

Anmerkung. Wir werden in der Folge den Schwerpunct blos von homogenen Körpern (§. 80) suchen und wenn der Schwerpunct von Linien oder Flächen zu suchen ist, so werden wir uns diese Linien oder Flächen stetig und gleichförmig beschwert denken, so daß gleiche Längen oder Flächentheile vom gleichen Gewichte sind.

§. 86. Wenn P das Gewicht eines Körpers, einer beschwerten Fläche oder Linie vorstellt und man sie in so kleine Theilchen theilt, daß man den Schwerpunct eines jeden derselben mit jedem seiner übrigen Puncte gleich entfernt von irgend einer Ebene oder Geraden annehmen kann; so wird man den Schwerpunct des Körpers, der Fläche oder Linie wie jenen eines Systems von beschwerten Puncten bestimmen. Sind $p, p', p'', p''', \ldots$ die Gewichte jener Theilchen, jedes in dem Schwerpuncte des betreffenden Theilchens angebracht, wobei

$$p+p'+p''+p'''+\ldots=P$$

ist; sind ferner in Beziehung auf drei zu einander senkrecht coordinirte Ebenen YZ, ZX, XY die Coordinaten der Theilchen respective x, y, z, x', y', z', $x'', y'', z'', \ldots$ und bezeichnen endlich X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunctes des betrachteten Körpers, der Fläche oder der Linie; so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten wie bei parallelen Kräften (§. 74),

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{px+p'x+p''x''+\ldots}{P} = \dfrac{\Sigma px}{P}, \\ Y = \dfrac{py+p'y'+p''y''+\ldots}{P} = \dfrac{\Sigma py}{P}, \\ Z = \dfrac{pz+p'z'+p''z''+\ldots}{P} = \dfrac{\Sigma pz}{P}, \end{array}\right.$$

wobei, da p, p', p'', . . . P positiv sind, die Zeichen der Momente mit denen der Coordinaten x, x', x'', . . . y, y', y'', . . . z, z', z'', . . . übereinkommen.

Ist der Körper homogen oder die Fläche oder Linie gleichförmig beschwert und bezeichnet man die Massen oder Cubikinhalte des Ganzen und der Theile, deren Gewichte P, p, p', p'', . . . sind, respective mit K, k, k', k'', . . ., so ist (§. 83. 3)

$$P : p = K : k, \text{ also}$$

$$p = \frac{P.k}{K} \text{ und eben so } p' = \frac{Pk'}{K},\ p'' = \frac{Pk''}{K}, \ldots$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (1) und kürzt Zähler und Nenner durch P ab, so erhält man zur Bestimmung der Coordinaten des Schwerpunctes des Körpers, der Fläche u. s. w. die Formeln

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{kx+k'x'+k''x''+\ldots}{K} = \dfrac{\Sigma kx}{K}, \\ Y = \dfrac{ky+k'y'+k''y''+\ldots}{K} = \dfrac{\Sigma ky}{K}, \\ Z = \dfrac{kz+k'z'+k''z''+\ldots}{K} = \dfrac{\Sigma kz}{K}. \end{array}\right.$$

Es ist klar, daß die Formeln (1) oder (2) auch zur Bestimmung des Schwerpunctes bei einem Systeme von unveränderlich mit einander verbundenen Körpern, Flächen und Linien dienen, deren Gewichte respective p, p', p'', . . ., Cubikinhalte k, k', k'', . . . sind und welche x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', . . . zu den Coordinaten ihrer Schwerpuncte haben.

§. 87. Aus den Gleichungen des vorigen §. läßt sich nun folgern:

1) Wird eine Summe der Momente z. B. $\Sigma kx = 0$, so ist, da K nicht Null werden kann, $X = 0$, und der Schwerpunct liegt in der Ebene YZ, worauf sich die betreffenden Momente der beschwerten Puncte oder Massen beziehen. Diese Ebene ist sonach eine Schwerebene und man kann sagen: eine Schwerebene theilt das System beschwerter

Puncte oder die Masse in zwei solche Theile, daß die Summe der Momente beider Theile bezüglich auf diese Ebene einander gleich sind.

2) Werden zwei Momentensummen Null, z. B. $\Sigma kx = 0$ und $\Sigma ky = 0$, so ist $X = 0$ und $Y = 0$, daher die Axe der z eine Schwerlinie.

3) Werden endlich die drei Momentensummen $\Sigma kx = 0$, $\Sigma ky = 0$, $\Sigma kz = 0$, so ist der Ursprung der Coordinaten der Schwerpunct des Systems.

4) Ist das System beschwerter Puncte in einer Ebene, so liegt auch der Schwerpunct des Systems in derselben, die sonach eine Schwerebene ist. Zur Bestimmung des Schwerpunctes braucht man diesfalls blos zwei rechtwinklige Axen in der Schwerebene, worauf die Momente zu beziehen sind. Nimmt man XY für diese Ebene, so erhält man die Lage des Schwerpunctes nach den beiden ersten der Formeln (1) oder (2).

5) Liegt das System der beschwerten Puncte in einer Geraden, so ist diese eine Schwerlinie. Ist die Axe der x diese Gerade, so gibt die erste der Formeln (1) oder (2) die Lage des Schwerpunctes in derselben.

§. 88. Oft läßt sich auch aus der Gestalt des Körpers oder des Systems beschwerter Puncte eine Schwerebene oder Schwerlinie, manchmal selbst der Schwerpunct desselben unmittelbar finden. Kann man nemlich ein beschwertes System durch eine Ebene so schneiden, daß auf beiden Seiten derselben immer je zwei gleiche Massen in gleichen Abständen sich vorfinden, wodurch also die Summen der Momente auf beiden Seiten der durchschneidenden Ebene einander gleich sein müssen; so ist diese (nach §. 87. 1) eine Schwerebene. Desgleichen muß bei, in einer Ebene liegenden, beschwerten Puncten diejenige in dieser Ebene gezogene Gerade, von welcher beiderseits je zwei gleich beschwerte Puncte gleich weit entfernt sind, eine Schwerlinie sein. Nach diesem ist

1) der Schwerpunct einer geraden Linie in der Mitte derselben.

2) Bei einer krummen Linie, die eine Axe hat, ist diese eine Schwerlinie.

3) Eine gerade Linie, welche eine ebene Fläche in zwei gleiche und ähnliche Theile theilt, ist eine Schwerlinie.

4) Demnach ist bei allen regelmäßigen und bei allen symmetrischen Vielecken, wie auch bei dem Kreise der Mittelpunct der Größe sowohl der Schwerpunct des Umfanges als auch der Fläche.

5) Bei allen Körpern, welche durch Umdrehung um eine Axe entstehen, ist diese eine Schwerlinie sowohl für die Oberfläche als auch für das Volum.

6) Auch bei einem schiefen Kegel ist die Axe eine Schwerlinie des Volums.

7) Bei einem geraden und schiefen Prisma oder Cylinder ist die Mitte der Verbindungslinie der Schwerpuncte von den beiden Grundflächen der Schwerpunct.

8) Jeder hohle Cylinder, d. h. ein solcher, aus welchem ein anderer concentrisch herausgeschnitten ist, hat den Schwerpunct in der Mitte der Axe.

9) Bei der Kugel ist der Mittelpunct zugleich der Schwerpunct.

§. 89. Wenn eine Masse oder ein Körper aus zwei Theilen besteht, so liegt der Schwerpunct der ganzen Masse zwischen den Schwerpuncten der beiden Theile in derselben Schwerlinie (§. 58), und man kann den Abstand des Schwerpunctes des einen Theils von einem gegebenen Puncte dieser Schwerlinie aus der bekannten Lage der Schwerpuncte des andern Theils und der ganzen Masse, dann aus dem bekannten Inhalte oder Volum der beiden Theile leicht bestimmen.

Denn sind (Fig. 33) **A** und **A'** die Schwerpuncte der beiden Theile, K und K' ihre Inhalte, ist ferner **B** der Schwerpunct der ganzen Masse, endlich **M** oder **m** der Punct, auf welchen die Momente bezogen werden, oder denkt man sich in **M** oder **m** auf **AA'** eine Momentenebene senkrecht; so hat man nach §. 63 oder §. 72 die Momentengleichungen

$$\mathbf{MB}\,(K+K') = \mathbf{MA'}.K' + \mathbf{MA}.K,$$

$$\text{oder } \mathbf{mB}\,(K+K') = \mathbf{mA'}.K' + \mathbf{mA}.K,$$

wobei die Zeichen der Momente nach dem genannten §. angenommen worden sind.

Man kann nun für den Momentenpunct **M** aus der ersten Gleichung den Abstand **MA'** oder **MA**, und für den Momentenpunct **m** aus der zweiten Gleichung den Abstand **mA'** oder **mA** des Schwerpunctes eines jeden Theils bestimmen.

Auch geben diese Gleichungen zu erkennen, daß für $\mathbf{MB} = \mathbf{MA'}$ auch $\mathbf{MA} = \mathbf{MB}$ wie für $\mathbf{MB} = \mathbf{MA}$ sich $\mathbf{MA'} = \mathbf{MB}$ finde, endlich für $\mathbf{MA'} = \mathbf{MA}$ auch $\mathbf{MB} = \mathbf{MA'} = \mathbf{MA}$ sein müsse u. s. w.; d. h. wenn die Schwerpuncte von den beiden Theilen eines beschwerten Systems zusammenfallen, so muß auch der Schwerpunct des ganzen Systems auf jene beiden Puncte treffen. Die Folgerung 8 im vorigen §. gibt davon ein Beispiel.

Anmerkung. Die Anwendung dieser Formeln wird bei der Bestimmung des Schwerpunctes der Massen oder Körper vorkommen, welche sich auf einen Körper ergänzen lassen, von welchem sowohl sein Schwerpunct als auch der des Ergänzungstheiles bekannt ist.

§. 90. Da die Lage des Schwerpunctes bei vielen Untersuchungen in der Mechanik sehr nothwendig ist, so wollen wir mehre Aufgaben über den Schwerpunct sammt ihren Lösungen hier folgen lassen.

§. 91. Schwerpunct von Linien.

I. Man soll den Schwerpunct von dem Umfange eines Dreieckes finden.

Es sei **ABC** (Fig. 34) das Dreieck, dessen Umfang gleichförmig beschwert ist. Theilt man jede Seite desselben in zwei gleiche Theile, so ist die Mitte der Schwerpunct derselben, worin man sich das Gewicht der betreffenden Seite vereint vorstellen kann. Man hat demnach statt des beschwerten Umfanges die drei, respective durch **AB**, **AC**, **BC** beschwerten Puncte **L**, **M**, **N**, deren Schwerpunct sofort auch der jenes Umfanges ist.

Um diesen Schwerpunct zu finden, bilde man durch die Verbindung der beschwerten Puncte das Dreieck **LMN** und nehme **P** für den Schwerpunct der beiden beschwerten Puncte **L** und **N**, ziehe dann **PM**, und es ist diese Gerade eine Schwerlinie der drei beschwerten Puncte **L**, **M**, **N**, also auch des Umfanges **ABC**, wobei für eine durch **P** senkrecht auf **LN** gelegte Ebene die Momente von **L** und **N** einander gleich (§. 87. 1) sind, nemlich

$$AB.LP = BC.PN.$$

Nun ist wegen

$LB = AL = \frac{1}{2}AB$, $AM = MC = \frac{1}{2}AC$, $BN = NC = \frac{1}{2}BC$,
LN zu **AC**, **MN** zu **AB**, **ML** zu **BC** parallel, somit

$$\tfrac{1}{2}AB = MN,\ \tfrac{1}{2}BC = LM$$

und weil man jene Momentengleichung auch

$$\tfrac{1}{2}AB.LP = \tfrac{1}{2}BC.PN$$

schreiben kann, so hat man durch die Substitution von **MN** und **LM** anstatt $\frac{1}{2}AB$ und $\frac{1}{2}BC$ die Gleichung

$$MN.LP = LM.NP$$

und daraus die Proportion

$$MN : LM = NP : LP.$$

Nach dieser Proportion wird also durch die Schwerlinie **MP** der Winkel **M** des Dreieckes **LMN** in zwei gleiche Theile getheilt. Theilt man daher noch einen andern Winkel **N** dieses Dreieckes durch **NQ** in zwei gleiche

II.a Schwerpunkt eines Polygons. Ist $p, p', p'' \ldots p^{(n)}$ die Gewichte der Polygonseiten u. x, y die Coordinaten für den Mittelpunkt der ersten Seite, für $p \ldots$ u. heißt S die Summe der Seiten, so ist $x = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}$; $y = \frac{\Sigma py}{\Sigma p} = \frac{\Sigma py}{S}$ [illegible]

Theile; so ist auch diese eine Schwerlinie, sofort der Durchschnitt S der beiden Schwerlinien MP und NQ der gesuchte Schwerpunct von dem Umfange des Dreieckes ABC, der zugleich mit dem Mittelpuncte des in das Dreieck MNL einbeschriebenen Kreises übereinkommt.

II. Man soll den Schwerpunct eines Kreisbogens angeben.

Theilt man den gleichförmig beschwerten Kreisbogen BAD (Fig. 35), dessen Mittelpunct C ist, bei A in zwei gleiche Theile, so ist der Halbmesser CA eine Schwerlinie (§. 88. 2), in welcher der Schwerpunct S des Bogens BAD liegen muß. Theilt man ferner den Bogen in sehr kleine Elemente, so daß man jedes wie Mm für eine gerade Linie annehmen kann, zieht die Sehne BD und zu derselben durch den Mittelpunct C die Parallele X'X, worauf man die Momente bezieht; so ist Mm.PN das Moment des Elementes Mm, dessen Schwerpunct N in seiner Mitte angenommen werden kann.

Zieht man ferner den Halbmesser CN, dann zu BD die Geraden MQ, mq senkrecht und mn parallel, so ergeben sich die ähnlichen Dreiecke Mmn und NCP, da ihre Seiten wechselweise auf einander senkrecht sind. Aus diesen Dreiecken folgt

$$Mm : mn = NC : NP \text{ oder}$$
$$Mm : Qq = NC : NP \text{ und daraus}$$
$$Mm.PN = NC.Qq,$$

d. h. das Moment eines jeden Bogen-Elementes gleicht dem Producte des Halbmessers in die Projection des Elementes auf die Sehne BD und da die Summe der Projectionen aller Bogen-Elemente diese Sehne ausmacht; so ist die Summe der Momente aller Elemente das Product aus dem Halbmesser in die Sehne des Bogens, nemlich = NC. chord. BD und weil diese Summe auch das Moment des Bogens BAD, mithin das Product dieses Bogens in den Abstand CS seines Schwerpunctes S ist; so ist

$$CS.\text{arc BAD} = NC.\text{chord BD} = AC.\text{chord BD, oder}$$
$$\text{arc BAD} : \text{chord BD} = AC : CS.$$

Es verhält sich also der Bogen zu der Sehne, wie der Halbmesser zum Abstande des Schwerpunctes vom Mittelpuncte des Kreises und der Schwerpunct liegt in dem zur Mitte des Bogens gezogenen Halbmesser.

Ist der Bogen BAD ein Quadrant und der Halbmesser $NC = AC = r$; so wird

+ gries 1/4 $Tz=14$, $kl=19,5$, $CD=28,2$, $DE=24$, $Ed=18$
$x=25$ $x'=39$ $x''=32$ $x'''=16$ $y'''=19$
$y=13,5$ $y'=24$ $y''=41$ $y''=38$ $x'''=14$

$$X = \frac{27642}{1081,2} = 25,2. \qquad Y = \frac{71417}{1081,2} = 29.$$

$$\text{arc BAD} = \frac{r\pi}{2}, \quad \text{chord BD} = r\sqrt{2}; \text{ also}$$

$$\frac{\pi}{2} : \sqrt{2} = r : \text{CS und CS} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \; r = 0{\cdot}900317.r$$

$$\text{oder nahe CS} = \frac{9}{10}\, r.$$

Für den Halbkreis, wo $\text{arc BAD} = r\pi$, $\text{chord BD} = 2r$ ist, hat man

$$\pi : 2 = r : \text{CS und CS} = \frac{2}{\pi} r = 0{\cdot}63662.r;$$

$$\text{oder sehr nahe CS} = \frac{7}{11}\, r.$$

§. 92. Schwerpunct von Flächen.

III. Man soll den Schwerpunct eines Dreieckes bestimmen.

Theilt man (**Fig.** 36) eine Seite **AB** des Dreieckes **ABD** in zwei gleiche Theile und verbindet den Theilungspunct **E** mit dem gegenüber liegenden Scheitel **D**, so muß die Verbindungslinie **DE** eine Schwerlinie sein. Denn zieht man in dem Dreiecke wo immer eine Parallele zu **AB**, so wird sie durch **ED** in zwei gleiche Theile getheilt und der Schwerpunct dieser Parallelen liegt in dem Durchschnittspuncte. Denkt man sich durch **DE** eine Ebene gelegt, so werden die Momente auf beiden Seiten dieser Ebene einander gleich sein, also ist diese Ebene eine Schwerebene; und da auch die Ebene des Dreieckes eine Schwerebene ist, so muß der gemeinschaftliche Durchschnitt, nemlich **DE** eine Schwerlinie sein. Verbindet man die Mitte **F** einer andern Seite **DB** mit dem gegenüber liegenden Scheitel **A**, so ist auch **AF** eine Schwerlinie, also der Durchschnittspunct **C** der beiden Schwerlinien **AF** und **DE** der Schwerpunct des Dreieckes.

Verbindet man den dritten Scheitel **B** mit **C**, so muß dadurch **AD** in **G** in zwei gleiche Theile getheilt werden. Denn zieht man die Gerade **EF**, so wird sie parallel zu **AD**, und es ist

$$\text{EF} = \tfrac{1}{2}\text{AD}, \; \text{EJ} = \tfrac{1}{2}\text{AG},$$

also sind in den ähnlichen Dreiecken **ECF** und **ACD** die Seiten des erstern die Hälften von den gleichnamigen Seiten des letztern, mithin $\text{EC} = \tfrac{1}{2}\text{CD}$, weshalb in den ähnlichen Dreiecken **ECJ** und **DCG** die gleichnamigen Seiten wie 1 zu 2 sich verhalten und $\text{EJ} = \tfrac{1}{2}\text{GD}$ ist; da aber auch $\text{EJ} = \tfrac{1}{2}\text{AG}$ ist, so wird $\text{DG} = \text{GA}$.

Ferner wird, da $EC = \frac{1}{2}CD$ oder $2EC = CD$ und $EC + CD = ED$ ist,

$$EC = \tfrac{1}{3}ED, \text{ also } CD = \tfrac{2}{3}ED,$$

d. h. wenn man aus dem Scheitel eines Winkels des Dreieckes zu der Mitte der gegenüber liegenden Seite eine Gerade (Schwerlinie) zieht, so ist sein Schwerpunct in dieser Geraden um zwei Drittheile derselben von jenem Scheitel entfernt.

Fällt man (Fig. 37) aus den drei Spitzen A, B, D eines Dreieckes, seinem Schwerpuncte C und der Mitte F einer Seite auf eine Ebene die Senkrechten $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, $F\varphi$; so entsteht hiedurch das projicirte Dreieck $\alpha\beta\delta$, in welchem ebenfalls $\delta\beta$ bei φ in zwei gleiche Theile getheilt wird und γ der Schwerpunct desselben, also $\alpha\gamma = \frac{2}{3}\alpha\varphi$ ist. Führt man durch A zu $\alpha\varphi$ die Parallele An, so wird, da $AC = \frac{2}{3}AF$ ist, $Cm = \frac{2}{3}Fn$,
und da $m\gamma = A\alpha = \frac{2}{3}A\alpha + \frac{1}{3}A\alpha = \frac{2}{3}n\varphi + \frac{1}{3}A\alpha$ ist, so erhält man

$$C\gamma = Cm + m\gamma = \tfrac{2}{3}F\varphi + \tfrac{1}{3}A\alpha.$$

Nun ist in dem Trapeze $D\delta\beta B$ wegen $DF = FB$ bekanntlich

$$F\varphi = \frac{D\delta + B\beta}{2} \text{ oder } 2F\varphi = D\delta + B\beta, \text{ also}$$

$$C\gamma = \frac{D\delta + B\beta + A\alpha}{3};$$

d. h. der Abstand des Schwerpunctes eines Dreieckes von einer Ebene gleicht dem dritten Theile der Summe der Abstände seiner drei Spitzen von dieser Ebene und es besteht daher auch der Cubikinhalt eines schiefen dreiseitigen Prisma aus dem Producte der senkrechten Durchschnittsfläche in den Abstand der Schwerpuncte beider Grundflächen. Schafft man den Nenner der letzten Gleichung hinweg und multiplicirt sie mit irgend einem Gewichte P, wodurch man

$$C\gamma\ (P + P + P) = D\delta.P + B\beta.P + A\alpha.P$$

erhält; so ist klar, daß der Schwerpunct eines Dreieckes mit jenem seiner drei gleich beschwerten Spitzen übereinkommt, d. h. man erhält den Schwerpunct eines Dreieckes, wenn man dasselbe für unschwer ansieht, dafür in seinen Spitzen A, B, D gleiche Gewichte anbringt und den Schwerpunct dieser drei gleich beschwerten Puncte sucht.

Wenn man die Abstände auf eine Gerade, die sich jedoch in der Ebene des Dreieckes befinden muß, bezieht, so erhält man dieselben Gleichungen zwischen den Abständen.

IV. Man soll den Schwerpunct eines Trapezes suchen.

Verlängert man die beiden nicht parallelen Seiten AC und DB (Fig. 38) des Trapezes ABDC, bis sie in dem Puncte E zusammen-

stoßen, so erhält man ein Dreieck **AEB**. Zieht man nun zur Mitte **F** der Seite **AB** aus **E** die Gerade **EF**, so werden dadurch alle zur Seite **AB** Parallelen in zwei gleiche Theile getheilt; es liegt also in **EF** sowohl der Schwerpunct **P** des Dreieckes **AEB** als der Schwerpunct q des Ergänzungsdreieckes **CED**, folglich auch der Schwerpunct p des Trapezes.

Setzt man $\mathbf{GF}=a$, $\mathbf{CD}=b$, $\mathbf{AB}=c$, den Winkel $\mathbf{EGD}=\varphi$ und $\mathbf{EG}=x$; so wird

$$\mathbf{EF}:\mathbf{EG}=\mathbf{AB}:\mathbf{CD} \text{ oder}$$

$$\mathbf{EF}-\mathbf{EG}:\mathbf{EG}=\mathbf{AB}-\mathbf{CD}:\mathbf{CD}, \text{ nemlich}$$

$$a:x=c-b:b, \text{ daher } x=\frac{ab}{c-b} \text{ und } \mathbf{EF}=\frac{ac}{c-b}.$$

Nun ist $\mathbf{EF}.\sin\varphi=\frac{ac}{c-b}.\sin\varphi$ die Höhe des Dreieckes **ABE**,

$\mathbf{EG}.\sin\varphi=\frac{ab}{c-b}.\sin\varphi$ jene des Dreieckes **CED** und

$\mathbf{GF}.\sin\varphi=a.\sin\varphi$ die des Trapezes;

folglich ist $\frac{ac^2}{2(c-b)}.\sin\varphi$ der Inhalt des Dreieckes **ABE**,

$\frac{ab^2}{2(c-b)}.\sin\varphi$ jener des Dreieckes **CED**, und

$\frac{a(b+c)}{2}.\sin\varphi$ der des Trapezes.

Ferner ist wegen III

$$\mathbf{FP}=\tfrac{1}{3}\mathbf{FE}=\frac{ac}{3(c-b)},$$

$$\mathbf{Fq}=\mathbf{FG}+\tfrac{1}{3}\mathbf{GE}=a+\frac{ab}{3(c-b)}=\frac{a(3c-2b)}{3(c-b)},$$

und nach §. 89

$$\mathbf{Fp}=\frac{\mathbf{AEB}.\mathbf{FP}-\mathbf{CED}.\mathbf{Fq}}{\mathbf{ACDB}}.$$

Werden die obigen Werthe substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$Fp = \tfrac{1}{3}\frac{a(c+2b)}{c+b} = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}\frac{ab}{c+b},$$

$$\text{und } Gp = \tfrac{2}{3}a - \tfrac{1}{3}\frac{ab}{c+b} = \tfrac{1}{3}a\frac{(2c+b)}{c+b}.$$

Wird $b = c$, so verwandelt sich das Trapez in ein Parallelogramm; in diesem Falle ist $Fp = Gp = \frac{1}{2}a$; also ist in einem Parallelogramme der Durchschnittspunct der beiden Diagonalen der Schwerpunct, wie es aus §. 88. 3 erhellt.

Wird $b = 0$, so geht das Trapez in ein Dreieck über und es ist $Fp = \frac{1}{3}a$ oder $Gp = \frac{2}{3}a$, wie in III.

Durch Construction findet man den Schwerpunct eines Trapezes auf folgende Art (Fig. 39). Man ziehe die Schwerlinie GF durch die Mitte G und F von CD und AB, theile das Trapez durch AD in die zwei Dreiecke ADB und ADC, ziehe DF und AG und mache

$$Fn = \tfrac{1}{3}FD, \quad Gm = \tfrac{1}{3}AG$$

wodurch n und m die Schwerpuncte der beiden Dreiecke werden und die Verbindungslinie mn derselben sonach ebenfalls eine Schwerlinie des Trapezes ist, welche sofort mit der Schwerlinie GF den Durchschnittspunct p als Schwerpunct gibt. Führt man, um Fp durch a, b, c auszudrücken, mk und nl parallel zu CD, so ist wegen

$$mG = \tfrac{1}{3}AG \text{ und } nF = \tfrac{1}{3}FD$$

nothwendig

$mk = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{6}c$, $nl = \frac{1}{3}GD = \frac{1}{6}b$, $Gk = lF = \frac{1}{3}a$, also auch $lk = \frac{1}{3}a$

und man erhält aus den ähnlichen Dreiecken mpk und pnl

$$pk : pl = mk : nl, \text{ woraus}$$
$$lk : pl = mk + nl : nl \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{3}a : pl = \tfrac{1}{6}(c+b) : \tfrac{1}{6}b \text{ und}$$
$$pl = \tfrac{1}{3}\frac{ab}{c+b}, \text{ also}$$

$$Fp = Fl + pl = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}\frac{ab}{c+b}$$

wie zuvor folgt.

V. Man soll den Schwerpunct eines Kreisausschnittes bestimmen.

Denkt man sich (Fig. 40) den Bogen ADB in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und die Theilungspuncte mit dem Mittelpuncte C verbunden, so werden unendlich viele gleiche Ausschnitte entstehen, die von

den gleichschenkligen Dreiecken, welche man erhält, wenn man immer die nächsten Theilungspuncte verbindet, gar nicht verschieden sein werden. Die Höhe eines jeden dieser Dreiecke, die zugleich die Theilungslinie der Grundlinie vorstellt, ist der Halbmesser des Kreises. Es ist also der Schwerpunct eines jeden dieser Ausschnitte um zwei Drittheile des Halbmessers von dem Mittelpuncte C entfernt. Wenn man demnach mit $CE = \frac{2}{3} CA$ einen concentrischen Kreisbogen EFG beschreibt; so liegen die Schwerpuncte aller Elemente in diesem Bogen. Denkt man sich die Massen der Elemente in ihren Schwerpuncten vereinigt, so werden diese Massen, weil die Elemente einander gleich sind, auf dem Bogen EFG gleichförmig vertheilt sein; es ist also der Schwerpunct Q dieses Bogens zugleich der Schwerpunct aller Elemente, folglich auch der des Kreisausschnittes. Nun ist nach II, weil in dem mittlern Halbmesser CD der Punct Q der Schwerpunct des Bogens EFG, also auch der Schwerpunct des Ausschnittes liegen muß,

$$EFG : EG = CF : CQ.$$

Ferner ist, weil die beiden Ausschnitte CADB und CEFG einander ähnlich sind,

$$EFG : EG = ADB : AB, \text{ folglich ist}$$

$$ADB : AB = \tfrac{2}{3} CD : CQ;$$

d. h. bei einem Kreisausschnitte verhält sich der Bogen zu der Sehne, wie zwei Dritttheile des Halbmessers zu dem Abstande des Schwerpunctes vom Mittelpuncte und der Schwerpunct liegt in dem Halbmesser, welcher zu der Mitte des Bogens gezogen ist.

VI. Man soll den Schwerpunct eines Kreisabschnittes finden.

Werden (Fig. 41) die Durchschnittspuncte A und B der Sehne und des Bogens mit dem Mittelpuncte C verbunden, so erhält man den Kreisabschnitt CADB und zieht man zu der Mitte D des Bogens ADB den Halbmesser CD; so liegt in demselben, weil er auch die Sehne AB und den Abschnitt ADB in zwei gleiche Theile theilt, wegen V der Schwerpunct P des Kreisausschnittes, wegen III jener q des Dreieckes ACB, endlich wegen §. 88. 3 jener p des Kreisabschnittes, folglich ist nach §. 89

$$Cp = \frac{CP.CADB - Cq.CAB}{ADB}.$$

Setzt man die Höhe ED des Abschnittes $= a$, die halbe Sehne AE $= b$, den Halbmesser CD $= r$, den Inhalt des Abschnittes $= F$ und den Bogen ADB $= z$, so ist

$$b^2 = 2ar - a^2 \text{ und wegen V}$$

$$z : 2b = \tfrac{2}{3}r : \text{CP oder CP} = \tfrac{4}{3}\frac{br}{z}, \text{ daher}$$

$$\text{CP.CADB} = \tfrac{4}{3}.\frac{br}{z}.\tfrac{1}{2}rz = \tfrac{2}{3}br^2,$$

$$\text{Cq.CAB} = \tfrac{2}{3}(r-a).\,b\,(r-a) = \tfrac{2}{3}b\,(r-a)^2.$$

Es ist also

$$\text{Cp} = \frac{\tfrac{2}{3}br^2 - \tfrac{2}{3}b\,(r-a)^2}{F} = \tfrac{2}{3}\frac{b^3}{F}.$$

Wird $b = r$, so geht der Abschnitt in den Halbkreis über, in diesem Falle ist $F = \tfrac{1}{2}r^2\pi$, folglich ist für den Halbkreis der Abstand des Schwerpunctes von dem Mittelpuncte $= \tfrac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0{\cdot}4244.r.$

VII. Man soll den Schwerpunct einer Fläche bestimmen, welche von zwei concentrischen Kreisbogen und zwei Halbmessern eingeschlossen ist.

Ist ADBβδαA (Fig. 42) diese Fläche als die Differenz der Kreisausschnitte ACBD und αCβδ, und zieht man zur Mitte des Bogens ADB den Halbmesser CD; so ist dieser eine Schwerlinie der beiden Ausschnitte, also auch eine Schwerlinie der Fläche αADBβ. Wird demnach durch q der Schwerpunct dieser Fläche, durch P jener des größern Ausschnittes und durch p der des kleinern vorgestellt; so ist (§. 89)

$$\text{Cq} = \frac{\text{CP.ACBD} - \text{Cp.}\alpha\text{C}\beta\delta}{\text{ACBD} - \alpha\text{C}\beta\delta}.$$

Bezeichnet nun bei dem größern Ausschnitte A den Bogen, C die Sehne, R den Halbmesser und sind a, c, r diese Größen bei dem kleineren; so hat man vermöge V

$$\text{CP} = \tfrac{2}{3}\frac{CR}{A}, \quad \text{Cp} = \tfrac{2}{3}\frac{cr}{a},$$

und da bekanntlich die Flächen der Ausschnitte

$$\text{ACBD} = \frac{AR}{2}\ ,\ \alpha C\beta\delta = \frac{ar}{2}$$

sind; so erhält man nach Substitution dieser Ausdrücke,

$$Cq = \tfrac{2}{3}\,\frac{(CR^2 - cr^2)}{AR - ar},\ \text{oder da wegen}$$

$R : r = C : c$ sich $c = \dfrac{Cr}{R}$ und wegen $R : r = A : a$ sich $a = \dfrac{Ar}{R}$ ergibt,

$$Cq = \tfrac{2}{3}\frac{C}{A} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \tfrac{2}{3}\frac{C}{A} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}.$$

Wird der Bogen $A = \text{ADB}$ so klein, daß man ihn seiner Sehne $C = \text{AB}$ gleich annehmen kann, so ergibt sich diesfalls

$$Cq = \tfrac{2}{3}\,\frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} = r + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3.4(r + \frac{\alpha}{2})} = R - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3.4(R - \frac{\alpha}{2})},$$

wenn man $R - r = \alpha$ setzt.

VIII. Man soll den Schwerpunct einer elliptischen Fläche bestimmen.

Es sei NBN′B′ (Fig. 43) eine Ellipse, A ihr Mittelpunct und $\text{AB} = a$, $\text{AN} = b$ seien ihre Halbaxen. Man beschreibe aus A mit dem Halbmesser $\text{AB} = a$ den Halbkreis nBn′, schneide das Stück AP ab, theile dasselbe in unendlich kleine Theile und führe durch die Theilungspuncte Parallelen zu AN bis an den Kreisbogen mn; so wird hiedurch sowohl die Fläche APMN der Ellipse als auch die Fläche APmn des Kreises in Elemente, die man als Rechtecke ansehen kann, abgetheilt.

Ist pqw ein solches kleines Rechteck der Ellipse, pqw′ das zugehörige Rechteck des Kreises und berücksichtigt man, daß der Schwerpunct jedes Rechteckes sein Mittelpunct, also bei ersterem Rechtecke um $\frac{1}{2}$ pw, bei letzterem um $\frac{1}{2}$ pw′ von der Geraden AP und bei beiden Rechtecken um $\text{Ap} + \frac{1}{2}$pq von der Geraden AN entfernt ist; so hat man in Bezug auf AP

von pqw das Moment $m = \frac{1}{2}\,\text{pw.pqw}$,
„ pqw′ „ „ „ $m' = \frac{1}{2}\,\text{pw}'.\text{pqw}'$
und in Bezug auf AN
von pqw das Moment $\mu = (\text{Ap} + \frac{1}{2}\text{pq})\,\text{pqw}$,
„ pqw′ „ „ „ $\mu' = (\text{Ap} + \frac{1}{2}\text{pq})\,\text{pqw}'$.

Sonach ist $m : m' = \text{pw.pqw} : \text{pw}'\,\text{pqw}'$,
$\mu : \mu' = \text{pqw} : \text{pqw}'$.

Nun hat man bekanntlich zwischen der elliptischen und der Kreis-Ordinate die Proportion

$$pw : pw' = b : a,$$

ferner zwischen den Rechtecken pqw und pqw', da sie einerlei Grundlinie pq haben, die Proportion

$$pqw : pqw' = pw : pw' = b : a, \text{ folglich}$$
$$m : m' = b^2 : a^2 \text{ und}$$
$$\mu : \mu' = b : a.$$

Es verhält sich also das Moment jedes elliptischen Elementes zu dem Momente des zugehörigen Kreiselementes wie $b^2 : a^2$ in Bezug auf AP und wie $b : a$ in Bezug auf AN; also müssen die Summen der Momente bei der Ellipse und dem Kreise, oder die Momente der Flächen APMN und APmn wie $b^2 : a^2$ im ersten Falle und wie $b : a$ im zweiten sich verhalten. Man hat nemlich, wenn Y und Y' den Abstand des Schwerpunctes dieser Flächen von AP, X und X' den Abstand desselben von AN bezeichnen,

$$Y.APMN : Y'.APmn = b^2 : a^2,$$
$$X.APMN : X'.APmn = b : a.$$

Da aber die Elemente der Ellipse und des Kreises wie $b : a$, also auch die Summen derselben oder die Flächen APMN : APmn $= b : a$ sind, so folgt aus den letzteren Proportionen offenbar

$$Y : Y' = b : a \text{ und}$$
$$X : X' = 1 : 1 \text{ oder } X = X',$$

d. h. kennt man den Schwerpunct S' des Kreisstückes APmn durch die Coordinaten X', Y'; so ist auch der Schwerpunct S des zugehörigen elliptischen Stückes APMN durch

$$Y = \frac{b}{a}.Y' = \frac{b}{a}.LS' = LS$$

und $X = X' =$ AL bestimmt.

Wenn man nach III und V den Schwerpunct des Dreieckes APm und des Ausschnittes mAn bestimmt, dann die Summe der Momente beider Flächen in Bezug auf AP und in Bezug auf AN macht, endlich jede Summe durch die Summen beider Flächen dividirt; so ergibt sich leicht für den Schwerpunct S' des Kreisstückes AnmP, wenn man AP $= x$ setzt,

$$Y' = LS' = \frac{x\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right)}{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}},$$

$$X' = AL = \frac{\frac{2}{3}\left[a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]}{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}},$$

folglich für den Schwerpunct S des elliptischen Stückes ANMP

$$Y = LS = \frac{\frac{bx}{a}\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right)}{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}},$$

$$X = AL = \frac{\frac{2}{3}\left[a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]}{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}}.$$

Übrigens ist (§. 88. 2) L der Schwerpunct von MNN′M′, und für AQ = AP ist K der Schwerpunct von MRQP.

Wird $x = a$, so erhält man für den Schwerpunct des elliptischen Quadranten BAN

$$Y = \frac{4b}{3\pi}, \quad X = \frac{4a}{3\pi},$$

also für den Schwerpunct der halben Ellipse NBN′, der auf AB liegt,

$$X = \frac{4a}{3\pi}$$

und für den Schwerpunct der halben Ellipse BNB′, der auf AN sich befindet,

$$Y = \frac{4b}{3\pi}.$$

§. 93. Um allgemein den Schwerpunct einer Fläche zu bestimmen, die von irgend einer krummen Linie NM (Fig. 44), von der Abscisse AP und von den rechtwinkligen Ordinaten AN, PM eingeschlossen wird, kann man folgendes Verfahren einschlagen.

1) Man theile die Abſciſſe $AP = x$ in n gleiche Theile

$$Ap_1 = p_1p_2 = p_2p_3 = \ldots = p_{n-1}P = \frac{x}{n} = h,$$

ziehe durch dieſe Theilungspuncte zu AN die Parallelen oder Ordinaten

$$p_1m_1,\ p_2m_2,\ p_3m_3,\ \ldots\ p_{n-1}m_{n-1},$$

wodurch die Fläche in n trapezförmige Elemente

$$Ap_1m_1N,\ p_1p_2m_2m_1,\ p_2p_3m_3m_2,\ \ldots\ p_{n-1}PMm_{n-1}$$

getheilt wird. Verzeichnet man nun zu jedem dieſer Elemente das ein- und das umbeſchriebene Rechteck und nennt die Ordinaten

$$AN,\ p_1m_1,\ p_2m_2,\ p_3m_3,\ \ldots\ p_{n-1}m_{n-1},\ PM$$

reſpective $y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_{n-1},\ y_n,$

welche den Abſciſſen

$$0,\quad h,\quad 2h,\quad 3h,\ \ldots\ (n-1)h,\quad nh = x$$

entſprechen; ſo erhält man

für die Summe der einbeſchriebenen Rechtecke

$$f_1 = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$

und für die der umbeſchriebenen

$$f_2 = h(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n).$$

Da die Differenz beider Summen

$$f_2 - f_1 = h(y_n - y_0) = \frac{x}{n}(y_n - y_0)$$

für ein unendlich großes n unendlich klein wird und der Flächeninhalt **ANMP**, der f heißen mag, offenbar zwiſchen f_1 und f_2 liegt, d. h. $f_1 < f < f_2$ iſt, ſo braucht man blos f_1 oder f_2 zu beſtimmen und in den dafür erhaltenen Ausdrücken n unendlich groß anzunehmen, um den Ausdruck für f zu erhalten.

2) Iſt ferner **S** der Schwerpunct der betrachteten Fläche **APMN**, und bezeichnet man die Summen der Momente von den ein- und umbeſchriebenen Rechtecken in Bezug auf die Gerade AN reſpective mit m_1 und m_2, das Moment jener Fläche aber mit $m = \mathrm{KS}.f$; ſo ergibt ſich, da der Schwerpunct eines jeden Rechteckes ſein Mittelpunct iſt,

für die Summe der Momente von den einbeſchriebenen Rechtecken

$$m_1 = hy_0.\frac{h}{2} + hy_1.\frac{3h}{2} + hy_2.\frac{5h}{2} + \ldots + hy_{n-1}.\frac{(2n-1)h}{2}$$

$$= \frac{h^2}{2}[y_0 + 3y_1 + 5y_2 + \ldots + (2n-1)y_{n-1}],$$

und für die Summe der Momente von den umbeschriebenen

$$m_2 = hy_1 \cdot \frac{h}{2} + hy_2 \cdot \frac{3h}{2} + hy_3 \cdot \frac{5h}{2} + \ldots + hy_n \cdot \frac{(2n-1)h}{2}$$

$$= \frac{h^2}{2}[y_1 + 3y_2 + 5y_3 + \ldots + (2n-1)y_n].$$

Die Differenz beider Momentensummen ist

$$m_2 - m_1 = \frac{h^2}{2}\left\{\begin{array}{c} -y_0 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1} + 2ny_n \\ -y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1} - y_n \end{array}\right\} =$$

$$= h\left(nhy_n - \frac{f_1 + f_2}{2}\right) = \frac{x}{n}\left(xy_n - \frac{f_1 + f_2}{2}\right),$$

welche für ein unendlich großes n, wo f_1 und f_2 in f übergehen, den Werth

$$\frac{x}{n}(\mathbf{APMR} - \mathbf{APMN}) = \frac{x}{n}.\mathbf{NMR}$$

erhält, sofort unendlich klein wird.

Man kann sonach m für ein unendlich großes n als die Grenze von m_1 oder m_2 ansehen.

Nimmt man **AP** als die Gerade, worauf die Momente bezogen werden und bezeichnet mit μ_1 und μ_2 die Summen der Momente von den ein- und umbeschriebenen Rechtecken, endlich mit $\mu = \mathbf{LS}.f$ das Moment der Fläche **APMN**; so ist $\mu_1 < \mu < \mu_2$ und

$$\mu_1 = hy_0 \cdot \frac{y_0}{2} + hy_1 \cdot \frac{y_1}{2} + hy_2 \cdot \frac{y_2}{2} + \ldots + hy_{n-1} \cdot \frac{y_{n-1}}{2}$$

$$= \frac{h}{2}(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2),$$

$$\mu_2 = hy_1 \cdot \frac{y_1}{2} + hy_2 \cdot \frac{y_2}{2} + hy_3 \cdot \frac{y_3}{2} + \ldots + hy_n \cdot \frac{y_n}{2}$$

$$= \frac{h}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2);$$

aber die Differenz

$$\mu_2 - \mu_1 = \frac{h}{2}(y_n^2 - y_0^2) = \frac{x}{n}\frac{(y_n^2 - y_0^2)}{2}$$

erhält für ein unendlich großes n einen unendlich kleinen Werth, also ist μ die Grenze von μ_1 oder μ_2.

3) In dem Falle nun, wo die krumme Linie durch eine Function zwiſchen ihren Coordinaten dargeſtellt werden kann, ſo daß alſo zwiſchen **AP**$=x$ und **PM**$=y$ die Abhängigkeit

$$(1) \qquad y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

ſtattfindet, läßt ſich der Schwerpunct **S** der Fläche **APMN** genau beſtimmen.

Zu dieſem Ende ſetze man in Gleichung (1) ſucceſſive

$$x = h,\ 2h,\ 3h, \ldots nh,$$

und man erhält

$$y_1 = A.1^a.h^a + B.1^b.h^b + C.1^c.h^c + \ldots,$$
$$y_2 = A.2^a.h^a + B.2^b.h^b + C\,2^c.h^c + \ldots,$$
$$y_3 = A.3^a.h^a + B.3^b.h^b + C.3^c.h^c + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = A.n^a.h^a + B.n^b.h^b + C.n^c.h^c + \ldots,$$

folglich durch die Subſtitution dieſer Werthe in f_2 und m_2

$$f_2 = Ah^{a+1}(1^a + 2^a + 3^a + \ldots\ldots + n^a)$$
$$+ Bh^{b+1}(1^b + 2^b + 3^b + \ldots\ldots + n^b)$$
$$+ Ch^{c+1}(1^c + 2^c + 3^c + \ldots\ldots + n^c)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_2 = \frac{Ah^{a+2}}{2}[1^a + 3.2^a + 5.3^a + \ldots + (2n-1)n^a]$$
$$+ \frac{Bh^{b+2}}{2}[1^b + 3.2^b + 5.3^b + \ldots + (2n-1)n^b]$$
$$+ \frac{Ch^{c+2}}{2}[1^c + 3.2^c + 5.3^c + \ldots + (2n-1)n^c]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es iſt aber (Vega's I. B. 6. Aufl. §. 335)

$$1^z + 2^z + 3^z + \ldots n^z = \frac{n^{z+1}}{z+1} + \frac{n^z}{2} + \frac{z}{12}.n^{z-1} + \ldots$$

Ferner iſt

$$1^z + 3.2^z + 5.3^z + \ldots + (2n-1)n^z =$$
$$(2.1-1)\,1^z + (2.2-1)\,2^z + (2.3-1)\,3^z + \ldots + (2.n-1)n^z =$$
$$2(1^{z+1} + 2^{z+1} + 3^{z+1} + \ldots + n^{z+1}) - (1^z + 2^z + 3^z + \ldots + n^z)$$

$$= 2\left(\frac{n^{\varkappa+2}}{\varkappa+2} + \frac{n^{\varkappa+1}}{2} + \frac{\varkappa+1}{12}\cdot n^{\varkappa} + \ldots\right) - \left(\frac{n^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} + \frac{n^{\varkappa}}{2} + \ldots\right)$$

$$= 2\cdot\frac{n^{\varkappa+2}}{\varkappa+2} + \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\cdot n^{\varkappa+1} + \frac{\varkappa-2}{2\cdot 3}\cdot n^{\varkappa} + \ldots;$$

daher, wenn man die Summen dieser beiden Reihen in f_2 und m_2 substituirt und $h = \frac{x}{n}$ setzt

$$f_2 = A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{A}{2}\cdot x^{a+1} + \frac{B}{2}\cdot x^{b+1} + \frac{C}{2}\cdot x^{c+1} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left(\frac{Aa}{12}\cdot x^{a+1} + \frac{Bb}{12}\cdot x^{b+1} + \frac{Cc}{12}\cdot x^{c+1} + \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_2 = A\frac{x^{a+2}}{a+2} + B\frac{x^{b+2}}{b+2} + C\frac{x^{c+2}}{c+2} + \ldots$$
$$\frac{1}{n}\left(\frac{a}{a+1}\frac{A}{2}x^{a+2} + \frac{b}{b+1}\frac{B}{2}x^{b+2} + \frac{c}{c+1}\frac{C}{2}x^{c+2} + \ldots\right)$$
$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{a-2}{12}Ax^{a+2} + \frac{b-2}{12}Bx^{b+2} + \frac{c-2}{12}Cx^{c+2} + \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zur Berechnung von μ_2 muß man das Quadrat von y nach Gleichung (1) machen und sodann $x = h,\ 2h,\ 3h,\ \ldots\ nh$ setzen. Damit aber das Verfahren vereinfacht werde, so nehmen wir für das erhaltene Quadrat die Form

(2) $y^2 = A'x^{a'} + B'x^{b'} + C'x^{c'} + \ldots,$

worin nemlich $A' = A^2$, $a' = 2a$ ist. Denn dieser Form wegen, welche mit jener für y übereinkommt, erhalten auch die Werthe von $y_1^2, y_2^2, y_3^2, \ldots y_n^2$ die Form von $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ und sonach muß nach der Substitution jener Werthe in μ_2 dieses die Form von f_2 erhalten; es wird nemlich

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} A'\frac{x^{a'+1}}{a'+1} + B'\frac{x^{b'+1}}{b'+1} + C'\frac{x^{c'+1}}{c'+1} + \ldots. \\ \frac{1}{n}\left(\frac{A'}{2}\cdot x^{a'+1} + \frac{B'}{2}\cdot x^{b'+1} + \frac{C'}{2}\cdot x^{c'+1} + \ldots.\right) \\ \frac{1}{n^2}\left(\frac{A'a'}{12}\cdot x^{a'+1} + \frac{B'b'}{12}\cdot x^{b'+1} + \frac{C'c'}{12}\cdot x^{c'+1} + \ldots.\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

4) Läßt man jetzt in den Ausdrücken für f_1, m_1, μ_1 die Theilungszahl n unendlich groß werden, wodurch die Producte aus $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ in die zugehörigen Reihen unendlich kleine Werthe erhalten, somit in Bezug der ersten Reihe verschwinden; so erhält man

$$(3)\quad f = A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \ldots,$$

$$(4)\quad m = \mathrm{KS}.f = A\frac{x^{a+2}}{a+2} + B\frac{x^{b+2}}{b+2} + C\frac{x^{c+2}}{c+2} + \ldots,$$

$$(5)\quad \mu = \mathrm{LS}.f = \tfrac{1}{2}\left(A'\frac{x^{a'+1}}{a'+1} + B'\frac{x^{b'+1}}{b'+1} + C'\frac{x^{c'+1}}{c'+1} + \ldots\right)$$

und man sieht, daß die Fläche ANMP nach Gleichung (3) erhalten wird, wenn man bei jedem Gliede in y (Gleich. 1) den Exponenten von x um die Einheit vermehrt und durch den vermehrten Exponenten dividirt; eben so erhält man das Moment der Fläche in Bezug auf die Gerade AN, wenn man jeden Exponenten um 2 vermehrt und durch den vermehrten Exponenten dividirt; endlich muß man für das Moment in Bezug auf AP (Gleich. 5) in den Gliedern von y^2 (Gleich. 2) den Exponenten von x um 1 vermehren, durch den vermehrten Exponenten dividiren und den so erhaltenen Ausdruck mit $\frac{1}{2}$ multipliciren.

Hat die krumme Linie zwei gleiche Äste, wie MN und M'N', so ist ihre Axe AP eine Schwerlinie und der Schwerpunct L derselben hat von A den Abstand $\mathrm{AL} = \mathrm{KS} = \frac{m}{f}$.

Zur Anwendung der abgeleiteten Formeln mögen hier einige Beispiele folgen.

Zuerst wollen wir die Aufgabe VIII nach dieser Art lösen.

Es sei A der Mittelpunct der Ellipse (Fig. 43), $\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{PM} = y$, $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AN} = b$; also

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = ab\left(\frac{1}{a} - \frac{x^2}{2a^3} - \frac{x^4}{2.4.a^5} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^7} - \ldots\right)$$

Nach Gleichung (3) erhält man daraus die Fläche

$$f = \mathrm{APMN} = ab\left(\frac{x}{a} - \frac{x^3}{2.3.a^3} - \frac{x^5}{2.4.5.a^5} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^7} - \ldots\right);$$

nimmt man davon die Fläche des Dreieckes

$$\text{APM} = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$ab\left(\frac{x}{2a} - \frac{x^3}{2.2.a^3} - \frac{x^5}{2.4.2.a^5} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.2.a^7} - \ldots\ldots\right)$$

hinweg; so ist der Ausschnitt

$$\text{MAN} = \text{APMN} - \text{APM} = \frac{ab}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{2.3.a^3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.a^5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^7} + \ldots\right)$$

$$= \frac{ab}{2} . \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}$$

und daraus

$$f = \text{APMN} = \text{APM} + \text{MAN} = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}.$$

Ferner ist nach der Gleichung (4)

$$m = \text{KS}.f = a^2b\left(\frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{2.4.a^4} - \frac{x^6}{2.4.6.a^6} - \frac{1.3.x^8}{2.4.6.8.a^8} + \ldots\right)$$

$$= \frac{a^2b}{3}\left[1 - \left(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{3.1}{2.4}\frac{x^4}{a^4} + \frac{3.1.1}{2.4.6}\frac{x^6}{a^6} + \frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}\frac{x^8}{a^8} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{a^2b}{3}\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{b}{3a}\left[a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$

daher

$$\text{KS} = \frac{m}{f} = \frac{\frac{2}{3}\left[a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]}{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}}.$$

Nach Gleichung (5) ist wegen $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$

$\mu = \text{LS}.f = \frac{1}{2}\left(b^2x - \frac{b^2x^3}{3a^2}\right) = \frac{b^2x}{2a^2}\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right)$, folglich

$$\text{LS} = \frac{\mu}{f} = \frac{\frac{bx}{a}\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right)}{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}}.$$

Da der Ausdruck für KS die Größe b nicht enthält, also für jeden Werth dieser Größe, mithin auch für $b = a$ unverändert bleibt, so muß der Schwerpunct S′ des trapezförmigen Kreisstückes APmn, welches $AB = a$ zum Halbmesser und A zum Mittelpuncte hat, ebenfalls in der um KS von AN entfernten Parallelen LS liegen und dabei ist aus LS für $b = a$

$$LS' = \frac{x(a^2 - \frac{x^2}{3})}{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}},$$

mithin $b : a = LS : LS'$,

woraus, wenn LS bekannt ist, der Abstand LS′ des Schwerpunctes von dem Kreisstücke APmn von AB bestimmt werden kann. Man vergleiche VIII.

IX. Man soll den Schwerpunct der Fläche von der gemeinen Parabel bestimmen.

Setzt man bei der Parabel AM (Fig. 45) das Stück der Axe $AP = x$, die Ordinate $PM = y$; so ist

$$y = \sqrt{2px} = (2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}},$$

daher die Fläche

$$APM = f = \frac{(2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy.$$

Ist ferner S der Schwerpunct dieser Fläche, so ist das eine Moment derselben

$$m = AL.f = \frac{(2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^2 y.$$

und wegen $y^2 = 2px$ ist das andere Moment dieser Fläche

$$\mu = LS.f = \tfrac{1}{2}(2p.\frac{x^2}{2}) = \tfrac{1}{4}xy^2, \text{ folglich}$$

$$AL = \frac{m}{f} = \frac{3}{5}x \text{ und}$$

$$LS = \frac{\mu}{f} = \frac{3}{8}y = \frac{3}{8}\sqrt{2px}.$$

Für die Fläche MAM′ ist L der Schwerpunct.

§. 94. Schwerpunct von Oberflächen.

X. Man soll den Schwerpunct der Oberfläche eines Kegels bestimmen.

Wird der Umfang der Grundfläche in unendlich viele gleiche Theile getheilt und werden die Theilungspuncte mit der Spitze **A** (Fig. 46) des Kegels verbunden, so kann ein jedes dieser dadurch entstehenden Elemente der Oberfläche für ein Dreieck genommen werden, dessen Schwerpunct von der Spitze um zwei Drittheile der durch die Mitte geführten Seite entfernt ist. Schneidet man in einer beliebigen Seite **AB** den Punct **b** so ab, daß $Ab = \frac{2}{3} AB$ wird, und führt zur Grundfläche einen parallelen Schnitt **bgd**, so werden dadurch alle Seiten des Kegels in dem Verhältnisse wie **AB** getheilt, d. h. die Schwerpuncte aller Elemente liegen in dem Umfange des Kreises **bgd**. Daher kann man sich auch die Masse der ganzen Oberfläche in diesem Umfange vereint vorstellen. Sind nun alle Puncte des Umfanges von diesem Kreise gleichförmig beschwert, was nur dann geschehen kann, wenn alle Elemente einander gleich sind, also der Kegel ein gerader ist; so ist der Schwerpunct dieses Kreises (§. 88. 4) in dem Mittelpuncte **c**, d. h. der Schwerpunct der Oberfläche eines geraden Kegels liegt in der Axe um zwei Drittheile derselben von der Spitze entfernt.

XI. Man soll den Schwerpunct der Oberfläche eines Kugelabschnittes oder einer Zone bestimmen.

Denkt man sich die Axe des Kugelabschnittes oder der Zone in unendlich viele gleiche Theile getheilt, so werden die Schwerpuncte aller auf diese Art entstehenden Elemente wegen §. 88. 4 in der Axe liegen. Da ferner alle auf einander folgenden Oberflächen, wie es in der Elementar-Geometrie erwiesen wird, einander gleich sind, so ist, wenn man sich die Massen der Elemente in den Schwerpuncten vereint vorstellt, die Axe nach ihrer ganzen Länge gleichförmig beschwert; folglich wird der Schwerpunct in der Mitte der Axe liegen; d. h. der Schwerpunct der Oberfläche eines Kugelabschnittes oder einer Zone liegt in der Mitte der Axe.

§. 95. Schwerpunct von Körpern.

XII. Man soll den Schwerpunct einer Pyramide oder eines Kegels finden.

Es sei erstlich die Pyramide eine dreiseitige wie in **Fig. 47.** Theilt man eine Seite **DC** in **E** in zwei gleiche Theile, zieht die Geraden

EA und **EB**, macht $\mathbf{EL} = \frac{1}{3}\mathbf{EA}$ und $\mathbf{EN} = \frac{1}{3}\mathbf{EB}$; so ist (vermöge III) **L** der Schwerpunct des Dreieckes **ADC** und **N** der des Dreieckes **BDC**. Verbindet man nun **B** mit **L**, denkt sich **BL** in unendlich kleine Theile getheilt und durch die Theilungspuncte zur Ebene **ADC** parallele Schnitte gelegt, so müssen die Schwerpuncte aller dieser Schnitte, somit auch die Schwerpuncte aller dadurch entstandenen dreiseitigen Prismen von unendlich kleinen Höhen in dieser Geraden **BL** liegen, die sonach eine Schwerlinie der Pyramide sein muß. Eben so ist auch **AN** eine Schwerlinie dieses Körpers, daher der Durchschnittspunct **S** dieser Schwerlinien der gesuchte Schwerpunct der Pyramide.

Nun ist wegen $\mathbf{EL} = \frac{1}{3}\mathbf{AE}$ und $\mathbf{EN} = \frac{1}{3}\mathbf{BE}$ die Gerade **LN** parallel zu **AB** und $\mathbf{LN} = \frac{1}{3}\mathbf{AB}$. Es sind sonach die Dreiecke **LSN** und **BSA** ähnlich und ihre gleichnamigen Seiten im Verhältnisse wie 1 zu 3, also ist

$\mathbf{LS} = \frac{1}{3}\mathbf{SB}$ und $\mathbf{NS} = \frac{1}{3}\mathbf{AS}$, folglich

$\mathbf{BL} = \mathbf{BS} + \mathbf{SL} = \frac{4}{3}\mathbf{BS}$ und $\mathbf{AN} = \frac{4}{3}\mathbf{AS}$ oder

$\mathbf{BS} = \frac{3}{4}\mathbf{BL}$, $\mathbf{AS} = \frac{3}{4}\mathbf{AN}$ und $\mathbf{LS} = \frac{1}{4}\mathbf{BL}$, $\mathbf{NS} = \frac{1}{4}\mathbf{AN}$.

Der Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide wird demnach gefunden, wenn man den Schwerpunct einer Seitenfläche mit dem gegenüber liegenden Scheitel verbindet, diese Verbindungslinie in vier gleiche Theile theilt und drei Theile vom Scheitel oder einen Theil von dem Schwerpuncte der Seitenfläche aus aufträgt.

Ist eine vielseitige Pyramide gegeben, so theile man die Grundfläche derselben in lauter Dreiecke ab und verbinde die Scheitel dieser Dreiecke mit der Spitze. Auf diese Art erhält man statt der vielseitigen Pyramide mehre dreiseitige. Verbindet man die Schwerpuncte der Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Spitze, so liegt der Schwerpunct einer jeden dreiseitigen Pyramide in der Schwerlinie, um deren vierten Theil von der Grundfläche entfernt, also liegen alle Schwerpuncte in einer zur Grundfläche parallelen Ebene. Verbindet man endlich den Schwerpunct der Grundfläche mit der Spitze, so werden wegen der Ähnlichkeit der Figuren auch die Schwerpuncte aller parallelen Schnitte zur Grundfläche, daher auch der Schwerpunct der ganzen Pyramide in dieser Verbindungslinie liegen. Man hat sonach eine Schwerebene und außerhalb derselben eine Schwerlinie, folglich durch den Durchschnitt derselben den Schwerpunct selbst.

Um den Schwerpunct einer vielseitigen Pyramide zu finden, darf man nur den Schwerpunct der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbinden. Der Schwerpunct der Pyramide ist dann in dieser Verbindungslinie um den vierten Theil derselben von dem Schwerpuncte der Grundfläche entfernt.

Da ein Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten angesehen werden kann, so muß der Schwerpunct des Kegels in seiner Axe liegen und um ihren vierten Theil von dem Mittelpuncte der Grundfläche entfernt sein.

Anmerkung. Aus den bisher gelösten Aufgaben ist deutlich zu ersehen, daß nicht jede Ebene, welche den Körper in zwei gleiche Theile theilt, eine Schwerebene ist und umgekehrt, daß nicht jede Schwerebene den Körper in zwei gleiche Theile theilt. Vermöge §. 87. 1 kann die einen Körper halbirende Ebene nur dann eine Schwerebene sein, wenn jedem Theilchen des Körpers auf der einen Seite auch ein eben so großes auf der andern in einem gleichen Abstande von der Ebene entspricht. Ist der Körper so beschaffen, daß die Theilchen auf der einen Seite der Schwerebene sich von derselben weiter entfernen als auf der andern; so wird auch der Inhalt des ersten Theiles kleiner als der des zweiten sein. Daß dieselbe Schlußfolge auf die Ebenen und die dadurch geführten Schwerlinien angewendet werden müsse, ist für sich klar.

XIII. Man soll den Schwerpunct einer zur Grundfläche parallel abgestutzten Pyramide oder eines parallel abgestutzten Kegels bestimmen.

Es sei bei der abgestutzten Pyramide oder dem Kegel B die größere Grundfläche, b die kleinere, die Verbindungslinie der Schwerpuncte beider Grundflächen, nemlich $CG = a$ (Fig. 48), und φ der Neigungswinkel dieser Verbindungslinie gegen die Grundflächen. Denkt man sich die Seitenebenen verlängert, bis sie in einer Spitze zusammenstoßen; so wird auch die Verbindungslinie der Schwerpuncte von den beiden Grundflächen diese Spitze durchschneiden und in dieser Linie muß der Schwerpunct P der ganzen, jener q der abgestutzten Pyramide und der p des Ergänzungstheiles liegen; also kann nach §. 89 verfahren werden.

Ist K der Cubikinhalt der abgestutzten Pyramide, k jener der Ergänzungs-Pyramide und $K = K + k$ der der ergänzten, ferner die Schwerlinie der Ergänzungs-Pyramide, das ist $DG = x$; so wird

$$DC = a + x \quad \text{und man hat}$$

$$a + x : x = \sqrt{B} : \sqrt{b}, \quad \text{also auch}$$

$$a : x = (\sqrt{B} - \sqrt{b}) : \sqrt{b}, \quad \text{mithin}$$

$$x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{a(b + \sqrt{Bb})}{B - b} \quad \text{und}$$

$$a + x = \frac{a\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{a(B + \sqrt{Bb})}{B - b}.$$

Ferner ist

$$K = \tfrac{1}{3}B\,(a+x)\sin\varphi = \tfrac{1}{3}\frac{Ba(B+\sqrt{Bb})}{B-b}\sin\varphi,$$

$$k = \tfrac{1}{3}b\,x\sin\varphi = \tfrac{1}{3}\frac{ba(b+\sqrt{Bb})}{B-b}\sin\varphi,$$

$$K = \tfrac{1}{3}a\sin\varphi\,(B+b+\sqrt{Bb});$$

nach XII ist

$$CP = \tfrac{1}{4}CD = \tfrac{1}{4}\frac{a(B+\sqrt{Bb})}{B-b}$$

$$Cp = a+\tfrac{1}{4}GD = \tfrac{1}{4}\frac{a(4B-3b+\sqrt{Bb})}{B-b}.$$

Werden diese Werthe in die nach §. 89 erhaltene Gleichung

$$Cq = \frac{CP\,.\,K - Cp\,.\,k}{K}$$

gehörig substituirt; so ergibt sich

$$Cq = \tfrac{1}{4}\frac{a(B+2\sqrt{Bb}+3b)}{B+\sqrt{Bb}+b} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a\,\frac{B-b}{B+\sqrt{Bb}+b}$$

$$= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{12}a^2\frac{(B-b)\sin\varphi}{K},$$

also ist

$$\tfrac{1}{4}\frac{a(B-b)}{B+\sqrt{Bb}+b} = \tfrac{1}{12}\frac{a^2(B-b)\sin\varphi}{K}$$

die Entfernung des Schwerpunctes von der Mitte der Axe gegen die größere Grundfläche zu.

Setzt man bei dem Kegel insbesondere den Halbmesser der größeren Grundfläche $= C$, den der kleineren $= c$; so ist

$$B = C^2\pi,\ b = c^2\pi,\ \sqrt{Bb} = Cc\pi,\ \text{folglich}$$

$$Cq = \tfrac{1}{4}\frac{a(C^2+2Cc+3c^2)}{C^2+Cc+c^2} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\frac{a(C^2-c^2)}{C^2+Cc+c^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{12}\frac{a^2\pi\,(C+c)\,(C-c)\sin\varphi}{K}.$$

Wird $b=0$, so verwandelt sich die abgestutzte in eine ganze Pyramide von derselben Axe, und es ist $Cq = \tfrac{1}{4}a$ wie in XII. Wird aber $B=b$, so geht die abgestutzte Pyramide in ein Prisma über; in diesem Falle ist $Cq = \tfrac{1}{2}a$, wie in §. 88. 7 angegeben wurde.

XIV. Man soll den Schwerpunct eines zur Grundfläche parallel abgestutzten geraden Kegels bestimmen, welcher cylindrisch und concentrisch ausgehöhlt ist.

Bezeichnet man die Axe DC des Kegels (Fig. 49) mit a, den Halbmesser CA der größeren Grundfläche mit B, den Halbmesser DE der kleinern mit b, den der Aushöhlung $DG = CJ$ mit c; ist ferner K der Cubikinhalt des ausgehöhlten Kegels, k der des hohlen Cylinders und $K + k = K'$ jener des ausgefüllten abgestutzten Kegels; so wird

$$K = \tfrac{1}{3}a\pi(B^2 + b^2 + Bb - 3c^2),\ k = ac^2\pi \text{ und}$$
$$K' = \tfrac{1}{3}a\pi(B^2 + b^2 + Bb).$$

Die Schwerpuncte aller drei Körper liegen wegen §. 88. 5 in der Axe CD. Es sei also q der Schwerpunct des ausgehöhlten, P jener des vollen abgestutzten Kegels und p der des Cylinders; so ist $Cp = \frac{1}{2}a$ und nach XIII

$$CP = \tfrac{1}{4}\frac{a(B^2 + 2Bb + 3b^2)}{B^2 + Bb + b^2}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung

$$Cq.K = CP.K' - Cp.k$$

gehörig substituirt; so erhält man

$$Cq = \tfrac{1}{4}\frac{a(B^2 + 3b^2 + 2Bb - 6c^2)}{B^2 + b^2 + Bb - 3c^2} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{12}\frac{a^2(B^2 - b^2)}{K}\pi \text{ und}$$

$$Dq = \tfrac{1}{4}\frac{a(b^2 + 3B^2 + 2Bb - 6c^2)}{B^2 + b^2 + Bb - 3c^2} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{12}\frac{a^2(B^2 - b^2)}{K}\pi.$$

Ist $b = c$, so wird

$$Cq = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\frac{a(B^2 - b^2)}{B^2 + Bb - 2b^2}.$$

Wird $B = b$, so geht der abgestutzte Kegel in einen concentrisch ausgehöhlten Cylinder über, in welchem Falle $Cq = \frac{1}{2}a$ ist, was auch mit §. 88. 8 übereinstimmt.

XV. Es soll der Schwerpunct eines Kugelausschnittes gefunden werden.

Wenn man (Fig. 50) den Mittelpunct C der Kugel mit dem Mittelpuncte J der Grundfläche des zu dem Ausschnitte gehörigen Abschnittes

durch den Halbmesser CB verbindet, so ist dieser für den Kugelausschnitt die Umdrehungsaxe; also muß der Schwerpunct des Ausschnittes wegen §. 88. 5 in diesem Halbmesser liegen. Denkt man sich unendlich viele Halbmesser zu der krummen Oberfläche des Ausschnittes gezogen, so erhält man dadurch unendlich viele Pyramiden, deren Schwerpuncte nach XII um drei vierte Theile des Halbmessers von dem Mittelpuncte der Kugel entfernt sind. Denkt man sich ferner in dieser Entfernung die concentrische Kugeloberfläche FNHMK, so werden die Schwerpuncte aller dieser Pyramiden darin enthalten sein. Wegen der Gleichförmigkeit des Körpers ist es nun eben so viel, als wenn die Puncte der krummen Oberfläche gleichförmig beschwert wären; folglich ist der Schwerpunct der neuen concentrischen Oberfläche zugleich jener des Kugelausschnittes.

Setzt man den Halbmesser der Kugel $AC = a$, die Höhe des dem Ausschnitte zugehörigen Abschnittes $BJ = b$; so ist $CF = \frac{3}{4}a = CK$. Wegen der Ähnlichkeit der Figuren ist $KG = \frac{3}{4}BJ = \frac{3}{4}b$; und da der Schwerpunct S dieser Oberfläche nach XI in der Mitte von KG ist, so wird

$$KS = \tfrac{3}{8}b,\ CS = \tfrac{3}{4}a - \tfrac{3}{8}b = \tfrac{3}{8}(2a-b) \text{ oder}$$

$$BS = a - \tfrac{3}{8}(2a-b) = \tfrac{1}{8}(2a+3b).$$

Wird $b = a$, so geht der Kugelausschnitt in die Halbkugel über; für diese ist $CS = \frac{3}{8}a$, oder $BS = \frac{5}{8}a$; d. h. der Schwerpunct einer Halbkugel liegt in der Umdrehungsaxe und ist von dem Mittelpuncte um drei Achtheile des Halbmessers entfernt.

XVI. Man soll den Schwerpunct eines Kugelabschnittes finden.

Denkt man sich zu dem Kugelabschnitte den geraden Kegel hinzugegeben, welcher den Mittelpunct der Kugel zur Spitze und die Grundfläche mit dem Abschnitte gemeinschaftlich hat, so entsteht dadurch ein Kugelausschnitt. Dabei sind (Fig. 50) die Schwerpuncte aller drei Körper in der Umdrehungsaxe, also kann wieder nach §. 89 verfahren werden.

Da $\frac{2}{3}a^2 b\pi$ der Cubikinhalt des Ausschnittes und $\frac{3}{8}(2a-b)$ der Abstand des Schwerpunctes von dem Mittelpuncte der Kugel ist, so wird $\frac{1}{4}a^2b(2a-b)\pi$ das Moment des Ausschnittes. Ferner ist $\frac{1}{3}(a-b)(2ab-b^2)\pi$ der Cubikinhalt des Kegels und $\frac{3}{4}(a-b)$ der Abstand des Schwerpunctes vom Scheitel, also $\frac{1}{4}(a-b)^2(2a-b)b\pi$ das Moment des Kegels, demnach $\frac{1}{4}a^2b\pi(2a-b) - \frac{1}{4}(a-b)^2(2a-b)b\pi = \frac{1}{4}b^2\pi(2a-b)^2$ das Moment des Kugelabschnittes.

Es ist aber $\frac{2}{3}a^2b\pi - \frac{1}{3}(a-b)\ (2a-b)b\pi$ der Cubikinhalt des Abschnittes; folglich ist bei dem Kugelabschnitte $\frac{\frac{3}{4}(2a-b)^2}{3a-b}$ der Abstand des Schwerpunctes von dem äußersten Endpuncte des Halbmessers.

Wird $a = b$, so geht der Kugelabschnitt in die Halbkugel über, und es ist $\frac{3}{8}a$ die Entfernung des Schwerpunctes derselben von dem Mittelpuncte, wie in XV.

XVII. Man soll den Schwerpunct eines Ellipsoides bestimmen, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen erzeugt wird.

Wenn (Fig. 43) A den Mittelpunct der Ellipse BNB'N'B, $AB = a$ die eine, $AN = b$ die andere Halbaxe ist und aus A der Kreisquadrant Bmn beschrieben wird; so erhält man durch die Umdrehung von BNA und von BnA um AB im ersten Falle ein halbes Ellipsoid und im zweiten eine Halbkugel, für welche AB die gemeinschaftliche Schwerlinie ist (§. 88. 5).

Schneidet man AP ab, denkt sich diese Gerade in unendlich viele gleiche Theile getheilt und durch die Theilungspuncte wie p und q senkrechte Schnitte auf AP geführt; so wird dadurch sowohl die von APMN beschriebene ellipsoidische Zone als auch die von APmn beschriebene Kugelzone in cylindrische Elemente von gleichen Höhen getheilt; daher sich die Cubikinhalte k und k' zwei solcher Elemente von gemeinschaftlicher Höhe wie die Quadrate ihrer Halbmesser pw und pw', oder wie die Quadrate der Ordinaten der Ellipse und des Kreises für einerlei Abscissen, oder auch wie $b^2 : a^2$ verhalten, weil die Quadrate dieser Ordinaten in diesem Verhältnisse stehen; sonach hat man

$$k : k' = b^2 : a^2.$$

Da ferner die Schwerpuncte der beiden cylindrischen Elemente auf der Schwerlinie AP zwischen p und q, also gleich weit entfernt von A liegen, von wo aus man die Momente rechnet, daher die Momente dieser Elemente, welche m und m' heißen sollen, im Verhältnisse ihrer Cubikinhalte, nemlich

$$m : m' = k : k'$$

sind; so ist auch

$$m : m' = b^2 : a^2.$$

Sind demnach K und K' die Summen der Cubikinhalte, M und M' die Summen der Momente aller Elemente der ellipsoidischen Zone und der

Kugelzone, also die Cubikinhalte und Momente dieser letztern Körper; so ist nothwendig

$$K : K' = b^2 : a^2 \text{ und}$$

$$M : M' = b^2 : a^2,$$

woraus endlich

$$K = \frac{b^2}{a^2} K' \text{ und } \frac{M}{K} = \frac{M'}{K'} \text{ folgt.}$$

Die erste Gleichung gibt den Cubikinhalt der ellipsoidischen Zone durch die zugehörige Kugelzone, während die letztere anzeigt, daß der Abstand des Schwerpunctes beider Zonen von A gleich weit entfernt ist, mithin beide einerlei Schwerpunct haben.

Ist L dieser Schwerpunct und setzt man $AP = x$; so findet man nach Vorhergehendem

$$K' = x\pi\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right), \quad M' = \frac{\pi x^2}{2}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right),$$

also für die ellipsoidische Zone in Bezug auf die Drehungsaxe AB

$$K = \frac{b^2 x\pi}{a^2}\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right), \quad AL = \frac{M'}{K'} = \frac{\frac{x}{2}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right)}{a^2 - \frac{x^2}{3}}.$$

Für $x = a$ erhält man für das halbe Ellipsoid NBN'

$$K = \tfrac{2}{3} ab^2\pi, \quad AL = \tfrac{3}{8} a, \text{ wie in XV.}$$

Für das halbe Ellipsoid BNB', welches durch Umdrehung von BNA um AN entsteht, darf man nur a mit b vertauschen, um für den Cubikinhalt K und für den Schwerpunct K

$$K = \tfrac{2}{3} a^2 b\pi, \quad AK = \tfrac{3}{8} b \text{ zu erhalten.}$$

§. 96. Man kann auch allgemein den Schwerpunct eines Körpers bestimmen, der durch die Umdrehung irgend einer Fläche APMN (Fig. 44) um eine Axe AP beschrieben wird, die dann zugleich eine Schwerlinie ist.

Dazu theile man die Fläche APMN nach §. 93 in n Elemente, indem man $AP = x$ in n gleiche Theile $\frac{x}{n} = h$ theilt und construire bei jedem dieser Elemente das ein- und umbeschriebene Rechteck; wodurch bei der Umdrehung um AP die durch die einbeschriebenen Rechtecke er-

zeugten Cylinder zusammen ein kleineres und die durch die umbeschriebenen Rechtecke erzeugten zusammen ein größeres Volum erhalten, als der durch die Fläche APMN erzeugte Körper. Es wird nemlich, wenn K das Volum eines solchen Körpers ist und die Ordinaten

AN, p_1m_1, p_2m_2, . . . $p_{n-1}m_{n-1}$, PM respective mit

$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\ \ldots\ y_{n-1},\quad y_n$$

bezeichnet werden,

$$K > h\pi(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2) \text{ und}$$
$$K < h\pi(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2)$$

sein und da für ein unendlich großes n beide Reihen den Werth von K zur Grenze haben; so findet man K, wenn man in

$$h\pi(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2) \quad (\mathfrak{A})$$

n unendlich groß werden läßt.

Ferner ist auf A bezogen die Summe der Momente jener einbeschriebenen Cylinder =

$$y_0^2\pi h.\frac{h}{2} + y_1^2\pi h.\frac{3}{2}h + y_2^2\pi h.\frac{5h}{2} + \ldots + y_{n-1}^2\pi h.\frac{2n-1}{2}h$$

und die Summe der Momente der umbeschriebenen =

$$y_1^2\pi h.\frac{h}{2} + y_2^2\pi h.\frac{3}{2}h + y_3^2\pi h.\frac{5h}{2} + \ldots + y_n^2\pi h.\frac{2n-1}{2}h. \quad (\mathfrak{B})$$

Für ein unendlich großes n nähern sich aber beide Summen derselben Grenze, nemlich dem Momente des durch die Fläche APMN erzeugten Körpers. Ist daher L der Schwerpunct dieses Körpers, also AL.K sein Moment; so wird dieses erhalten, wenn man in einer jener Summen, z. B. in ($\mathfrak{B}$) n unendlich groß annimmt.

Hat man nun für $AP = x$, $PM = y$ die Gleichung der krummen Linie NM

$$y^2 = A'x^{a'} + B'x^{b'} + C'x^{c'} + \ldots.$$

gegeben und setzt in dieselben nach und nach

$$x = h,\quad 2h,\quad 3h,\ \ldots\ nh,$$

wodurch man

$$y_1^2,\ y_2^2,\ y_3^2,\ \ldots\ y_n^2$$

erhält; so wird die Substitution der letzteren Werthe in ($\mathfrak{A}$) und in ($\mathfrak{B}$)

nach dem weitern in §. 93 gezeigten Verfahren

$$K=\pi(A'\frac{x^{a'+1}}{a'+1}+B'\frac{x^{b'+1}}{b'+1}+C'\frac{x^{c'+1}}{c'+1}+\ldots.)$$

und

$$\text{AL}.K=\pi(A'\frac{x^{a'+2}}{a'+2}+B'\frac{x^{b'+2}}{b'+2}+C'\frac{x^{c'+2}}{c'+2}+\ldots.)$$

geben, woraus endlich AL bestimmt werden kann.

Für das Ellipsoid (Fig. 43) hat man

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2, \text{ also}$$

$$K=\pi(b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3})=\pi\frac{b^2x}{a^2}(a^2-\frac{x^2}{3}),$$

$$\text{AL}.K=\pi(b^2\frac{x^2}{2}-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^4}{4})=\pi\cdot\frac{b^2x^2}{2a^2}(a^2-\frac{x^2}{2}) \text{ und daher}$$

$$\text{AL}=\frac{\frac{x}{2}(a^2-\frac{x^2}{2})}{a^2-\frac{x^2}{3}}, \text{ wie in XVII.}$$

XVIII. Es soll der Schwerpunct eines Rotations-Paraboloids bestimmt werden.

Ist APM (Fig. 45) die paraboliſche Fläche, durch deren Drehung um die Axe AP das Paraboloid beschrieben wird und setzt man $\text{AP}=x$, $\text{PM}=y$; so ist

$$y^2=2px; \text{ also}$$

$$K=2p\pi\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{\pi xy^2}{2} \text{ und}$$

$$K.\text{AL}=2p\pi\cdot\frac{x^3}{3}=\frac{\pi x^2y^2}{3},$$

sofort der Abstand des Schwerpunctes L

$$\text{AL}=\tfrac{2}{3}x.$$

§. 97. Bei zusammengesetzten Flächen oder Körpern muß man Schnitte durch dieselben so zu führen suchen, daß man von jedem Theile insbesondere sowohl den Cubikinhalt als auch die Lage des Schwerpunctes bestimmen könne; man findet dann den Schwerpunct aller dieser

Theile nach §. 86. Auf diese Art wird der Schwerpunct der Pulverkammern, welche bei den Bombenmörsern angebracht sind, erhalten, weil diese aus einem Cylinder oder aus einem abgestutzten Kegel mit einer am Ende angebrachten Halbkugel oder einem Kegelabschnitte zusammengesetzt sind. Ist nemlich b die ganze Tiefe der Kammer und a der Halbmesser der Bohrung; so wird von der Mündung der Kammer gerechnet,

$\frac{1}{2}a^2\pi(b-a)^2$ das Moment des Cylinders, und

$\frac{2}{3}a^3\pi(b-\frac{5}{8}a)$ jenes der Halbkugel, folglich

$a^2\pi(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{3}ab+\frac{1}{12}a^2)$ das der ganzen Kammer und sonach, da

$a^2\pi(b-\frac{1}{3}a)$ ihr Cubikinhalt ist,

$\frac{\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{3}ab+\frac{1}{12}a^2}{b-\frac{1}{3}a}$ der Abstand ihres Schwerpunctes von ihrer Mündung.

Daß dieser Ausdruck auch für den Schwerpunct der Bohrung bei unsern Kanonenröhren gilt, wenn sie mit dem Halbmesser der Bohrung abgerundet sind, ist für sich klar. Der Anfänger wird auch leicht den Schwerpunct der Bohrung finden, wenn sie aus einem Cylinder oder abgestutzten Kegel mit einem angeschloßenen Kugelsegmente besteht.

§. 98. Hat man endlich den Schwerpunct eines aus mehren Theilen von verschiedenen Materien zusammengesetzten Körpers zu bestimmen; so kann man eben so wie bei den gleichartigen Körpern vorgehen, nur muß man jeden Cubikinhalt mit dem specifischen Gewichte der Materie in der zweiten Bedeutung multipliciren, weil dann die Massen der Körper durch ein gemeinschaftliches Maß, nemlich durch die Inhalte des destillirten Regenwassers von gleichen Massen ausgedrückt werden.

Es seien z. B. zwei gleiche Halbkugeln, die eine von Blei, die andere von Zinn in der Schnittsebene so zusammengefügt, daß sie eine ganze Kugel ausmachen; nach §. 88. 5 werden in dem auf die Zusammenfügungsebene senkrecht gestellten Durchmesser die Schwerpuncte beider Halbkugeln, also auch der Schwerpunct der ganzen Kugel liegen. Ist der Halbmesser der Kugel $= a$, so wird, da das specifische Gewicht des Bleies $= 11{\cdot}352$ und jenes des Zinnes $= 7{\cdot}291$ ist, die Masse der bleiernen Halbkugel $= \frac{2}{3}a^3\pi.\,11{\cdot}352$, die der zinnernen $= \frac{2}{3}a^3\pi.\,7{\cdot}291$, also die ganze Masse $= \frac{2}{3}a^3\pi.\,18{\cdot}643$. Werden die Momente von dem Umfange der bleiernen Halbkugel gezählt, so ist wegen §. 95. XV das Moment derselben $= \frac{5}{8}a\times\frac{2}{3}a^3\pi.\,11{\cdot}352$ und das Moment der zinnernen $= \frac{11}{8}a\times\frac{2}{3}a^3\pi.7{\cdot}291$,

also das Moment der ganzen Kugel $= \frac{2}{3}a^4\pi \cdot 17 \cdot 12$, demnach der Abstand des Schwerpunctes von diesem Puncte des Umfanges

$$\frac{17 \cdot 12}{18 \cdot 643}\, a = 0 \cdot 9183\, a.$$

§. 99. Guldin's Regel.

Eine für die Anwendung nützliche Eigenschaft des Schwerpunctes, nach welcher sowohl die Oberfläche als auch das Volum der durch Umdrehung entstandenen Körper bestimmt wird, wurde vom Pater Guldin entdeckt. Wir wollen diese unter dem Namen der Guldin'schen Regel bekannte Eigenschaft hier ableiten.

I. Denken wir uns die Länge der krummen Linie $NM = s$ (Fig. 44) in gleiche Elemente

$$Nm_1 = m_1m_2 = m_2m_3 = \ldots = m_{n-1}M = s_1$$

getheilt, so daß jedes solche Bogenelement als eine gerade Linie, die mit seiner Sehne zusammenfällt, angesehen werden kann. Läßt man diese krumme Linie sich um AP drehen; so wird jedes Element die Oberfläche eines abgestutzten Kegels beschreiben und alle diese Oberflächen zusammen werden der von NM beschriebenen Oberfläche O gleich sein. Bezeichnet man nemlich die auf AP gefällten Senkrechten

$$AN,\ p_1m_1,\ p_2m_2,\ \ldots\ p_{n-1}m_{n-1},\ PM$$

respective durch $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_{n-1},\ y_n$, so wird

$$O = 2\pi \cdot \frac{(y_0+y_1)}{2} \cdot s_1 + 2\pi \cdot \frac{(y_1+y_2)}{2} \cdot s_1 + \ldots + 2\pi \frac{(y_{n-1}+y_n)}{2} \cdot s_1$$

$$= 2\pi s_1 (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n).$$

Bezeichnet man ferner den Abstand des Schwerpunctes der krummen Linie $NM = s$ von AP mit y und berücksichtigt, daß das Moment $s.y$ dieser krummen Linie gleich der Summe der Momente seiner Elemente

$$Nm_1,\ m_1m_2,\ m_2m_3,\ \ldots\ m_{n-1}M$$

ist und jedes Element, als gerade Linie betrachtet, den Schwerpunct in seiner Mitte hat; so ergibt sich die Momentengleichung

$$s.y = \frac{y_0+y_1}{2} \cdot s_1 + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot s_1 + \frac{y_2+y_3}{2} \cdot s_1 + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot s_1$$

$$= s_1 (\tfrac{1}{2}y_1 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n).$$

Vergleicht man diese mit dem Ausdrucke für O; so folgt daraus

(1) $O = 2\pi y.s$;

d. h. die Oberfläche eines Körpers, der durch die Umdrehung einer krummen Linie um eine feste Axe entsteht, gleicht dem Producte aus der Länge s dieser krummen Linie in den Weg $2\pi y$, den ihr Schwerpunct bei der Umdrehung durchläuft.

II. Betrachtet man den Körper, der durch die Umdrehung der Fläche ANMP um AP entsteht, setzt sein Volum $= K$, theilt AP in die n gleichen Theile

$Ap_1 = p_1p_2 = p_2p_3 = \ldots = p_{n-1}P = h$ und setzt

$AN = y_0$, $p_1m_1 = y_1$, $p_2m_2 = y_2$, $\ldots p_{n-1}m_{n-1} = y_{n-1}$, $PM = y_n$;

so hat man nach §. 96

$$\frac{K}{2\pi} > \frac{h}{2}(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2) \text{ und}$$

$$\frac{K}{2\pi} < \frac{h}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2).$$

Macht man ferner in Bezug auf AP die Momente der den Elementen der Fläche ANMP ein- und umbeschriebenen Rechtecke; so ist die Summe der Momente der erstern kleiner und die der Momente der letztern größer als das der Fläche ANMP. Man hat nemlich in Bezug auf §. 93. 2, wenn f den Inhalt der Fläche und $LS = z$ den Abstand ihres Schwerpunctes von AP bezeichnet,

$$f.z > \frac{h}{2}(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2) \text{ und}$$

$$f.z < \frac{h}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2).$$

Man sieht nun, daß die Theile rechter Hand dieser und der beiden vorigen Ungleichungen vollkommen gleich sind, und für ein unendlich großes n dieselbe Grenze

$$\frac{K}{2\pi} = f.z$$

haben, woraus

(2) $K = 2\pi z.f$

folgt; d. h. das Volum eines, durch die Umdrehung einer Fläche erzeugten Körpers ist das Product aus der Fläche f in

den Weg $2\pi\varkappa$, den dabei der Schwerpunct dieser Fläche beschreibt.

Beispiele.

1) Ist NM (Fig. 51) eine gerade Linie, die bei der Drehung um AP den Mantel eines abgestutzten Kegels beschreibt und dabei $AN=b$, $PM=c$; so ist für den Schwerpunct W in der Mitte von $NM=s$ der Abstand von AP, $y=\frac{1}{2}(b+c)$, mithin die Oberfläche dieses Kegelmantels

$$O=2\pi y.s=2(b+c)\pi.\frac{s}{2}, \text{ wie bekannt.}$$

2) Theilt man AN und PM in R und Q in zwei gleiche Theile, zieht die Theilungslinie RQ, so ist diese eine Schwerlinie des Trapezes ANMP, und der Schwerpunct S wird, wenn man $QR=a$ setzt, durch

$$QS=\tfrac{1}{3}a\frac{c+2b}{c+b} \text{ (nach IV) bestimmt.}$$

Um den Abstand LS des Schwerpunctes von AP zu erhalten, führe man durch R und S zu AP die Parallelen RT und St und es ist

$$RQ:SQ=QT:Qt \text{ oder}$$

$$a:\tfrac{1}{3}a\frac{c+2b}{c+b}=\tfrac{1}{2}(c-b):Qt, \text{ sofort}$$

$$Qt=\frac{(c-b)\ (c+2b)}{6(c+b)} \text{ und}$$

$$LS=\varkappa=\tfrac{1}{2}c-Qt=\tfrac{1}{3}.\frac{c^2+cb+b^2}{c+b}.$$

Wird ferner $AP=h$ und die Fläche des Trapezes $ANMP=f$ gesetzt; so ist

$$f=\tfrac{1}{2}(c+b).h,$$

folglich das Volum des von dieser Fläche um AP beschriebenen abgestutzten Kegels

$$K=2\pi\varkappa.f=\tfrac{1}{3}\frac{(c^2+bc+b^2)}{c+b}.2\pi.\tfrac{1}{2}(c+b)h=\tfrac{1}{3}h(c^2+cb+b^2)\pi,$$

wie bekannt.

Wäre die zu AP parallele Gerade UV die Axe, um welche das Trapez ANMP sich dreht und daher diesfalls einen abgestutzten, cylindrisch und concentrisch ausgehöhlten Kegel beschreiben würde; so ändert sich für die Anwendung der Guldin'schen Regel blos SL, das in SL' übergeht.

Es ist nemlich, wenn man $AU = LL' = r$ setzt, $SL' = \varkappa + r$; daher

$$K = 2(\varkappa + r)\pi . f = 2\pi \left[\tfrac{1}{3}\frac{(c^2+cb+b^2)}{c+b} + r\right] . \tfrac{1}{2}(c+b) . h$$

$$= \pi h \left[\tfrac{1}{3}(c^2+cb+b^2) + (c+b)r\right],$$

oder, wenn man $UN = B$, $VM = C$ setzt, mithin $b = B - r$, $c = C - r$ substituirt,

$$K = \frac{h}{3}(B^2 + BC + C^2)\pi - r^2\pi . h;$$

welcher Ausdruck auch in §. 95. XIV vorkommt.

3) Ist ANB (Fig. 52) ein Kreisbogen, der um den Halbmesser CG sich dreht, sofort die Oberfläche einer Zone beschreibt und ist C der Mittelpunct, p der Schwerpunct dieses Bogens; so wird (§. 91. II)

$$ANB : AB = CN : Cp.$$

Zieht man pm senkrecht auf CG und AF senkrecht auf EB; so sind die Dreiecke pmC und AFB, da ihre Seiten wechselweise auf einander senkrecht stehen, ähnlich und man hat

$$AB : AF = Cp : pm;$$

daher durch den Vergleich mit der vorigen Proportion

$$ANB : AF = CN : pm$$

oder wenn man $ANB = s$, $AF = DE = b$, $CN = CG = r$ setzt,

$$s : b = r : pm.$$

Hieraus folgt $pm = y = \frac{br}{s}$ und die Oberfläche der Zone wird

$O = 2\pi . y . s = 2r\pi . b$, wie bekannt.

4) Die Umdrehung der Fläche DANBE um CG gibt das Volum K der Zone. Nimmt man p für den Schwerpunct des Kreisabschnittes ANB, q für den des Trapezes DABE, sofort S für jenen der ganzen Fläche DANBE; ist ferner F der Inhalt der Fläche ANB, F' jener des Trapezes DABE; so hat man in Bezug auf CG die Momentengleichung

$$LS.(F + F') = mp.F + nq.F'.$$

Setzt man nun

$$AB = 2\beta,\ AD = b,\ EB = b',\ DE = c;$$

so ist (§. 92. VI)

$$Cp = \tfrac{2}{3}\frac{\beta^3}{F}$$

und wegen $Cp : pm = AB : AF = 2\beta : c$ ist

$$pm = c.\frac{Cp}{2\beta} = \frac{c\beta^2}{3F}, \text{ also}$$

$$pm.F = \frac{c\beta^2}{3} = \frac{c}{12}[c^2 + (b'-b)^2], \text{ weil}$$

$$4\beta^2 = c^2 + (b'-b)^2 \text{ ist.}$$

Ferner hat man nach Vorigem in 2)

$$nq = \tfrac{1}{3}.\frac{b^2+bb'+b'^2}{b+b'}$$

und für die Fläche des Trapezes $DABE = F' = \frac{1}{2}(b+b')c$; folglich

$$nq.F' = \frac{c}{6}(b^2+bb'+b'^2).$$

Substituirt man diesen Ausdruck und jenen für $pm.F$ in die Momentengleichung; so wird

$$LS.(F+F') = \frac{c}{12}[2b^2+2bb'+2b'^2+c^2+(b'-b)^2]$$

$$= \frac{c}{12}(3b^2+3b'^2+c^2)$$

und da nach Guldin das Volum der durch DANBE beschriebenen Zone

$$K = 2\pi.LS.DANBE = 2\pi.LS.(F+F')$$

ist; so ergibt sich endlich

$$K = \frac{c\pi}{6}(3b^2+3b'^2+c^2),$$

übereinstimmend mit Vega's II. B. 7. Aufl. S. 165.

5) Dreht sich der Halbkreis ANA' (Fig. 53) oder der Halbkreis AN'A' um eine in der Ebene des Kreises liegende Axe XY; so wird ersterer einen Ring beschreiben, welcher cylindrisch ausgehöhlt ist und der vom letztern beschriebene Ring wird äußerlich cylindrisch sein.

Setzt man den Halbmesser $CN = CN' = r$, den Abstand des Kreismittelpunctes von XY, nemlich $CD = a$; so ist, wenn p und p' die Schwerpuncte der beiden Halbkreise sind, wegen $Cp = Cp' = \frac{4r}{3\pi}$ (§. 92. VI)

$$pD = a + \frac{4r}{3\pi},\ p'D = a - \frac{4r}{3\pi};$$

da jeder Halbkreis $= \frac{r^2\pi}{2}$ ist, so hat man den Cubikinhalt des von ANA' beschriebenen Ringes

$$K = 2\pi(a + \frac{4r}{3\pi}) \quad \frac{r^2\pi}{2} = r^3\pi^2(a + \frac{4r}{3\pi})$$

und des von AN'A' beschriebenen Ringes

$$K' = 2\pi(a - \frac{4r}{3\pi}) \quad \frac{r^2\pi}{2} = r^3\pi^2(a - \frac{4r}{3\pi});$$

daher die Differenz beider Cubikinhalte

$$K - K' = \tfrac{8}{3}r^3\pi,$$

so groß wie die doppelte Kugel vom Halbmesser r.

Der Cubikinhalt des Ringes, der von der ganzen Kreisfläche um XY beschrieben wird, ist

$$K + K' = 2ar^2\pi^2 = 2a\pi.r^2\pi;$$

was mit der Guldin'schen Regel übereinkommt.

Da $K > K'$ ist, so muß eine zu XY parallele Sehne MM' die Kreisfläche in zwei Abschnitte M'NM und M'A'N'AM so theilen, daß jeder Abschnitt einen Ring von demselben Volum um XY beschreibt. Nach dem bereits Vorgetragenen kann der Anfänger leicht die dazu gehörige Gleichung zwischen MM' und den bekannten Größen finden, woraus aber MM' nur durch Annäherung sich bestimmen lassen wird.

§. 100. Für die Artillerie ist die Kenntniß des Schwerpunctes eines Kanonenrohres besonders wichtig, weil die Lage der Schildzapfen und Delphinen, dann die Länge der Laffetenwände, u. s. w. davon abhängig ist. Man kann dabei auf folgende Art verfahren.

Man zertheile das Rohr in mehre Theile und bestimme die Lage des Schwerpunctes eines jeden Theiles insbesondere. Alle diese Schwerpuncte werden in der Seellinie liegen, weil das Rohr einen Körper bildet, der durch die Umdrehung einer ebenen Fläche um die Seellinie als Axe entsteht, in der Voraussetzung, daß man das Zündloch vernachlässigt; folglich wird auch der Schwerpunct des Rohres, ohne Berücksichtigung der Schildzapfen, Angußscheiben, Delphinen, u. s. w. in dieser Seellinie liegen müssen. Nun wähle man einen schicklichen Punct in ihr, von welchem aus die Momente gezählt werden, z. B. den Endpunct der Traube; so wird wegen §. 86 der Abstand des Schwerpunctes von diesem Puncte erhalten, wenn man die Summe aller Momente durch den Cubikinhalt des Rohres dividirt.

Die Haupttheile des Rohres sind entweder Cylinder oder abgestutzte Kegel; man kann sie als massiv betrachten und nach §. 95. XIII die Lage des Schwerpunctes, folglich die Momente bestimmen; dann kann man

das Moment der Bohrung, welche ein Cylinder mit einer angeschlossenen Halbkugel oder einem Kugelsegmente ist, suchen; dieses Moment muß im Zähler eben so, wie der Cubikinhalt der Bohrung im Nenner negativ genommen werden.

Bei dem Momente der Verstäbungen wird man für die Ausübung mit hinlänglicher Genauigkeit verfahren, wenn man dieselben durch ein vernünftiges Abschätzen in leicht zu berechnende Körper verwandelt; d. h. wenn man z. B. bei der Traube einen Cylinder so verzeichnet, daß die hinwegfallenden Stücke durch die hinzugegebenen so ziemlich ersetzt werden und dann die Abmessungen mit dem Zirkel untersucht. Bei der Bestimmung der Cubikinhalte der Verstäbungen kann man sich mit Vortheile der Guldin'schen Regel bedienen.

Das vordere Plättlein kann als ein concentrisch ausgehöhlter Cylinder betrachtet werden. Für das Moment des Karnises verbinde man den höchsten hintern Punct des Plättleins an dem Karnise mit dem vordern höchsten Puncte a des Plättleins an der Platte; das dadurch entstehende Dreieck kann man sehr nahe für die Erzeugungsebene des Karnises nehmen. Die Platte und die anliegenden Plättlein können zusammengenommen werden, wenn man durch die Mitte der obern Metalllinie der Platte zur Seellinie eine Parallele zieht, bis die Verlängerungen der äußersten Linie der Plättlein diese durchschneiden. Die Erzeugungsebene dieser drei Verstäbungen kann dann als ein Rechteck angesehen werden, bei welchem der Durchschnittspunct b der Diagonalen der Schwerpunct ist. Wenn man den Berührungspunct d des Bogens der Hohlkehle mit dem vordern höchsten Puncte der Platte bei a verbindet, so kann man das Dreieck dce statt des Durchschnittes der Hohlkehle nehmen. Auf diese Art kann man die Momente der Verstäbungen am Kopfe in Rechnung bringen.

Am Langenfelde hat man einen Rundstab sammt zwei Plättlein, dann eine Platte und ein Plättlein. Für beide kann man etwas unterhalb der Höhe des Rundstabes oder der Platte eine Parallele zur Metalllinie ziehen, wie es die Figur zeigt, damit das hinwegfallende Stück durch das neu hinzugekommene ergänzt wird. Die Erzeugungsfläche kann dann als ein Rechteck angesehen werden, bei welchem der Durchschnittspunct der Diagonalen der Schwerpunct ist. Eben so verfahre man mit den Verstäbungen am Zapfenstücke, Bodenstücke und am Stoßboden.

Die Traube kann in einen Cylinder und in einen abgestutzten Kegel verwandelt werden, wenn man in der Höhe des Plättleins an der Traube die Parallele fg zur Seellinie und aus A auf fg die Senkrechte Af zieht, dann den hintern höchsten Punct h des Plättleins am Stoßboden mit der

Mitte i der obern Breite des Plättleins an der Hohlkehle durch eine Gerade hg verbindet, wie es aus der Figur zu ersehen ist.

Wenn man nach dieser Anleitung die Momente und Cubikinhalte eines 6- oder 12pfündigen Feld-Kanonenrohres alter Art bestimmt, so findet man die Summe der Momente vom Endpuncte der Traube gerechnet $= 455{\cdot}935138$ und den Cubikinhalt des ganzen Rohres $= 56{\cdot}64875$; wobei die Einheit des Längenmaßes der Durchmesser der Kugel ist. Daraus folgt der Abstand des Schwerpunctes in der Seellinie vom Endpuncte der Traube, nemlich

$$\mathbf{AP} = \frac{455{\cdot}935138}{56{\cdot}64875} = 8{\cdot}0483 = 8\frac{1\frac{1}{2}}{32} \text{ Caliber.}$$

Die Schildzapfen müssen dem Schwerpuncte des Rohres vorgesetzt werden, damit das Rohr das nöthige Hintergewicht erhalte und sich beim Schusse nicht senke. Man nimmt das Hintergewicht, mit dem das in die Laffete eingelegte Rohr bei horizontaler Stellung der Seellinie mittels des hintern Visirreifes auf die Richtmaschine drückt, für einen gewissen Theil des Rohrgewichtes.

Ist also K das Volum des Rohres, folglich nK das Hintergewicht und denkt man sich das Rohr bei horizontaler Seellinie in einem Puncte Y, welcher in der durch die Schildzapfenmittellinie gezogenen Verticalen liegt, unterstützt; so wird, wenn man bei H eine Kraft nK aufwärts wirken läßt, die Richtmaschine nicht mehr gedrückt, also sind die Kräfte nK in H und K in P bei der Unterstützung von Y im Gleichgewichte und man hat nach §. 64. 1 die Momentengleichung

$$\mathbf{HY}.nK = \mathbf{PY}.K \text{ oder}$$

$$(\mathbf{AY} - \mathbf{AH})n = \mathbf{AY} - \mathbf{AP}, \text{ also}$$

$$\mathbf{AY} = \frac{\mathbf{AP} - n.\mathbf{AH}}{1-n} = \mathbf{AP} + \frac{n.\mathbf{HP}}{1-n}$$

und die Vorsetzung der Schildzapfen

$$\mathbf{PY} = \frac{n.\mathbf{HP}}{1-n}.$$

Für Feld-Kanonen ist $n = 0{\cdot}08$, für Batterie- und Vertheidigungs-Kanonen $n = 0{\cdot}05$ und für die Haubitzen $n = 0{\cdot}18$.

Denkt man sich unterhalb Y die Schildzapfen mit den Angußscheiben angebracht, deren Volum zusammen k sein soll; so muß das Rohr an den Delphinen frei aufgehängt, in horizontaler Lage schweben bleiben oder was dasselbe ist, die beiden Kräfte K in P und k in Y müssen bei der Unterstützung des im Delphinenmittel befindlichen Punctes X im Gleichgewichte

sein und man hat sonach zur Bestimmung dieses Punctes die Momentengleichung

$$PX.K = XY.k \text{ oder}$$

$$PX.K = (PY - PX)k, \text{ also}$$

$$PX = PY \cdot \frac{k}{K+k} = \frac{n}{1-n} \cdot \frac{k}{K+k}.HP.$$

§. 101. Zu den verschiedenen Bestimmungen bei einem vierräderigen Fuhrwerke hat man oft die Kenntniß seines Schwerpunctes nöthig, welcher auf folgende Art gefunden werden kann.

1) Wird angenommen, daß das Fuhrwerk, wie es sein soll, beiderseits symmetrisch gebaut und beladen ist, so muß die durch die Längenmitte beider Achsen gedachte Verticalebene eine Schwerebene des Fuhrwerkes sein. Stellt man dieses auf eine Art Bettungsrahme MN (Fig. 55), die gegen den Horizont unter irgend einem Winkel φ geneigt ist, so auf, daß beide Räderachsen horizontal sind, indem man die tiefer stehenden Räder, hier die hintern, mittels Keile K hemmt; hängt man ferner jeden Achsstängel der Vorderachse c in die Enden einer Kette, die Mitte der letztern an den einen Arm einer Wage und vermehrt das Gegengewicht so lange, bis beim Einspielen der Wage die Vorderräder die Rahme MN nicht mehr berühren, aber auch nur unmerklich von derselben abstehen; so wird das von der Wage angegebene Gewicht, um das Gewicht der Vorderräder und der Kette vermindert, den verticalen Druck anzeigen, welchen die Vorderachse auf die Naben ihrer Räder ausübt. Bezeichnet man diesen Druck mit p und denkt sich in c vertical aufwärts eine Kraft p; so wird diese, nach Hinwegnahme der Vorderräder und seiner Kette das Obergestell des Fuhrwerkes sammt Ladung (nemlich ohne die vier Räder) bei der Unterstützung der Hinterachse in C schwebend erhalten.

Ist also S der Schwerpunct und W das Gewicht des Obergestells sammt Ladung, welches nach SD vertical abwärts wirkt; so ist (§. 64. 1)

$$CD.W = Cc.p.$$

Zieht man SV, ca, CA senkrecht und cB parallel zu MN, setzt die Coordinaten des Schwerpunctes

$$aV = cF = x, \quad VS = y,$$

den Halbmesser der Vorderräder $ca = r$, den der Hinterräder $CA = R$ und die Spannung des Fuhrwerkes $cC = a$; so ist $FS = y - r$, und im rechtwinkligen Dreiecke cBC, wenn man den Winkel BcC durch α bezeichnet,

$$\sin\alpha = \frac{R-r}{a}.$$

Führt man ferner durch D und F die Horizontalen DE und GH und durch c die Verticale cH, so wird der Winkel $HFc = FSG = \varphi$ und $HcD = 90° - \varphi + \alpha$ und man hat in dem rechtwinkligen Dreiecke SGF

$$FG = FS.\sin\varphi = (y - r)\sin\varphi,$$

in dem rechtwinkligen Dreiecke cHF

$$HF = cF.\cos\varphi = x\cos\varphi,$$

also $$FG + HF = DE = x\cos\varphi + (y - r)\sin\varphi.$$

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke cED

$$cD = \frac{DE}{\cos(\varphi - \alpha)} = \frac{x\cos\varphi + (y - r)\sin\varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

folglich

$$CD = a - cD = a - \frac{x\cos\varphi + (y - r)\sin\varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Wird dieser Ausdruck in die vorhin aufgestellte Momentengleichung substituirt; so erhält man

$$ap = [a - \frac{x\cos\varphi + (y - r)\sin\varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}]\, W$$

oder

$$x\cos\varphi + (y - r)\sin\varphi = a\,(1 - \frac{p}{W})\cos(\varphi - \alpha).$$

Für einen andern Neigungswinkel φ der Bettungsrahme, auf welcher p' der Druck der Vorderachse sein möge, hat man eben so

$$x\cos\varphi' + (y - r)\sin\varphi' = a\,(1 - \frac{p'}{W})\cos(\varphi' - \alpha).$$

Aus der Verbindung dieser beiden letztern Gleichungen ergibt sich endlich für die Coordinaten des Schwerpunctes von dem Obergestelle des Fuhrwerkes

$$(1)\quad \begin{cases} x = a\,[\cos\alpha - \dfrac{p\sin\varphi'\cos(\varphi - \alpha) - p'\sin\varphi.\cos(\varphi' - \alpha)}{W\sin(\varphi' - \varphi)}], \\ y = r + a\,[\sin\alpha + \dfrac{p\cos\varphi'.\cos(\varphi - \alpha) - p'\cos\varphi.\cos(\varphi' - \alpha)}{W\sin(\varphi' - \varphi)}] \\ \quad = R + a\,\dfrac{p\cos\varphi'\cos(\varphi - \alpha) - p'\cos\varphi.\cos(\varphi' - \alpha)}{W\sin(\varphi' - \varphi)}. \end{cases}$$

Ist der Druck p' der Vorderachse bestimmt worden, als die Bettungsrahme horizontal, also $\varphi' = 0$ war; so folgen aus letztern Formeln die einfacheren

$$(2)\quad \begin{cases} x = a\cos\alpha\,(1-\dfrac{p'}{W}), \\ y = R+a\sin\alpha\,\dfrac{(p'-p)\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\mathrm{cotg}\,\alpha - p}{W} \\ \quad = R+(R-r)\dfrac{(p'-p)\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\mathrm{cotg}\,\alpha - p}{W}. \end{cases}$$

Für gleich hohe Räder des Fuhrwerkes oder für $R=r$, wo $\alpha=0$ ist, hat man aus (2)

$$(3)\quad x=a\,(1-\frac{p'}{W}),\quad y=R+a\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\frac{(p'-p)}{W}.$$

2) Um den Schwerpunct **U** des Fuhrwerkes sammt den vier Rädern zu bestimmen, bezeichne (Fig. 55. a) **S** den des Obergestelles sammt Ladung, **c**, **C** und q, Q die Schwerpuncte und Gewichte der Vorder- und Hinterräder und man hat für eine Momentenebene **ac**

$$\mathbf{aM}(W+Q+q)=\mathbf{aN}.W+\mathbf{aA}.Q$$

und für eine Momentenebene **aA**

$$\mathbf{MU}(W+Q+q)=\mathbf{ac}.q+\mathbf{NS}.W+\mathbf{AC}.Q$$

oder, wenn man $\mathbf{aN}=x$, $\mathbf{NS}=y$, $\mathbf{aM}=X$, $\mathbf{MU}=Y$ setzt und die übrigen Bezeichnungen wie vorhin beibehält,

$$X(W+Q+q)=xW+a\cos\alpha.Q,$$
$$Y(W+Q+q)=rq+yW+RQ.$$

Bestimmt man hieraus X und Y, indem man zuvor für x und y die Werthe aus (2) setzt: so hat man

$$(4)\quad \begin{cases} X = a\cos\alpha\,[1-\dfrac{p'+q}{W+Q+q}], \\ Y = R+(R-r)\,\dfrac{(p'-p)\mathrm{cotg}\varphi.\mathrm{cotg}\alpha-(p+q)}{W+Q+q}. \end{cases}$$

3) Bei der Bestimmung des Schwerpunctes von einem abgeprotzten Geschütze tritt der Berührungspunct des Protzstockes auf **MN** an die Stelle der Puncte **c** und **a**, es wird folglich $r=0$, $q=0$; dabei sind p und p' die Gewichte des Protzstockes bei der Neigung von **MN** um φ und φ', und a ist die Entfernung jenes Berührungspunctes von der Mittellinie der Lafetenachse. Man hat demnach für den Schwerpunct eines abgeprotzten Geschützes nach Formeln (2) und (4)

$$[2] \quad \begin{cases} x = a\cos\alpha\left(1 - \frac{p'}{W}\right), \\ y = R\left[1 + \frac{(p'-p)\operatorname{cotg}\varphi\operatorname{cotg}\alpha - p}{W}\right], \end{cases}$$

$$[4] \quad \begin{cases} X = a\cos\alpha\left(1 - \frac{p'}{W+Q}\right), \\ Y = R\left[1 + \frac{(p'-p)\operatorname{cotg}\varphi\operatorname{cotg}\alpha - p}{W+Q}\right], \end{cases}$$

wobei $\sin\alpha = \frac{R}{a}$, und $\varphi' = 0$, $W + Q$ das Gewicht des ganzen Geschützes und Q jenes der beiden Laffetenräder ist.

§. 102. Obgleich ein Körper, dessen Schwerpunct vertical unterstützt ist, in Ruhe oder im Gleichgewichte bleibt, so wird doch nach Art der Unterstützung das Gleichgewicht nicht immer derselben Art sein, wie aus folgenden Erörterungen hervorgeht.

1) Besteht die Unterstützung des Schwerpunctes eines Körpers blos aus einem Puncte, so kann dieser entweder ober- oder unterhalb des Schwerpunctes sein.

a) Ist der Unterstützungspunct **A** (**Fig.** 56) oberhalb des Schwerpunctes **C** und wird der Körper um **A** nur etwas gedreht, wobei sein Schwerpunct nach C′ kommt, sonach nicht mehr vertical unterstützt ist, so wird der Körper sich um **A** drehen müssen. Denn denkt man sich in C′ unter C′Q das Gewicht des Körpers, zerlegt dasselbe in die zwei Kräfte C′p und C′q, erstere nach AC′, welche durch die Befestigung **A** aufgehoben wird und letztere darauf senkrecht; so wird diese den Körper um **A**, indem sie den Schwerpunct C′ nach **C** zurückführt, in die vorige Gleichgewichts-Lage bringen. Demnach wird bei einer Unterstützung ober dem Schwerpuncte, sie mag aus einem Puncte oder aus einer geraden Linie (Axe) bestehen, der aus der Gleichgewichts-Lage gebrachte Körper von selbst wieder in dieselbe zurückkehren. Man nennt daher ein solches beharrliches Gleichgewicht stabil; ein an einem Faden oder einer Stange hängender Körper bietet ein stabiles Gleichgewicht.

β) Befindet sich dagegen der feste Unterstützungspunct **A** (**Fig.** 56. a) unter dem Schwerpuncte **C** und wird der Körper nur wenig um **A** aus seiner Lage gedreht, wobei sein Schwerpunct außerhalb der Unterstützung nach C′ kommt; so wird durch die Zerlegung des Gewichtes C′Q auf die vorige Art die erhaltene Kraft C′q den Schwerpunct C′ noch mehr von AC

zu entfernen ſtreben, nemlich den Körper um 180 Grade von ſeiner Gleichgewichts-Lage entfernen.

Der Körper ſchlägt alſo diesfalls ganz um und indem hiebei ſein Schwerpunct nach C″ unter die Unterſtützung kommt, tritt derſelbe ins ſtabile Gleichgewicht. Das Gleichgewicht bei der Unterſtützung unter dem Schwerpuncte iſt ſonach nicht beharrlich und wird deswegen ein labiles Gleichgewicht genannt.

2) Indeſſen kann ein, mit einem ſeiner Puncte auf einer horizontalen Ebene frei aufliegender Körper, wo auch der Schwerpunct oberhalb des Unterſtützungspunctes liegt, bald ein ſtabiles, bald ein labiles Gleichgewicht haben. So z. B. wird eine, auf einer horizontalen Ebene liegende Kugel, da ihr Schwerpunct ſtets unterſtützt iſt, im ſtabilen Gleichgewichte ſein; dasſelbe gilt auch von einem Ellipſoide, wenn ſeine längere Axe zur Ebene parallel iſt, während bei verticaler Lage dieſer Axe nur ein labiles Gleichgewicht beſteht. Ein Kreis-Cylinder mit ſeiner Axe horizontal gelegt, gibt ein ſtabiles Gleichgewicht; hingegen iſt ein elliptiſcher Cylinder bald im ſtabilen, bald im labilen Gleichgewichte. Endlich kann ein mit einer Kante aufliegender Körper nur ein labiles Gleichgewicht haben, u. ſ. w.

3) Wenn ein Körper mit einer Seitenebene oder mit wenigſtens drei Puncten, die aber nicht in einer Geraden ſind, auf einer horizontalen Ebene aufliegt, ſo wird der Körper nur dann ſtehen bleiben, d. i. im ſtabilen Gleichgewichte ſein, wenn die verticale Schwerlinie die aufliegende Seitenebene, oder falls der Körper blos mit mehren Puncten aufliegt, das um dieſe Puncte gezogene Polygon durchſchneidet. Im Gegentheile muß der Körper umfallen oder ſich ſo lange umſchlagen, bis er in eine Lage kommt, in der ſein Schwerpunct unterſtützt wird. Man nennt die Feſtigkeit des Standes eines Körpers auf einer horizontalen Ebene die Stabilität desſelben.

Die Größe der Stabilität wird auf folgende Weiſe beſtimmt.

Ruht ein Körper mit der ebenen Fläche **ABCDE** (Fig. 57) oder blos mit den Puncten **A**, **B**, **C**, **D**, **E** auf einer horizontalen Ebene und fällt man aus ſeinem Schwerpuncte **S** die verticale **SF**, dann aus dem Fußpuncte **F** derſelben auf alle Polygonsſeiten die Senkrechten, wählt unter den letztern die kürzeſte aus, welche **FG** ſein mag und verbindet **S** mit **G**, wo **SG** auf **ED** ſenkrecht iſt; ſo muß auch **FSG** der kleinſte Winkel ſein, den **FS** mit jeder aus **S** auf die übrigen Polygonsſeiten gefällten Senkrechten einſchließt. Dreht man nun den Körper um **ED** bis **GS** in die verticale Lage **ET**, ſo daß der Schwerpunct nach **T** kommt; ſo wird bei der

mindesten Weiterdrehung der Körper gegen U zu umfallen und zwar am leichtesten bei der Drehung um ED, weil FSG = SGT der kleinste Drehwinkel ist. Man kann sonach diesen Winkel, mit dessen Wachsen oder Abnehmen die Stabilität des Körpers größer oder kleiner wird, den Stabilitätswinkel nennen. Überdies sieht man aus $\text{tang FSG} = \frac{FG}{FS}$, daß die Stabilität mit der Ab- oder Zunahme der Erhöhung FS des Schwerpunctes und mit der Zu- oder Abnahme der kleinsten Senkrechten FG größer oder kleiner wird.

Nach diesem hat z. B. unter allen Kegeln von derselben Grundfläche und Höhe der gerade die meiste Stabilität.

Ein Fuhrwerk, dessen Schwerpuncts-Erhöhung FS (Fig. 58) und halbes Weggeleise FG ist, wird auf einer seitwärts geneigten Fahrbahn MN umfallen, wenn die Seitenneigung MNL den Stabilitätswinkel FSG nur um das mindeste überschreitet.

4) Bezeichnet SQ = Q (Fig. 57) das Gewicht des Körpers, ferner SP = P eine in S zu FG parallele Kraft, die den Körper um ED zu drehen, also umzuwerfen strebt, und zerlegt man diese beiden Kräfte in zwei andere, wovon die eine nach SG, die andere darauf senkrecht ist, nemlich Q in die Kräfte q' und q, P in jene p' und p; so werden die nach SG wirkenden Kräfte p' und q' auf die besagte Drehung keinen Einfluß haben, sondern nur die Kräfte p und q, welche aber dabei einander entgegengesetzt sind. Soll daher keine Drehung erfolgen, so müssen diese beiden Kräfte gleich sein. Nun ist

$$p = P \sin \text{PSG} = P \cos \text{FSG} \text{ und}$$

$$q = Q \sin \text{FSG},$$

mithin wegen $p = q$,

$$P = \text{tang FSG}.Q = \frac{FG}{FS}.Q$$

die Kraft, welche, um das mindeste vergrößert, das Umwerfen des Körpers bewirken würde und es wird, wie man sieht, P um so größer, also das Umwerfen um so schwerer, je größer bei sonst gleichen Umständen das Gewicht des Körpers ist. So wird z. B. von zwei ganz gleich construirten Cylindern jener leichter umzuwerfen sein, der das kleinere wirkliche oder specifische Gewicht hat.

§. 103. Zu den Fällen der Stabilität kann man noch die folgende Aufgabe, die uns weiter unten vom Nutzen sein wird, rechnen.

Es seien zwei unbiegsame Geraden AB und CD (Fig. 59), die wir als gleichförmig beschwerte materielle Stäbe annehmen wollen, bei D senkrecht auf einander befestigt und die ganze Vorrichtung CDAB, wobei DA = DB ist, soll sich blos um den Punct C in einer durch ihn gedachten verticalen Ebene herumdrehen lassen.

Wenn man Anfangs AB horizontal, folglich CD vertical annimmt und E der Schwerpunct der Vorrichtung, dessen Gewicht q daselbst vereinigt gedacht werden kann, ist; so wird wegen der verticalen Unterstützung C dieses Schwerpunctes die ganze Vorrichtung ruhen und auch dann noch, wenn man an den Endpuncten A und B die Gewichte $P = Q$ anhängt. Sind aber diese Gewichte verschieden, z. B. $P > Q$, so wird der Schwerpunct derselben in einem Puncte F näher an A als an B sein und der des Ganzen muß, wie G, in der Verbindungslinie FE der Schwerpuncte F und E liegen. Da also G nicht vertical unterstützt ist, so muß sich die Schwerlinie CG, mithin die ganze Vorrichtung um C so viel drehen, bis der Schwerpunct nach G' unter die Unterstützung von C kommt. Die Vorrichtung hat sonach im Zustande des Gleichgewichtes die Lage CD'A'B' angenommen und dabei den Winkel

$$GCG' = CDC' = m$$

beschrieben, welcher nun bestimmt werden soll.

Zieht man zu diesem Zwecke Gg parallel zu AB, so wird in Bezug einer durch C gedachten horizontalen Momentenebene, wenn man $AB = 2a$, $CD = b$ und $CE = c$ setzt,

$$Cg(P + Q + q) = CD(P + Q) + CE.q = b(P + Q) + cq$$

und in Bezug einer durch C auf AB senkrecht gedachten, also verticalen Momentenebene

$$Gg(P + Q + q) = AD.P - BD.Q = a(P - Q),$$

also durch die Division beider Gleichungen

$$\frac{Gg}{Cg} = \text{tang}\, m = \frac{a(P - Q)}{b(P + Q) + cq}.$$

Sechster Abschnitt.

Von den Kräften, welche auf ein System unveränderlich mit einander verbundener Puncte nach verschiedenen Richtungen wirken.

A. Von den Kräften, deren Richtungen in einer Ebene liegen.

§. 104. Wenn auf einen Punct C (Fig. 60) drei Kräfte P, Q und R wirken, welche entweder im Gleichgewichte sind oder von denen die eine R, gerade entgegengesetzt nach CR′ angebracht, die Resultirende der beiden andern Kräfte P und Q ist; so hat man in beiden Fällen (§. 46)

$$P : Q : R = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\lambda,$$

wo α, β, λ die Winkel bezeichnen, die von den Richtungen der Kräfte Q und R, P und R, P und Q gebildet werden.

Fällt man aus irgend einem Puncte M in der Richtung der einen Kraft die Senkrechten Mp, Mq auf die Richtungen der beiden andern; so ist wegen

$$\sin\alpha = \frac{Mq}{MC},\ \sin\beta = \frac{Mp}{MC}\ \text{auch}$$

$$P : Q = \sin\alpha : \sin\beta = \frac{Mq}{MC} : \frac{Mp}{MC} = Mq : Mp.$$

Eben so erhält man, wenn aus einem Puncte M′ in der Richtung einer andern Kraft auf die Richtungen der beiden übrigen die Senkrechten Mp′, Mr′ gefällt werden,

$$\sin\alpha = \frac{M'r'}{M'C}, \quad \sin\lambda = \frac{M'p'}{M'C}, \text{ folglich}$$

$$P : R = \sin\alpha : \sin\lambda = \frac{M'r'}{M'C} : \frac{M'p'}{M'C} = M'r' : M'p'.$$

Eben so findet man noch für einen Punct M″ in der Richtung der Kraft P

$$Q : R = M''r'' : M''q''.$$

Man hat also

$$P : Q = Mq : Mp \quad \text{oder} \quad P.Mp = Q.Mq,$$
$$P : R = M'r' : M'p' \quad „ \quad P.M'p' = R.M'r',$$
$$Q : R = M''r'' : M''q'' \quad „ \quad Q.M''q'' = R.M''r'',$$

d. h. wenn drei Kräfte auf einen Punct C wirken und entweder im Gleichgewichte sind oder die eine von ihnen die Resultirende der beiden andern ist; so verhalten sich die beiden letztern Kräfte wie umgekehrt ihre Abstände von irgend einem Puncte der dritten Kraft oder die Momente dieser beiden Kräfte sind in Bezug dieses Punctes gleich. Ein Satz, der für parallele Kräfte schon früher (§. 64) bewiesen wurde und hier aus der Annahme des unendlichen Wachsens von MC, M′C oder M″C hervorgeht.

Da bei drei auf einen Punct wirkenden und im Gleichgewichte befindlichen Kräften durch Befestigung irgend eines Punctes in der Richtung einer von ihnen, ohne die Drehung um denselben in der Ebene der Kräfte zu hemmen, die Wirkung dieser Kraft aufgehoben wird; so können auch die beiden andern Kräfte um den befestigten Punct keine Drehung hervorbringen und sind somit im Gleichgewichte. Dabei verhalten sich diese beiden Kräfte zu einander wie umgekehrt ihre Abstände von dem befestigten Puncte oder die Momente derselben sind in Bezug auf diesen Punct gleich. Umgekehrt, wenn zwei in einer Ebene befindlichen Kräfte hinsichtlich eines Punctes in dieser Ebene gleiche Momente und bei Befestigung dieses Punctes entgegengesetztes Drehungsbestreben um denselben haben; so müssen sie im Gleichgewichte sein und der Druck auf den befestigten Punct kommt mit der Größe und Richtung der Resultirenden beider Kräfte überein.

§. 105. Wenn auf den Punct C (Fig. 61. a und b) zwei Kräfte P und Q wirken, deren Resultirende R ist und man aus einem Puncte M in der Ebene der Kräfte, der jedoch (Fig. 61. a) außerhalb oder (Fig. 61. b) innerhalb des Kräftenwinkels ACB liegen kann, auf die Richtungen dieser Kräfte P, Q, R

die Senkrechten Mp, Mq, Mr fällt, welche respective mit p, q, r bezeichnet werden mögen; so hat man

in den ähnlichen Dreiecken AFB und MqB $AF:q = AB:MB$,
„ „ „ „ „ „ MrD „ DAE $r:AE = DM:AD$,
und wegen vorigen §. $R:Q = AF:AE$,
sofort als Product dieser Proportionen

$$Rr:Qq = DM.AB:AD.BM. \qquad (\mathfrak{A})$$

Ferner ist

in den ähnlichen Dreiecken DHB und MqB $DH:q = DB:MB$,
„ „ „ „ „ „ ADG „ AMp $p:DG = AM:AD$,
und nach vorigem §. $P:Q = DH:DG$,
woraus durch Multiplication dieser Proportionen

$$Pp:Qq = DB.AM:AD.BM \qquad (\mathfrak{B})$$

erhalten wird.

Schließt man hier durch übereinstimmende Addition mit Bezug auf Fig. 61. a, so wird

$$\begin{aligned} Pp + Qq : Qq &= DB.AM + AD.BM : AD.BM \\ &= (DM - BM)\,AM + AD.BM : AD.BM \\ &= DM.AM - DM.BM : AD.BM \\ &= DM.AB : AD.BM \end{aligned}$$

und es folgt aus dem Vergleiche dieser Proportion mit ($\mathfrak{A}$) für Fig. 61. a

$$(1) \quad Rr = Pp + Qq.$$

Mit Bezug auf Fig. 61. b ergibt sich aber aus ($\mathfrak{B}$)

$$\begin{aligned} Pp - Qq : Qq &= DB.AM - AD.BM : AD.BM \\ &= (DM + MB)\,AM - AD.BM : AD.BM \\ &= DM.AM + MB.DM : AD.BM \\ &= DM.AB : AD.BM, \end{aligned}$$

daher in Verbindung mit ($\mathfrak{A}$) für Fig. 61. b

$$(2) \quad Rr = Pp - Qq.$$

Die Gleichungen (1) und (2) geben zu erkennen, daß das Moment der Resultirenden der Summe oder Differenz der Momente ihrer Seitenkräfte gleich ist, je nachdem der Momentenpunct M (Fig. 61. a) außer- oder (Fig. 61. b) innerhalb des Kräftenwinkels ACB oder auch außer- oder innerhalb seines Scheitelwinkels A′CB′ angenommen wird. Zum Beweise für letztern Winkel darf man nur Cr von C gegen D′ auftragen, daselbst eine Senkrechte auf CD′ errichten, bis diese die Verlängerung der Verbindungslinie MC durchschneidet; denn dadurch erhält dieser Durchschnittspunct als Momentenpunct dieselbe Lage gegen A′C, B′C, D′C, wie M ge-

gen AC, BC, DC und somit werden die Gleichungen (1) und (2) für den neuen Momentenpunct nicht verändert.

Man weiß nun zwar durch den so eben ausgesprochenen Satz, wann die Summe und wann die Differenz der Momente zu nehmen sei, doch welches Moment im letztern Falle das positive, welches das negative Zeichen erhalten soll, würde erst die Beachtung, ob der Momentenpunct zwischen P und R, oder zwischen Q und R liegt, lehren. Allein man gelangt einfacher zu den Zeichen der Momente, wenn man den Satz über dieselben bei Betrachtung der Gleichungen (1) und (2) mit Bezug auf die zugehörigen Fig. 61. a und b so ausspricht: Von zwei auf einen Punct wirkenden Kräften ist das Moment der Resultirenden der algebraischen Summe der Momente dieser Kräfte gleich, indem man in dieser Summe die Momente positiv oder negativ nimmt, je nachdem die beiden Kräfte einerlei oder entgegengesetztes Drehungsbestreben um den fest gedachten Momentenpunct haben und es hat nach den positiven oder negativen Zeichen, womit das Moment der Resultirenden aus der Rechnung hervorgeht, diese Kraft dasselbe Drehungsbestreben mit derjenigen Seitenkraft, deren Moment positiv oder negativ angenommen worden war.

Anmerkung. Da jede der Kräfte P und Q in zwei Kräfte, jede solche Seitenkraft wieder in zwei andere zerlegt werden kann u. s. f.; so folgert sich daraus, daß das Moment der Resultirenden von noch so vielen auf einen Punct wirkenden Kräften der algebraischen Summe dieser Kräfte gleich sein müsse. Um eine Anwendung des in den letzten §. und des über die parallelen Kräfte Vorgetragenen zu zeigen, mögen hier folgende zwei Probleme gelöst werden.

1. Es ist unter der Voraussetzung, daß bei der Entzündung der Ladung einer Kanone die Pulverkraft nach der Richtung der Seellinie wirke, der Druck, den die Richtmaschine beim Abfeuern erleidet, zu bestimmen.

Lösung. Es sei AB (Fig. 28. a) die Richtung der Seellinie, $DC = a$ die Herabsetzung der Schildzapfen, $DB = b$ die Projection der Entfernung der Schildzapfenaxe vom Aufliegepuncte des Stoßbodens auf die Seellinie, P die Größe der Pulverkraft und Q der Druck auf die Richtmaschine. Da wegen der Unveränderlichkeit des Systems auch der Punct C von der Kraft P so afficirt wird, wie die übrigen Puncte desselben; so muß, um das Gleichgewicht herzustellen, in C eine zur Kraft P gleiche und parallel entgegengesetzt wirkende P' angebracht werden. Diese zwei Kräfte bewirken aber noch eine Drehung von AB und DC um C, welche dadurch, daß man der CD entgegengesetzt in irgend einem Puncte B der AB senkrecht eine Kraft Q anbringt, aufgehoben

werden kann. Diese Kraft Q drückt mithin die Größe des Druckes, den die Richtmaschine **E** zu erleiden hat, aus und man hat, wenn **C** als Momentenpunct genommen wird, offenbar

$$Pa - Qb = 0,$$

woraus

$$Q = \frac{a}{b} P$$

folgt. Dieser Druck wird demnach immer kleiner, je geringer die Herabsetzung der Schildzapfen ist und verschwindet gänzlich, wenn die Schildzapfenaxe die Seellinie durchschneidet.

2. Unter derselben Voraussetzung ist die Wirkung der Pulverkraft auf den Protzstock zu bestimmen.

Lösung. Es sei (Fig. 28. b) **AB** eine durch die Mitte **A** der Schildzapfenaxe zur Seellinie parallel gezogene Gerade, **B** der Punct, wo die Ebene der Bettung oder deren Verlängerung von ihr durchschnitten wird, **AC** die mittlere Richtung der Lafettenwände oder die Widerstemmungslinie und es wirke die Pulverkraft in der Richtung **AB**.

Bezeichnet man den Elevationswinkel des Rohres **ABC** durch φ und den Winkel **ACD**, den die Widerstemmungslinie mit dem Horizonte einschließt, durch n, so hat man, wenn P in eine zum Horizonte parallele Kraft Q und in eine R nach der Richtung **AC** zerlegt wird,

$$P : Q : R = \sin n : \sin(n - \varphi) : \sin\varphi, \text{ also}$$

$$Q = \frac{P\sin(n-\varphi)}{\sin n} \quad \text{und} \quad R = \frac{P\sin\varphi}{\sin n}.$$

Zerlegt man die nach **C** versetzte Kraft R, was wegen der Unveränderlichkeit des Systems geschehen darf, in die horizontale Kraft T und in die verticale S, so wird

$$T = R\cos n = P\sin\varphi\cot g\, n \quad \text{und} \quad S = R\sin n = P\sin\varphi.$$

Man hat daher nach horizontaler Richtung die Kräfte Q und T, deren Resultirende

$$U = Q + T = \frac{P\sin(n-\varphi)}{\sin n} + P\sin\varphi\cot g\, n = P\cos\varphi$$

ist. Die Kraft S sucht sonach den Protzstock vertical gegen die Erde zu drücken, jene U ihn horizontal fortzubewegen und es sind beide Kräfte völlig unabhängig von der Neigung der Widerstemmungslinie gegen den Horizont. Zugleich erkennt man, daß das Zurückspielen mit der Abnahme des Elevationswinkels wächst und der verticale Stoß abnimmt.

Anmerkung. Da hier die Massen der einzelnen Theile nicht berücksichtigt wurden, so sieht man wohl leicht, daß das Problem des Rückstoßes nur unvollkommen gelöst werden konnte; es vollkommen zu lösen, würde die ohnehin schon überschrittenen Grenzen dieses Lehrbuches noch mehr verrücken, weshalb der Wißbegierige nur auf die Abhandlung *Poisson's*, welcher das Problem zuerst löste: *Formules*

relatives aux effets du tir sur les différentes parties de l'affût und auf die Schrift: *Essai sur la théorie des affûts et des voitures d'artillerie par Migout et Bergery* aufmerksam gemacht werden soll.

§. 106. Bei mehren Kräften P, P', P'',... (Fig. 62), deren Richtungen mP, m'P', m''P'',... und fest mit einander verbundene Angriffspuncte m, m', m'',... in derselben Ebene liegen, nehme man in dieser ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, bestimme gegen dasselbe in Größe und Zeichen nach §. 5. I sowohl die Coordinaten

$$x,\ y,\ x',\ y',\ x'',\ y'',\ \ldots$$

jener Angriffspuncte, als auch nach §. 17. I die Winkel

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta',\ \alpha'',\ \beta'',\ \ldots,$$

welche die gegebenen Kräfte mit den positiven Halbaxen Ox, Oy einschließen und man erhält, wenn jede Kraft in zwei, zu den Coordinatenaxen parallele, Seitenkräfte zerlegt wird,

zu Ox parallel

$$P\cos\alpha,\ P'\cos\alpha',\ P''\cos\alpha'',\ \ldots$$

zu Oy parallel

$$P\cos\beta,\ P'\cos\beta',\ P''\cos\beta'',\ \ldots$$

Nennen wir X die Resultirende der erstern, Y die der andern parallelen Kräfte, ξ, η die Coordinaten des Angriffspunctes von X und ξ', η' die des Angriffspunctes von Y; so hat man (§. 56 und 72)

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = \Sigma P\cos\alpha,$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = \Sigma P\cos\beta,$$
$$\xi X = xP\cos\alpha + x'P'\cos\alpha' + x''P''\cos\alpha'' + \ldots = \Sigma xP\cos\alpha,$$
$$\eta X = yP\cos\alpha + y'P'\cos\alpha' + y''P''\cos\alpha'' + \ldots = \Sigma yP\cos\alpha,$$
$$\xi' Y = xP\cos\beta + x'P'\cos\beta' + x''P''\cos\beta'' + \ldots = \Sigma xP\cos\beta,$$
$$\eta' Y = yP\cos\beta + y'P'\cos\beta' + y''P''\cos\beta'' + \ldots = \Sigma yP\cos\beta.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man die algebraischen Werthe von X und Y und aus den vier folgenden könnte man die Coordinaten ξ, η und ξ', η' des Angriffspunctes einer jeden dieser Kräfte oder des Mittelpunctes eines jeden Systems der parallelen Kräfte bestimmen. Da aber hier blos der Durchschnittspunct der Kräfte X und Y nöthig ist, der immer stattfinden muß, wenn diese, also auch die gegebenen Kräfte P, P', P'', ... eine Resultirende haben; so bedarf man für diesen Durchschnittspunct blos den Abstand η der Kraft X von Ox und den Abstand ξ' der Kraft Y von Oy, wofür wir ξ setzen wollen.

Man hat nemlich, wenn man die Resultirende der gegebenen Kräfte mit R und die Winkel, welche dieselbe mit den positiven Halbaxen Ox, Oy

einschließt, mit a, b bezeichnet, wornach

$$R\cos a = X, R\cos b = Y \text{ ist, die Gleichungen}$$

$$(1)\quad \begin{cases} X = R\cos a = \Sigma P\cos\alpha, \\ Y = R\cos b = \Sigma P\cos\beta, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \eta X = \eta . R\cos a = \Sigma yP\cos\alpha, \\ \xi Y = \xi . R\cos b = \Sigma xP\cos\beta \end{cases}$$

und es ergibt sich durch die Differenz der beiden letzten Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} \eta X - \xi Y = \eta . R\cos a - \xi . R\cos b = \Sigma(yP\cos\alpha - xP\cos\beta) \\ \qquad = (yP\cos\alpha - xP\cos\beta) + (y'P'\cos\alpha' - x'P'\cos\beta') + \ldots \end{cases}$$

Da die Winkel a, α, α', α'', . . . und b, β, β', β'', . . . von Ox und Oy aus nach beiden Seiten bis zu 180° gerechnet werden und sonach die Cosinus dieser Winkel theils positiv, theils negativ sich ergeben, so wie ferner die Coordinaten ξ, x, x', x'', . . ., η, y, y', y'', . . . ihre Zeichen nach der Lage der Angriffspuncte gegen das Coordinatensystem erhalten; so sind die Glieder in den vorstehenden Gleichungen im algebraischen Sinne zu nehmen.

Endlich gibt die Betrachtung der Glieder in der Gleichung (3) — wo $yP\cos\alpha$ das Moment der Kraft $P\cos\alpha$, $xP\cos\beta$ das der Kraft $P\cos\beta$ in Bezug auf den Punct O vorstellt und $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$ die Seitenkräfte von P sind — daß vermöge vorigen §. die algebraische Summe $yP\cos\alpha - xP\cos\beta$ das Moment von P in Bezug auf den Punct O ist. Eben so ist $y'P'\cos\alpha' - x'P'\cos\beta'$ das Moment von P', u. s. w. so wie auch $\eta X - \xi Y = \eta R\cos a - \xi R\cos b$ das von R. Bezeichnet man daher die Abstände der Kräfte R, P, P', P'', . . . von O mit r, p, p', p'', . . .; so stellt die Gleichung (3) auch folgende Momentengleichung

$$(4)\quad Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = \Sigma Pp$$

vor und man hat in dem Falle, als der Momentenpunct O in der Richtung der Resultirenden angenommen wird, also $r = 0$ ist,

$$(5)\quad Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = \Sigma Pp = 0.$$

§. 107. Aus den Gleichungen (1) folgt

$$(6)\quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ und}$$

$$(7)\quad \cos a = \frac{X}{R},\ \cos b = \frac{Y}{R},$$

woraus die Größe der Resultirenden und ihre Neigung gegen die positiven Coordinatenaxen eben so bestimmt werden, als ob die Kräfte

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ \ldots .$$

ihren Richtungen parallel in einem Puncte angebracht wären.

Die Gleichungen (2) geben die Coordinaten für den Angriffspunct der Resultirenden

$$(8)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\Sigma xP\cos\beta}{Y} = \dfrac{\Sigma xP\cos\beta}{\Sigma P\cos\beta}, \\ \eta = \dfrac{\Sigma yP\cos\alpha}{X} = \dfrac{\Sigma yP\cos\alpha}{\Sigma P\cos\alpha}, \end{cases}$$

so daß also durch die Formeln (6), (7) und (8) die Größe, Richtung und der Angriffspunct der Resultirenden vollkommen bestimmt ist und es kann dabei diese Kraft nach ihrer Richtung in dem durch (8) bestimmten oder in jedem andern Puncte dieser Richtung angebracht werden.

Da der nach den Formeln (8) bestimmte Angriffspunct eine festgesetzte Lage gegen die Angriffspuncte der Kräfte

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ \ldots .$$

hat und sonach unverändert bleiben muß, wenn diese Kräfte um ihre Angriffspuncte in was immer für eine Lage mit Beibehaltung ihrer gegenseitigen Lagen gedreht werden; so ist jener Angriffspunct auch hier der Mittelpunct der gegebenen Kräfte. *)

---

*) Nachweisen läßt sich dies, wenn man jeden der Winkel $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ um φ vermehrt, folglich jeden der Winkel $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ um φ vermindert, weil $\alpha+\beta$, $\alpha'+\beta'$, u. s. w. unverändert bleiben muß; wenn man ferner für die neue Lage die Resultirende der Kräfte $P, P', P'', \ldots$ durch R', die Seitenkräfte der letztern durch X', Y', die Coordinaten ihres Angriffspunctes durch u, v und endlich ihre Neigung gegen die positiven Coordinatenaxen durch a', b' bezeichnet; denn man hat dann

$$X' = P\cos(\alpha+\varphi) + P'\cos(\alpha'+\varphi) + \ldots = \cos\varphi\,\Sigma P\cos\alpha - \sin\varphi\,\Sigma P\sin\alpha$$
$$= \cos\varphi\,\Sigma P\cos\alpha \mp \sin\varphi\,\Sigma P\cos\beta = \cos\varphi.X \mp \sin\varphi.Y,$$
$$Y' = P\cos(\beta-\varphi) + P'\cos(\beta'-\varphi) + \ldots = \cos\varphi\,\Sigma P\cos\beta + \sin\varphi\,\Sigma P\sin\beta$$
$$= \cos\varphi\,\Sigma P\cos\beta \pm \sin\varphi\,\Sigma P\cos\alpha = \cos\varphi.Y \pm \sin\varphi.X,$$
$$\text{also } R' = \sqrt{X'^2+Y'^2} = \sqrt{\cos^2\varphi(X^2+Y^2)+\sin^2\varphi(X^2+Y^2)} = \sqrt{X^2+Y^2} = R,$$
$$\cos a' = \frac{X'}{R'} = \frac{X'}{R} = \cos\varphi.\frac{X}{R} \mp \sin\varphi.\frac{Y}{R} = \cos\varphi\cos a \mp \sin\varphi\cos b$$
$$= \cos\varphi\cos a - \sin\varphi\sin a = \cos(a+\varphi),$$
$$\cos b' = \frac{Y'}{R'} = \frac{Y'}{R} = \cos\varphi.\frac{Y}{R} \pm \sin\varphi.\frac{X}{R} = \cos\varphi\cos b \pm \sin\varphi\cos a$$
$$= \cos\varphi.\cos b + \sin\varphi\sin b = \cos(b-\varphi), \quad \text{ferner}$$

§. 108*. Wenn $X=\Sigma P\cos\alpha$ sich auf Null reducirt und nicht zugleich auch $\Sigma yP\cos\alpha$ Null wird oder wenn $Y=\Sigma P\cos\beta$ Null wird und nicht zugleich auch $\Sigma xP\cos\beta$; so erhält man aus den Gleichungen (2) im ersten Falle η, im zweiten Falle ξ unendlich groß, was anzeigt, daß in jenem Falle die zu Ox parallelen Kräfte und im letztern die zu Oy parallelen sich auf ein Kräftenpaar reduciren (§. 60). Ob aber in solchen Fällen die gegebenen Kräfte

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ldots.$$

eine Resultirende haben, wird die folgende Untersuchung zeigen.

I. Wird $X=\Sigma P\cos\alpha=0$, d. h. wird die algebraische Summe der zu Ox parallelen Kräfte gleich Null, so denken wir uns eine dieser Kräfte $P\cos\alpha$ vor der Hand unbeachtet, bezeichnen die Resultirende der übrigen zu Ox parallelen Kräfte durch X' und ihren Abstand von dieser Axe durch η' und es ist

$$X'=P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+\ldots.=\Sigma P\cos\alpha-P\cos\alpha=-P\cos\alpha,$$
$$X\eta'=y'P'\cos\alpha'+y''P''\cos\alpha''+\ldots.=\Sigma yP\cos\alpha-yP\cos\alpha$$

und daher

$$\text{(a)}\quad \eta'=\frac{\Sigma yP\cos\alpha-yP\cos\alpha}{X'}=y-\frac{\Sigma yP\cos\alpha}{P\cos\alpha}.$$

Wir haben demnach (Fig. 63) parallel zu Ox die Kraft $P\cos\alpha$ im Abstande y und die parallel entgegengesetzte Kraft $X'=-P\cos\alpha$ im Abstande η', ferner parallel zu Oy im Abstande ξ die Resultirende Y der zu dieser Axe parallelen Kräfte. Denken wir uns die Kräfte Y und $P\cos\alpha$ in dem Durchschnittspuncte N ihrer Richtungen angebracht und in die Kraft R' zusammengesetzt, sodann letztere in den Durchschnittspunct M ihrer Richtung mit jener der X' versetzt und daselbst wie-

---

$$v X'=yP\cos(\alpha+\varphi)+y'P'\cos(\alpha'+\varphi)+\ldots.,$$
$$u Y'=xP\cos(\beta-\varphi)+x'P'\cos(\beta'-\varphi)+\ldots.\text{ und daraus}$$
$$v=\frac{\cos\varphi\Sigma yP\cos\alpha-\sin\varphi\Sigma yP\sin\alpha}{X'}=\frac{\cos\varphi\,\Sigma yP\cos\alpha\mp\sin\varphi\Sigma yP\cos\beta}{X'}$$
$$=\frac{\cos\varphi.\eta X\mp\sin\varphi.\eta Y}{\cos\varphi.X\mp\sin\varphi.Y}=\eta,$$
$$u=\frac{\cos\varphi\Sigma xP\cos\beta+\sin\varphi\Sigma xP\sin\beta}{Y'}=\frac{\cos\varphi\Sigma xP\cos\beta\pm\sin\varphi\Sigma xP\cos\alpha}{Y'}$$
$$=\frac{\cos\varphi.\xi Y\pm\sin\varphi.\xi X}{\cos\varphi.Y\pm\sin\varphi.X}=\xi.$$

Da also $R'=R$, $v=\eta$, $u=\xi$, $a'=a+\varphi$, $b'=b-\varphi$ erhalten wurde; so ist die oben ausgesprochene Eigenschaft des Angriffspunctes der Resultirenden als Mittelpunct der Kräfte gerechtfertigt.

der in ihre Seitenkräfte zerlegt; so erhält man nach **MS** die Seitenkraft $P\cos\alpha$, welche sich mit der gerade entgegengesetzten gleichen Kraft $X' = -P\cos\alpha$ aufhebt und nach **MT** die Seitenkraft Y parallel zu **Oy**, welche sofort die Resultirende aller gegebenen Kräfte ist. Der Abstand dieser Resultirenden von der genannten Axe ist $O\xi'$, den wir durch ξ' bezeichnen wollen und auf folgende Art finden. Sind a', b' die Winkel, welche R' mit **Ox** und **Oy** einschließt; so hat man im rechtwinkligen Dreiecke **MTN**, wo $TNM = a'$, $TMN = b'$ ist,

$$MN = \frac{\xi - \xi'}{\cos a'} = \frac{y - \eta'}{\cos b'},$$

oder wegen $\cos a' = \frac{P\cos\alpha}{R'}$, $\cos b' = \frac{Y}{R'}$ sofort

$$\frac{\xi - \xi'}{P\cos\alpha} = \frac{y - \eta'}{Y}.$$

Setzt man hier für η' den vorhin gefundenen Werth oder

$$y - \eta' = \frac{\Sigma yP\cos\alpha}{P\cos\alpha};$$

so erhält man

$$\xi - \xi' = \frac{\Sigma yP\cos\alpha}{Y}, \text{ und daraus}$$

$$\text{(b)}\quad \xi' = \frac{\xi Y - \Sigma yP\cos\alpha}{Y} = \frac{\Sigma xP\cos\beta - \Sigma yP\cos\alpha}{Y} = \frac{\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)}{Y},$$

also hat ξ' denselben Werth, den wir für $X = 0$ aus der Gleichung (3) für ξ erhalten.

Diese Untersuchung gibt nun folgende Resultate.

a) Für $X = 0$ wird die Resultirende der gegebenen Kräfte

$$P,\ P,'\ P'',\ P''',\ \ldots .$$

gleich der Resultirenden Y von den zur Axe **Oy** parallelen Kräften und ihr Abstand ξ' von dieser Axe ist durch die Gleichung (3) bestimmt.

b) Wird nebst $X = 0$ auch $\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0$, so hat man den Fall wie in a), nur daß hier $\xi' = 0$ wird, sonach Y in die Axe **Oy** fällt.

c) Ist endlich nebst $X = 0$ auch noch die Summe der Momente dieser zur Axe **Ox** parallelen Kräfte in Bezug auf diese Axe Null, nemlich $\Sigma yP\cos\alpha = 0$, so ist nach Gleichung (b)

$$\xi' = \xi = \frac{\Sigma xP\cos\beta}{Y}$$

und nach Gleichung (a)

$$\eta' = y.$$

Letzteres zeigt an, daß die Kräfte $P\cos\alpha$ und $X' = -P\cos\alpha$ gerade entgegengesetzt, somit im Gleichgewichte sind, welches sonach auch zwischen allen zur Axe Ox parallelen Kräften besteht und $\xi' = \xi$ gibt zu erkennen, daß die Resultirende Y der zu Oy parallelen Kräfte auch die aller gegebenen Kräfte ist und ihre Lage so hat, als ob jene parallelen Kräfte gar nicht vorhanden wären.

II. Ergibt sich $X = \Sigma P\cos\alpha = 0$ und zugleich $Y = \Sigma P\cos\beta = 0$, so lassen wir $P\cos\beta$ außer Acht, bezeichnen die Resultirende der übrigen zu Oy parallelen Kräfte durch Y' und ihren Abstand von dieser Axe durch ξ' und man hat wie in I

$$X = \Sigma P\cos\alpha = 0,$$

$$Y' = P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = \Sigma P\cos\beta - P\cos\beta = -P\cos\beta$$

nicht Null und

$$\xi' Y' = x'P'\cos\beta' + x''P''\cos\beta'' + \ldots = \Sigma xP\cos\beta - xP\cos\beta,$$

folglich, wenn man in die Gleichung (b) Y', ξ', ξ'' an die Stelle von Y, ξ, ξ' setzt,

$$(c)\quad \xi'' = \frac{\xi' Y' - \Sigma yP\cos\alpha}{Y'} = \frac{\Sigma xP\cos\beta - xP\cos\beta - \Sigma yP\cos\alpha}{-P\cos\beta}$$

$$= x - \frac{\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)}{P\cos\beta}.$$

Man hat sonach mit Ausschluß der Kraft $P\cos\beta$ für alle übrigen zu Oy sowohl als für sämmtliche zu Ox parallelen Kräfte die Resultirende $Y' = -P\cos\beta$ im Abstande ξ''. Nimmt man nun die vorhin außer Acht gelassene Kraft $P\cos\beta$ dazu, die im Abstande x zu Oy parallel wirkt; so sieht man, daß in dem Falle $X = 0$ und $Y = 0$ die gegebenen Kräfte P, P', P'', . . . sich auf zwei parallele Kräfte $Y' = -P\cos\beta$ und $P\cos\beta$ reduciren, deren Abstände von Oy

$$\xi'' = x - \frac{\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)}{P\cos\beta} \text{ und } x$$

sind.

d) Wird aber nebst $X=0$ und $Y=0$ auch noch $\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0$, wodurch $\xi'' = x$ wird; so sind die Kräfte $P\cos\beta$ und $Y' = -P\cos\beta$ gerade entgegengesetzt, somit im Gleichgewichte, welches also auch zwischen allen Kräften P, P', P'', . . . besteht.

e) Dieses Gleichgewicht findet noch statt, wenn mit $X=0$, $Y=0$ auch $\Sigma yP\cos\alpha = 0$ und $\Sigma xP\cos\beta = 0$ wird, weil in diesem Falle eben-

falls $\xi'' = x$ wird. Allein dieser Fall unterscheidet sich von jenem in d), daß hier wegen $X = 0$ und $\Sigma yP\cos\alpha = 0$ die zu Ox parallelen Kräfte für sich und wegen $Y = 0$ und $\Sigma xP\cos\beta = 0$ die zu Oy parallelen Kräfte für sich im Gleichgewichte sind.

§. 109. Aus den beiden vorigen §. hat man in Kürze folgende Resultate.

1) Ist von den Summen $X = \Sigma P\cos\alpha$, $Y = \Sigma P\cos\beta$ keine Null, so haben die Kräfte P, P', P'', . . . stets eine Resultirende, deren Größe durch die Gleichung (6) und deren Lage sammt ihrem Angriffspuncte durch die Gleichungen (7) und (8) bestimmt wird.

2) Ist eine dieser Summen, z. B. $X = \Sigma P\cos\alpha = 0$, so haben die Kräfte P, P', P'', . . . die Resultirende $Y = \Sigma P\cos\beta$ parallel zu Oy in dem Abstande $\xi' = \dfrac{\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)}{Y}$, oder in der Axe Oy selbst, wenn noch $\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0$ ist. Wird aber nebst $X = 0$ auch $\Sigma yP\cos\alpha = 0$; so sind die zu Ox parallelen Kräfte im Gleichgewichte und die Resultirende R aller Kräfte P, P', P'', . . . kommt in Lage und Größe mit der Resultirenden Y der zu Oy parallelen Kräfte, als ob jene erstern parallelen gar nicht da wären, ganz überein.

3) Ist $X = 0$ und $Y = 0$, so erhält man anstatt einer Resultirenden ein zu Oy paralleles Kräftenpaar wie $P\cos\beta$ und $-P\cos\beta$ in den respectiven Abständen x und $x - \dfrac{\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)}{P\cos\beta}$. Wird aber nebstbei $\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0$, wodurch diese beiden Abstände gleich werden; so sind die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte. Dieses findet auch noch statt, wenn $X = 0$, $Y = 0$ und zugleich $\Sigma yP\cos\alpha = 0$, $\Sigma xP\cos\beta = 0$ ist, nur daß diesfalls auch noch die zu Ox und die zu Oy parallelen Kräfte für sich im Gleichgewichte sind.

Im Allgemeinen hat man für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ \ldots$$

wenn sie in einer Ebene liegen, die Bedingungsgleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = \Sigma P\cos\alpha = 0, \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = \Sigma P\cos\beta = 0, \end{cases}$$

$$(10)\quad P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots = \Sigma(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

B. Von den Kräften, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen.

§. 110. Wenn mehre Kräfte P, P', P'', . . . auf ein System von Puncten m, m′, m″, . . . (Fig. 64), die nicht in einer Ebene liegen oder auf einen Körper wirken, so nehme man ein rechtwinkliges Coordinatensystem Ox, Oy, Oz an und bestimme mittels desselben sowohl die Coordinaten der Angriffspuncte mit den gehörigen Vorzeichen (§. 5. II) als auch die Winkel, welche die gegebenen Kräfte mit den positiven Halbaxen einschließen (§. 17. II). Es seien

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ x'',\ y'',\ z'',\ \ldots .$$

die Coordinaten der Puncte m, m′, m″, . . . und

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma'',\ \ldots .$$

die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P, P', P'', . . . mit den positiven Halbaxen Ox, Oy, Oz einschließen. Zerlegen wir nun jede Kraft nach den Richtungen der Coordinatenaxen in drei auf einander rechtwinklig wirkende; so erhält man

parallel zu Ox die Kräfte $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$, ...,
„ „ Oy „ „ $P\cos\beta$, $P'\cos\beta'$, $P''\cos\beta''$, ...,
„ „ Oz „ „ $P\cos\gamma$, $P'\cos\gamma'$, $P''\cos\gamma''$, ...

Bezeichnet man die Resultirende der zu Ox, Oy, Oz parallelen Kräfte respective durch X, Y, Z und die Coordinaten ihrer Angriffspuncte durch ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', ξ''', η''', ζ'''; so ist (§. 65 und 73)

$$\begin{array}{lll} X = \Sigma P\cos\alpha, & Y = \Sigma P\cos\beta, & Z = \Sigma P\cos\gamma, \\ X\xi' = \Sigma xP\cos\alpha, & Y\xi'' = \Sigma xP\cos\beta, & Z\xi''' = \Sigma xP\cos\gamma, \\ X\eta' = \Sigma yP\cos\alpha, & Y\eta'' = \Sigma yP\cos\beta, & Z\eta''' = \Sigma yP\cos\gamma, \\ X\zeta' = \Sigma zP\cos\alpha, & Y\zeta'' = \Sigma zP\cos\beta, & Z\zeta''' = \Sigma zP\cos\gamma. \end{array}$$

Wie schon öfters erwähnt, sind die Summen algebraisch, indem die Zeichen ihrer Glieder von den Zeichen der Coordinaten und Cosinus abhängen.

Haben die Kräfte P, P', P'', . . . eine Resultirende, so ist sie auch die der Kräfte X, Y, Z und es müssen sich also diesfalls letztere in irgend einem Puncte M durchschneiden. Dieses wird geschehen, wenn unter den Coordinaten

$$\xi',\ \eta',\ \zeta',\ \xi'',\ \eta'',\ \zeta'',\ \xi''',\ \eta''',\ \zeta''',\ \ldots .$$

die Vergleichungen

$$\xi'' = \xi''',\ \eta' = \eta''',\ \zeta' = \zeta''$$

stattfinden, während ξ', η'', ζ''' was immer für endliche Werthe erhalten können.

Bezeichnet man demnach durch R die Resultirende der gegebenen Kräfte P, P', P'', ... oder der Kräfte X, Y, Z, durch ξ, η, ζ, die Coordinaten des Durchschnittspunctes M der letztern Kräfte und durch a, b, c die Winkel der Resultirenden mit Ox, Oy, Oz; so hat man von den vorigen Gleichungen jene unberücksichtigt zu lassen, worin ξ', η'', ζ''' vorkommt und in den übrigen Gleichungen $\xi''=\xi'''=\xi$, $\eta'=\eta'''=\eta$, $\zeta'=\zeta''=\zeta$ zu setzen. Man erhält hiedurch mit Rücksicht, daß X, Y, Z die rechtwinkligen Componenten von R sind, die folgenden neun Gleichungen:

$$(1)\quad X=R\cos a=\Sigma P\cos\alpha,\quad Y=R\cos b=\Sigma P\cos\beta,\quad Z=R\cos c=\Sigma P\cos\gamma,$$

$$(2)\quad \begin{cases} Y\xi=\Sigma xP\cos\beta, & X\eta=\Sigma yP\cos\alpha, & X\zeta=\Sigma zP\cos\alpha, \\ Z\xi=\Sigma xP\cos\gamma, & Z\eta=\Sigma yP\cos\gamma, & Y\zeta=\Sigma zP\cos\beta. \end{cases}$$

§. 111. Aus den Gleichungen (1) erhält man wegen

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

die Gleichungen

$$(3)\quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \text{ und}$$

$$(4)\quad \cos a = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{R},\quad \cos b = \frac{\Sigma P\cos\beta}{R},\quad \cos c = \frac{\Sigma P\cos\gamma}{R},$$

woraus die Größe und Richtung der Resultirenden so erhalten wird, als ob alle Kräfte P, P', P'', ... ihren Richtungen parallel auf einen Punct wirkten (§. 56). Aus den Gleichungen (2) folgen für die Coordinaten des Angriffspunctes der Resultirenden die Werthe

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\Sigma xP\cos\beta}{Y} = \dfrac{\Sigma xP\cos\gamma}{Z}, \\ \eta = \dfrac{\Sigma yP\cos\alpha}{X} = \dfrac{\Sigma yP\cos\gamma}{Z}, \\ \zeta = \dfrac{\Sigma zP\cos\alpha}{X} = \dfrac{\Sigma zP\cos\beta}{Y}, \end{cases}$$

so daß also durch die Coordinaten und die Winkel a, b, c die Lage der Resultirenden nebst ihrem Angriffspuncte vollkommen bestimmt ist.

Da für jede Coordinate zwei Ausdrücke sich ergeben und diese, im Falle die gegebenen Kräfte eine Resultirende haben, gleich sein müssen; so hat man aus den Gleichungen (5)

$$(a)\quad \begin{cases} Z\Sigma xP\cos\beta = Y\Sigma xP\cos\gamma, \\ X\Sigma yP\cos\gamma = Z\Sigma yP\cos\alpha, \\ Y\Sigma zP\cos\alpha = X\Sigma zP\cos\beta. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen und setzt der Kürze wegen

$$(6)\quad \begin{cases} \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = L, \\ \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = M, \\ \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = N, \end{cases}$$

so erhält man

$$(7)\quad ZL + YM + XN = 0$$

als die Bedingungsgleichung, welche realisirt werden muß, wenn sich die Kräfte X, Y, Z in einem Puncte M durchschneiden, also die gegebenen Kräfte eine Resultirende haben sollen.

Die Größe und Lage sammt dem Angriffspuncte der Resultirenden bestimmen die Gleichungen (3), (4) und (5). Indessen kann als Angriffspunct der Resultirenden jeder Punct M' in ihrer Richtung genommen werden. Sind ξ_1, η_1, ζ_1 die Coordinaten dieses Punctes; so ist, wie man leicht sieht,

$\xi_1 - \xi = MM'\cos a$, $\eta_1 - \eta = MM'\cos b$, $\zeta_1 - \zeta = MM'\cos c$; also

$$\frac{\xi_1 - \xi}{\cos a} = \frac{\eta_1 - \eta}{\cos b} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{\cos c}.$$

Nimmt man aus den Gleichungen (4) und (5) für $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ und für ξ, η, ζ ihre Werthe; so erhält man die Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} X\eta_1 - Y\xi_1 + L = 0, \\ Z\xi_1 - X\zeta_1 + M = 0, \\ Y\zeta_1 - Z\eta_1 + N = 0, \end{cases}$$

von denen jede die Folge der beiden andern ist. So erhält man durch die Multiplication der ersten Gleichung mit Z, der zweiten mit Y, wenn man sie nachher addirt und die Gleichung (7) berücksichtigt, die dritte Gleichung.

Da durch die Annahme einer Coordinate die zugehörigen Werthe der beiden andern aus zweien dieser Gleichungen folgen; so ist die Größe und Lage der Resultirenden, wenn man ihren Angriffspunct kennt, auch durch die Gleichungen (3) und (8) vollkommen bestimmt.

§. 112. Wir wollen nun mit Hilfe der vorhergehenden Gleichungen einige specielle Fälle betrachten.

1) Werden die Ausdrücke L, M, N zugleich Null, nemlich $L=0$, $M=0$, $N=0$, so folgt aus den Gleichungen (8), daß, wenn eine der Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 Null gesetzt wird, auch die beiden andern Null werden und daß überdies $X:Y:Z = \xi_1 : \eta_1 : \zeta_1$ ist. Da beides beweist, daß diesfalls die Resultirende R durch den Ursprung O geht, so muß bei Befestigung dieses Punctes zwischen den Kräften P, P', P'', ...

Gleichgewicht eintreten. Die Bedingungen hiefür sind also

$$L=0,\ M=0,\ N=0.$$

Soll daher ohne Befestigung dieses Punctes, nemlich bei einem freien Systeme Gleichgewicht bestehen, so muß auch noch $R=0$, also wegen Gleichung (3) $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ werden, d. h. für das Gleichgewicht von Kräften, welche auf ein freies System von Puncten wirken, müssen die Bedingungsgleichungen

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0,\ L=0,\ M=0,\ N=0$$

zugleich erfüllt werden.

2) Wird die Gleichung (7) nicht erfüllt, in welchem Falle die Kräfte X, Y, Z keinen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, sofort die gegebenen Kräfte keine Resultirende haben; so lassen sie sich doch stets auf zwei reduciren.

Es sei A (Fig. 65) irgend ein Punct in der Richtung der Kraft X und eben so B in jener der Kraft Y. In A bringen wir zu OZ parallel zwei gleiche und gerade entgegengesetzte Kräfte $+g$ und $-g$ an, setzen X mit $+g$ in die Resultirende $A\alpha$ zusammen, verlängern sie sodann, bis sie in A' die Ebene xy durchschneidet, versetzen sie in diesen Durchschnittspunct und zerlegen sie daselbst wieder in ihre Seitenkräfte $A'X'=X$ parallel zu Ox und $A'g'=g$ parallel zu Oz. Eben so bringen wir in B die zu Oz parallelen, gerade entgegengesetzten Kräfte $+g$ und $-g$ an, setzen Y mit $-g$ in die Kraft $B\beta$ zusammen, versetzen diese in ihren Durchschnittspunct B' mit der Ebene xy, wo wir sie wieder in ihre vorigen Seitenkräfte $B'Y'=Y'$ und $B'g'=-g$ zerlegen.

Versetzt man endlich noch die Kräfte $-g$ aus A nach a, $+g$ aus B nach b und Z in ihrer Richtung nach c, wobei die Puncte a, b, c in der Ebene xy liegen; so hat man zu Oz parallel die Kräfte

$$Z,\ +g,\ +g,\ -g,\ -g$$
$$\text{in}\quad c,\quad b,\quad A',\quad B',\quad a,$$

wozu der Ordnung nach die Coordinaten

$$Oc',\ Ob',\ Oa',\ Ob',\ Oa'' \text{ auf Ox}$$
$$c'c,\ b'b,\ a'A',\ b'B',\ a''a=a'A' \text{ parallel zu Oy}$$

gehören.

Da die Summe Z dieser Kräfte ihre Resultirende ist, so wird, wenn man die Coordinaten ihres Angriffspunctes in Bezug auf xy mit u und v bezeichnet,

$$uZ = Oc'.Z + Ob'.g + Oa'.g - Ob'.g - Oa''.g,$$
$$vZ = c'c.Z + b'b.g + a'A'.g - b'B'.g - a'A'.g,$$

oder

$$uZ = Oc'.Z - g(Oa'' - Oa'),$$
$$vZ = c'c.Z - g(b'B' - b'b).$$

Nach den Gleichungen (5) ist aber

$$Oc'.Z = \Sigma xP\cos\gamma,\quad c'c.Z = \Sigma yP\cos\gamma,$$

ferner

$$Bb = \frac{\Sigma zP\cos\beta}{Y},\quad Aa = \frac{\Sigma zP\cos\alpha}{X}.$$

Endlich ist in den ähnlichen Dreiecken bB'B und BβY, A'aA und AXα, wie man sieht,

$$\beta Y : BY = Bb : bB',$$

oder
$$g : Y = \frac{\Sigma zP\cos\beta}{Y} : bB',\ \text{also}\ bB' = \frac{\Sigma zP\cos\beta}{g} = b'B' - b'b,$$

und
$$X\alpha : AX = Aa : A'a,$$

oder
$$g : X = \frac{\Sigma zP\cos\alpha}{X} : A'a,\ \text{also}\ aA' = \frac{\Sigma zP\cos\alpha}{g} = Oa'' - Oa'.$$

Werden alle diese Werthe in die vorigen Momentengleichungen gesetzt, so hat man

$$uZ = \Sigma xP\cos\gamma - \Sigma zP\cos\alpha = -M,$$
$$vZ = \Sigma yP\cos\gamma - \Sigma zP\cos\beta = N$$

und daraus

$$(a)\quad u = -\frac{M}{Z},\quad v = \frac{N}{Z}.$$

Ferner hat man in der Ebene xy die auf einander senkrecht wirkenden Kräfte $A'X' = X$, $B'Y' = Y$, welche sich in einem Puncte M durchschneiden werden. Bezeichnet man die Coordinaten dieses Punctes mit U und V und die Resultirende dieser Kräfte mit R'; so ist

$$(b)\quad \begin{cases} U = \dfrac{\Sigma xP\cos\beta}{Y},\ V = \dfrac{\Sigma yP\cos\alpha}{X} & \text{und} \\ R' = \sqrt{X^2 + Y^2} \end{cases}$$

und, wenn man die Winkel, die diese Resultirende mit Ox und Oy einschließt, durch m und n bezeichnet,

$$(c)\quad \cos m = \frac{X}{R'},\ \cos n = \frac{Y}{R'}.$$

Ist M_1 irgend ein anderer Punct in der Richtung der Resultirenden, dessen Coordinaten $OP_1 = u_1$, $P_1M_1 = v_1$ sein mögen; so hat man wegen $U - u_1 = M_1M\cos m$ und $V - v_1 = M_1M\cos n$ auch

$$\frac{U-u_1}{\cos m} = \frac{V-v_1}{\cos n}$$

oder, wenn man für $\cos m$, $\cos n$, U und V die obigen Werthe setzt,

$$(d) \quad v_1X - u_1Y + L = 0,$$

woraus man für jeden Werth von u_1 den zugehörigen Werth von v_1 erhält, so daß daher durch diese Gleichung die Lage der Resultirenden R' bestimmt ist.

In dem Falle also, als die Kräfte X, Y, Z keinen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, reduciren sich die gegebenen auf die beiden Kräfte R' und Z, wovon erstere in der Ebene xy liegt und die andere auf derselben senkrecht ist. Die Lage von R' wird durch die Gleichung (d) und der Durchschnittspunct c von Z auf xy durch die Coordinaten u und v aus den Gleich. (a) bestimmt.

Durchschneidet aber die Richtung von R' den Punct c, so muß für $u_1 = u$, $v_1 = v$ der Gleichung (d) Genüge geschehen, d. h. es muß diesfalls auch

$$vX - uY + L = 0$$

stattfinden. Setzt man hier aus (a) die Werthe von u und v, so erhält man wieder die eine Resultirende bedingende Gleichung (7).

3) Wird aber das System oder der Körper durch eine feste Axe gehalten, um welche es sich drehen kann, ohne längs derselben gleiten zu können, und nehmen wir Oz für die feste Axe; so kann die zu derselben parallele Kraft keine Bewegung hervorbringen, sondern es wird blos die Kraft R' das System um die Axe drehen.

Für die Lage dieser Kraft hat man die Gleichung (d) oder wenn man in dieselbe für X, Y, L die bekannten Werthe setzt,

$$(e) \quad u_1R\cos b - v_1R\cos a = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = L.$$

Fällt man aus O auf R' eine Senkrechte, welche r' heißen mag und berücksichtigt, daß dieser Punct innerhalb des Kräftenwinkels von $R\cos b$ und $R\cos a$ liegt, welche die rechtwinkligen Componenten von R' sind; so hat man nach §. 105 die Momentengleichung

$$R'r' = u'R\cos b - v'R\cos a.$$

Bezeichnet ferner Q die Resultirende von $P\cos\beta$ und $P\cos\alpha$, Q' jene von $P'\cos\beta'$ und $P'\cos\alpha'$, Q'' die von $P''\cos\beta''$ und $P''\cos\alpha''$, u. s. f. und sind q, q', q'', . . . die senkrechten Abstände dieser Resultirenden

von der Axe Oz; so hat man mit jener Berücksichtigung die Momentengleichungen

$$Qq = xP\cos\beta - yP\cos\alpha,\quad Q'q' = x'P'\cos\beta' - y'P'\cos\alpha',$$
$$Q''q'' = x''P''\cos\beta'' - y''P''\cos\alpha'', \ldots$$

Da sich diese Gleichungen nicht ändern, wenn man die Kräfte $P\cos\beta$, $P\cos\alpha$, $P'\cos\beta'$, $P'\cos\alpha'\ldots$ mit ihren Resultirenden Q, Q', Q'', ... auf die Ebene xy projicirt, wo sodann R' die Resultirende von $P\cos\beta$, $P\cos\alpha$, $P'\cos\beta'$, $P'\cos\alpha'\ldots$, also auch die von Q, Q', Q'', ... ist und die Summe dieser Gleichungen mit der für $R'r'$ verglichen die Gleichung (e) gibt; so folgt daraus

$$(f)\quad R'r' = Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots,$$

d. h. für die Drehung um eine Axe Oz, auf welche Kräfte, wie $Q, Q', Q'', \ldots$ senkrecht wirken, ist das auf diese Axe bezogene Moment ihrer Resultirenden gleich der Summe der Momente dieser Kräfte, und dabei sind die Momente positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Kräfte dasselbe oder das entgegengesetzte Drehungsbestreben um die Axe haben.

Soll keine Drehung geschehen, so muß die Resultirende die Axe Oz durchschneiden, und man hat diesfalls $u' = v' = r' = 0$, mithin

$$(e')\quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = L = 0 \text{ und}$$
$$(f')\quad Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots = 0.$$

Es muß nemlich für das Gleichgewicht um die Axe die Summe der Momente Null werden.

Eben so würde $M = 0$ das Gleichgewicht um die feste Axe Oy, $N = 0$ jenes um die feste Axe Ox bedingen. Sonach besteht die Bedingung des Gleichgewichtes um einen festen Punct O in jenem um drei feste, durch diesen Punct willkürlich gezogene, rechtwinklige Axen, wobei die Resultirende R der Kräfte nothwendig durch den befestigten Punct gehen muß.

4) Soll aber dieser Punct nicht gedrückt werden, so muß $R = 0$, also $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sein und die Kräfte sind an dem ganz freien Systeme im Gleichgewichte. Die Bedingungen dafür sind sofort

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,$$

wie schon in 1) bemerkt wurde.

§. 113*. Untersuchen wir weiter die Fälle, wenn eine der Kräftensummen X, Y, Z oder zwei derselben oder alle drei zugleich in Null übergehen.

Ist $Z=\Sigma P\cos\gamma=0$, so denken wir uns die zu Oz parallele Kraft $P\cos\gamma$ anfangs unbeachtet und setzen die Resultirende der übrigen zu dieser Axe parallelen Kräfte $= Z'$. Man hat dann

$$X=\Sigma P\cos\alpha,\ Y=\Sigma P\cos\beta,\ Z'=\Sigma P'\cos\gamma'=\Sigma P\cos\gamma-P\cos\gamma=-P\cos\gamma.$$

Behandeln wir diese drei Kräfte X, Y, Z', so wie es mit X, Y, Z im vorigen §. bei 2) geschehen ist, indem wir die Coordinaten von Z' wieder durch u, v, jene für den Durchschnittspunct der Kräfte X, Y in der Ebene xy aber durch U, V bezeichnen; so ergibt sich aus den Gleichungen (a) und (b), wenn wir daselbst Z' statt Z setzen und in M, N die Glieder mit $P\cos\gamma$ hinwegnehmen,

$$\text{(a')}\quad \begin{cases} u = -\dfrac{M-xP\cos\gamma}{Z'} = x-\dfrac{M}{Z'}, \\ v = \dfrac{N-yP\cos\gamma}{Z'} = y+\dfrac{N}{Z'}, \end{cases}$$

$$\text{(b')}\quad U = \frac{\Sigma xP\cos\beta}{Y},\quad V = \frac{\Sigma yP\cos\alpha}{X}.$$

Für die Größe und Lage der Resultirenden R' von X und Y hat man wie im vorig. §. 2)

$$\text{(d')}\quad \begin{cases} R' = \sqrt{X^2+Y^2} \text{ und} \\ v_1X - u_1Y + L = 0. \end{cases}$$

Zieht man jetzt die vorhin unbeachtet gelassene Kraft $P\cos\gamma$ mit in Betracht, so hat man folgende Kräfte statt der gegebenen.

In der Ebene xy die Kraft R', deren Lage die zweite der Gleich. (d') bestimmt, dann senkrecht auf diese Ebene die Kraft $P\cos\gamma$, deren Coordinaten x, y sind, und die Kraft $Z'=-P\cos\gamma$, wozu die Coordinaten u, v gehören.

1) Nun können hier zwei Fälle eintreten und zwar entweder die beiden gleichen Kräfte $P\cos\gamma$ und $Z'=-P\cos\gamma$ gerade oder parallel entgegengesetzt sein.

Erster Fall. Sind die Kräfte $P\cos\gamma$ und Z' (Fig. 66) gerade entgegengesetzt, sofort im Gleichgewichte, so muß $u=x$ und $v=y$, also nach (a')

$$(7')\quad M = 0,\ N = 0$$

sein und die Resultirende der gegebenen Kräfte ist $R' = \sqrt{X^2+Y^2}$, welche die durch die zweite der Gleichungen (d') bestimmte Lage hat.

Geht dabei R' durch den Punct O, so muß in (d') für $u_1=0$ auch $v_1=0$ werden, was nur für $L=0$ geschieht.

Man kann sonach sagen, daß, wenn mit $Z=0$ zugleich $M=0$ und $N=0$ wird, die zu Oz parallelen Kräfte im Gleichgewichte sind und die gegebenen Kräfte R' in der Ebene xy zur Resultirenden haben. Wird aber nebstbei noch $L=0$, so besteht bei der Befestigung des Punctes O Gleichgewicht unter allen Kräften.

Zweiter Fall. Sind dagegen die Kräfte $P\cos\gamma$ und Z' parallel entgegengesetzt, indem erstere die Ebene xy in y, letztere aber dieselbe in v durchschneidet (Fig. 67); so muß, wenn diesfalls die gegebenen Kräfte eine Resultirende haben sollen, erstlich R' durch den Punct v gehen, um daselbst mit Z' in eine Kraft r' zusammengesetzt werden zu können. Dieses bedingt $u_1=u$, $v_1=v$; also nach Gleichung (d')

$$vX - uY + L = 0$$

oder, wenn man für u und v die Werthe aus (a') setzt,

$$MY+NX+Z'(L+yX-xY)=0.$$

Sodann muß r' die Kraft $P\cos\gamma$ in irgend einem Puncte w durchschneiden; wird nun r' in diesen Punct versetzt und in ihre vorigen Seitenkräfte $R''=R'$ und $Z''=Z'$ zerlegt, so hebt sich $Z''=-P\cos\gamma$ mit $P\cos\gamma$ auf und man hat $R''=\sqrt{X^2+Y^2}$ als die Resultirende der gegebenen Kräfte.

Da r' und R' in einer zur Axe Oz parallelen Ebene liegen, so ist mit dem Durchschnitte von $P\cos\gamma$ und r' bedingt, daß sich auch R' und $P\cos\gamma$ in dem Puncte y durchschneiden müssen, welchen letztere Kraft mit der Ebene xy, worin R' liegt, gemein hat. Dieses geschieht aber, wenn $u_1=x$, $v_1=y$, also nach Gleichung (d')

$$yX-xY+L=0$$

ist. Verbindet man diese Gleichung mit der vorhin aufgestellten, so ergibt sich in dem Falle, als mit $Z=0$ die zur Axe Oz parallelen Kräfte sich auf ein Kräftenpaar reduciren, für die gegebenen Kräfte eine Resultirende

$$R''=\sqrt{X^2+Y^2},$$

wenn die beiden Bedingungsgleichungen

$$(7'')\quad \begin{cases} MY + NX = 0 \text{ und} \\ L + yX - xY = 0 \end{cases}$$

zugleich realisirt werden.

Die letzte dieser Gleichungen mit der (d') verbunden, gibt

$$(d'')\quad (v_1-y)X-(u_1-x)Y=0$$

als Gleichung für jeden Punct in der Richtung vR', woraus für jeden

Werth von u_1 der zugehörige Werth für v_1 erhalten wird. Errichtet man in irgend einem Puncte v_1 der Geraden vR' eine senkrechte $v_1w_1 = yw$ auf die Ebene xy; so ist w_1 ein Punct der Resultirenden R'', welche durch denselben nur zu vR' parallel zu ziehen ist.

Es ist leicht einzusehen, daß R'' unter- oder oberhalb der Ebene xy liegen wird, je nachdem $P\cos\gamma$ auf- oder abwärts gerichtet ist, also je nachdem $\cos\gamma$ positiv oder negativ ausfällt. Der Abstand $v_1w_1 = yw$ ergibt sich dem numerischen Werthe nach durch

$$yw = \text{tang}\, yvw.\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2},$$

woraus, wenn man für u und v aus (a') die Werthe setzt und zugleich die erste der Gleich. (7'') und $\text{tang}\, yvw = \frac{Z'}{R'}$ berücksichtigt,

$$yw = \frac{\sqrt{M^2+N^2}}{R'} = \pm\frac{M}{X} = \mp\frac{N}{Y}$$

folgt.

Soll R'' die Axe Oz durchschneiden, also die Richtung vR' durch O gehen; so muß in Gleich. (d'') für $u_1 = 0$ auch $v_1 = 0$, somit

$$yX - xY = 0$$

sein, was nach der zweiten Gleichung (7'')

$$L = 0$$

bedingt.

Wenn also mit $Z = 0$ auch $MY + NX = 0$ und $L = 0$ besteht, so wird durch die Befestigung des Punctes, der in der Axe Oz um $yw = \frac{M}{X}$ von O entfernt ist, Gleichgewicht eintreten; wobei der befestigte Punct für $\gamma < 90°$ unter-, für $\gamma > 90°$ oberhalb O liegen wird.

2) Finden für $Z = 0$ weder die Bedingungs-Gleichungen (7') noch die (7'') statt, so lassen sich diesfalls die Kräfte R', $P\cos\gamma$, $Z' = -P\cos\gamma$ in keine Resultirende zusammensetzen, jedoch auf zwei Kräfte reduciren. Wir wollen dieses blos ohne Rechnung zeigen.

Sind nemlich $Z' = -P\cos\gamma$ und $P\cos\gamma$ (Fig. 68) die beiden parallelen Kräfte, welche die Ebene xy in v und y senkrecht schneiden, ist ferner R' die in dieser Ebene befindliche Kraft; so verbinde man v mit irgend einem Puncte m der letztern Kraft und mache $vn = vm$. Bringt man nun in m und n die zwei gleichen Kräfte $\frac{1}{2}Z'$ an, so ersetzen diese die Kraft Z' in v. Man hat sonach die Kraft $\frac{1}{2}Z'$ in n, $P\cos\gamma$ in y, $\frac{1}{2}Z'$ und R' in m, wovon die beiden letzteren sich in eine Resultirende $r' = \sqrt{R'^2 + \frac{1}{4}Z'^2}$ zusammensetzen. Ver-

bindet man ferner n mit y, macht yn'=yn, bringt in n' die gerade entgegengesetzten gleichen Kräfte $\frac{1}{2}Z'$ an; so heben sich die in n und n' nach abwärts angezeigten Kräfte mit der $P\cos\gamma$ auf und es bleibt somit blos in n' die aufwärts angezeigte $\frac{1}{2}Z'$ nebst r' in m und diese sind sofort die beiden Kräfte, auf welche sich die gegebenen reduciren; $\frac{1}{2}Z' = -\frac{1}{2}P\cos\gamma$ wirkt ab- oder aufwärts, je nachdem $\cos\gamma$ positiv oder negativ ist.

3) Kann der Körper um eine feste Axe, wofür mir Oz annehmen wollen, gedreht und auch längs derselben verrückt werden; so wird dieses Verschieben durch die gleichen, parallel entgegengesetzten Kräfte $P\cos\gamma$ und $Z' = -P\cos\gamma$, also überhaupt für $Z=0$ nicht geschehen können. Da aber der Körper für $L=0$ um die Axe Oz auch nicht gedreht werden kann; so folgt daraus, daß die auf einen Körper wirkenden Kräfte, wenn er um eine Axe Oz sich drehen und längs derselben schieben läßt, unter der Bedingung

$$Z = 0 \text{ und } L = 0$$

im Gleichgewichte sind.

§. 114.* Werden zwei Summen der Kräfte zugleich Null, nemlich $X=0$ und $Y=0$; so lassen wir zur Untersuchung dieses Falles einstweilen die beiden Kräfte $P\cos\alpha$ und $P\cos\beta$ außer Acht und benennen die Resultirende der übrigen zu Ox parallelen Kräfte mit X', jene der übrigen zu Oy parallelen mit Y'. Man hat sonach die senkrecht wirkenden Kräfte

$$X' = -P\cos\alpha,\quad Y' = -P\cos\beta \text{ und } Z = \Sigma P\cos\gamma.$$

Reducirt man diese Kräfte nach §. 112. 2, so erhält man in der Ebene xy zu Ox und Oy parallel die Kräfte X', Y', welche sich in einem Puncte V (Fig. 69) durchschneiden, dessen Coordinaten U, V sind und eine Kraft Z, welche die Ebene xy rechtwinklig in einem Puncte trifft, dem die Coordinaten u, v zukommen. Aus den Formeln (a) und (b) des angeführten §. findet man die Werthe der Coordinaten U, V, u, v, wenn man X', Y' an die Stelle von X, Y setzt und in M, N die Glieder mit $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$ hinwegläßt. Man hat dann

$$(a)\quad u = -\frac{M - \Sigma P\cos\alpha}{Z},\quad v = \frac{N + \Sigma P\cos\beta}{Z},$$

$$(b')\quad U = \frac{\Sigma xP\cos\beta}{Y'} + x,\quad V = \frac{\Sigma yP\cos\alpha}{X'} + y.$$

Reducirt man auch die vorhin unbeachtet gelassenen Kräfte $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$ auf die Ebene xy, indem man in ihrem Angriffspuncte m die

gerade entgegengesetzten Kräfte $+g$ und $-g$ anbringt, sodann $P\cos\beta$ mit $+g$, $P\cos\alpha$ mit $-g$ in die Resultirenden p, q zusammensetzt und diese letztern Kräfte in ihre respectiven Durchschnittspuncte mit der Ebene xy, nemlich p nach b, q nach a versetzt, endlich jede daselbst wieder in ihre Seitenkräfte zerlegt; so hat man die Kraft $P\cos\beta$ und $+g$ in b und $P\cos\alpha$ und $-g$ in a.

Versetzen wir nun diese beiden Kräfte $P\cos\beta$ und $P\cos\alpha$ nach ihren respectiven Richtungen in ihren Durchschnittspunct m′, suchen dazu die Resultirende r und eben so die Resultirende r' der Kräfte X', Y'; so sind wegen der Gleichheit und des entgegengesetzten Parallelismus der Kräfte $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$ mit jenen X', Y' auch die Kräfte r und r' gleich und parallel entgegengesetzt.

Ferner hat man zu Oz parallel die Kräfte

$$+g, \qquad -g, \qquad Z,$$

welchen der Ordnung nach die Coordinaten

$$\begin{aligned} \text{Ob}' &= x, \quad \text{Oa}' = x + \text{am}', \quad u, \\ \text{b}'\text{b} &= y - \text{bm}', \quad y, \quad v \end{aligned}$$

zukommen. Da Z die Summe dieser Kräfte also ihre Resultirende ist, so hat man, wenn die Coordinaten des Angriffspunctes derselben mit u', v' bezeichnet werden, die Momentengleichungen

$$\begin{aligned} u'Z &= gx - g(x + \text{am}') + Zu = Zu - \text{am}'.g, \\ v'Z &= g(y - \text{bm}') - y.g + Zv = Zv - \text{bm}'.g. \end{aligned}$$

Es ist aber, wie man aus der Fig. sieht,

$$g : P\cos\beta = \text{mm}' : \text{bm}', \text{ also } \text{bm}' = \frac{\Sigma P\cos\beta}{g},$$

$$g : P\cos\alpha = \text{mm}' : \text{am}', \text{ mithin } \text{am}' = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{g} \text{ und nach } (\alpha)$$

$$\begin{aligned} uZ &= -M + \Sigma P\cos\alpha, \; vZ = N + \Sigma P\cos\beta, \text{ mithin} \\ u'Z &= -M, \qquad v'Z = N \text{ oder} \end{aligned}$$

$$(\text{a}'') \quad u' = -\frac{M}{Z}, \; v' = \frac{N}{Z}.$$

Man hat sofort statt der gegebenen Kräfte in v′ die Kraft Z parallel zu Oz und in der Ebene xy die gleichen und parallel entgegengesetzten Kräfte r und r.

Wie man sieht, läßt sich Z mit dem Kräftenpaare r und r' nicht in eine einzige Kraft zusammensetzen und es ist offenbar, wenn dieses Kräftenpaar in gerade entgegengesetzte Kräfte, die sich sonach aufheben, übergeht,

Z in v′ die Resultirende der gegebenen Kräfte. Dieser Bedingung gemäß (damit nemlich r und r' gerade entgegengesetzt werden) muß die Verbindungslinie m′V mit der Richtung von r und r' übereinkommen, d. h. m′V muß mit Ox und Oy eben auch die Winkel α und β einschließen, und dieses fordert,

$$\text{m'V}.\cos\alpha = U-x,\ \text{m'V}.\cos\beta = V-y,$$

oder

$$\frac{U-x}{\cos\alpha} = \frac{V-y}{\cos\beta}.$$

Setzt man hier die Werthe von U und V aus (b″) und berücksichtigt $X' = -P\cos\alpha$, $Y' = -P\cos\beta$; so findet man

$$(7''')\quad \Sigma xP\cos\beta - \Sigma yP\cos\alpha = L = 0$$

als Bedingungsgleichung, wenn für $X = 0$ und $Y = 0$ die gegebenen Kräfte eine Resultirende haben sollen. Diese Resultirende ist Z, wozu die aus (a″) folgenden Coordinaten u', v' gehören.

1) Es ist klar, daß dieselben Bedingungsgleichungen

$$X=0,\ Y=0,\ L=0$$

realisirt sein müssen, wenn der Körper mit drei oder mehren Puncten, die nicht in einer Geraden liegen, auf einer Ebene, die wir für die der xy annehmen wollen, unbeweglich bleiben soll. Nur muß dabei die Kraft Z, um den Körper senkrecht gegen die Ebene zu drücken, nicht nur die Wirkung in der Richtung vom Körper gegen die Ebene haben, sondern sie muß letztere auch innerhalb des jene Puncte umschließenden Polygons treffen, was man aus den Werthen der Coordinaten u' und v' erkennen wird.

2) Berührt der Körper die Ebene in einer geraden Linie und nehmen wir diese für die Axe Ox, so muß Z auf diese Gerade treffen, welches u' zu erkennen geben wird, indem $v' = 0$, mithin auch $N = 0$ wird. Man hat also diesfalls die Bedingungsgleichungen

$$X=0,\ Y=0,\ L=0,\ N=0.$$

3) Berührt der Körper die Ebene mit einem Puncte, welchen wir für den Ursprung O annehmen wollen, so muß Z auf diesen Punct treffen. Da dieses $u' = 0$, $v' = 0$ fordert, so hat man für diesen Fall die Bedingungsgleichungen

$$X=0,\ Y=0,\ L=0,\ M=0,\ N=0.$$

§. 115.* Werden zugleich $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, so läßt sich dieser Fall auf jenen des vorigen §. zurückführen, wenn man $P\cos\gamma$ vor der Hand beseitigt und die Resultirende der übrigen zu Oz parallelen Kräfte

$= Z'$ setzt; denn man hat dann

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z' = -P\cos\gamma,$$

also braucht man blos in (a″) $P\cos\gamma$ hinwegzulassen und Z' statt Z zu setzen, um die Coordinaten für Z'

$$(a''')\quad \begin{cases} u' = -\dfrac{M - xP\cos\gamma}{Z'} = -\dfrac{M}{Z'} + x, \\ v' = \dfrac{N - yP\cos\gamma}{Z'} = \dfrac{N}{Z'} + y \end{cases}$$

zu erhalten. Die Coordinaten U und V bleiben dieselben wie in

$$(b'')\quad U = \frac{\Sigma xP\cos\beta}{Y'} + x,\ V = \frac{\Sigma yP\cos\alpha}{X'} + y.$$

Man hat sonach wie im vorigen §. in m′ die Resultirende r der Kräfte $P\cos\alpha$ und $P\cos\beta$ (Fig. 70), in V die Resultirende r' der diesen ersten respective gleichen und parallel entgegengesetzten Kräfte X' und Y', so daß also r und r' gleich und parallel entgegengesetzt sind, dann in v′ die Kraft Z', endlich dieser parallel entgegengesetzt in m′ die vorhin unberücksichtigte Kraft $P\cos\gamma$.

Fällt daher v′ auf m′, so ist Z' mit $P\cos\gamma$ im Gleichgewichte und dabei wegen $u' = x$, $v' = y$ nach (a‴) $M = 0$, $N = 0$. Kommt ferner die Gerade m′V mit der Richtung von r und r' zusammen, so ist vermöge vorigen §. zwischen r und r' Gleichgewicht und $L = 0$.

Nach diesem sind alle gegebenen Kräfte im Gleichgewichte, wenn die Bedingungsgleichungen

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,\ \ L = 0,\ M = 0,\ N = 0$$

zugleich erfüllt werden.

1) Kommt weder v′ mit m′ noch m′V mit den Richtungen r und r' zusammen, so hat man statt der gegebenen Kräfte die beiden Kräftenpaare Z' und $P\cos\gamma$, r und r'.

2) Fällt dagegen v′ auf m′ oder m′V in die Richtung von r, so hat man im ersten Falle blos das Kräftenpaar r und r', im zweiten Falle blos das Kräftenpaar Z' und $P\cos\gamma$.

Siebenter Abschnitt.

Vom Principe der virtuellen Geschwindigkeiten und vom Cartesischen Gesetze.

§. 116. Wenn ein System von unveränderlich mit einander verbundenen Puncten

$$A, \quad A', \quad A'', \quad A''', \ldots$$

(Fig. 71), auf welche die Kräfte

$$P, \quad P', \quad P'', \quad P''', \ldots$$

wirken, ohne Veränderung des Zusammenhanges um einen unendlich kleinen Weg fortbewegt wird, wobei A nach B, A′ nach B′, A″ nach B″, A‴ nach B‴, . . . fortrückt und man von den Puncten

$$B, \quad B', \quad B'', \quad B''', \ldots$$

auf die Richtungen der Kräfte die Senkrechten

$$BC, \ B'C', \ B''C'', \ B'''C''', \ldots$$

fällt; so nennt man die dadurch erhaltenen Projectionen

$$AC, \ A'C', \ A''C'', \ A'''C''', \ldots$$

der Wege

$$AB, \ A'B', \ A''B'', \ A'''B''', \ldots$$

die Projections- oder virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspuncte

$$A, \quad A', \quad A'', \quad A''', \ldots$$

Ist das System der Kräfte im Gleichgewichte, so findet die erwähnte Bewegung zwar nicht wirklich statt, aber der kleine Weg eines jeden Angriffspunctes im Sinne der Kraft kann für das Bestreben der letztern nach Bewegung gelten, welche nur wegen der Gegenwirkung der übrigen Kräfte

nicht eintreten konnte. Diesem zufolge ist also jede Projection das Maß des Strebens der betreffenden Kraft nach Geschwindigkeit oder die virtuelle Geschwindigkeit.

Bezeichnen

$$w, \quad w', \quad w'', \quad w''', \ldots$$

die den Kräften

$$P, \quad P', \quad P'', \quad P''', \ldots$$

zugehörigen virtuellen Geschwindigkeiten

$$AC, \ A'C', \ A''C'', \ A'''C''', \ldots;$$

so läßt sich für das Gleichgewicht dieser Kräfte bei jeder Art jener Bewegung die Gleichung

$$Pw + P'w' + P''w'' + P'''w'' + \ldots = 0$$

nachweisen, wobei in den Producten

$$Pw, \ P'w', \ P''w'', \ P'''w''', \ldots,$$

die man die virtuellen Momente nennt, jede Kraft positiv, die virtuellen Geschwindigkeiten aber positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem dieselben von den Angriffspuncten nach den Richtungen der Kräfte oder entgegengesetzt auftreten. So ist nach der Fig. $AC = w$ und $A''C'' = w''$ positiv, $A'C' = w'$ und $A'''C''' = w'''$ negativ. Übrigens bestimmt sich auch das Zeichen durch den Cosinus des Winkels, welchen die Richtung jeder Kraft mit dem Wege ihres Angriffspunctes einschließt; denn für P und P'' sind diese Winkel BAC und B″A″C″ kleiner als 90°, somit

$$w = AB.\cos BAC \text{ und } w'' = A''B''.\cos B''A''C'',$$

während für P' und P''' diese Winkel P′A′B′ und P‴A‴B‴ größer als 90° sind, was

$w' = A'B'\cos P'A'B' = -A'B'\cos B'A'C'$ und $w''' = -A'''B'''\cos B'''A'''C'''$ gibt.

In den folgenden §. soll nun der Satz, welchen jene Gleichung der virtuellen Momente ausspricht, für jede mögliche Bewegung bewiesen werden.

§. 117. Es sei R (Fig. 72) die Resultirende der Kräfte

$$P, \quad P', \quad P'', \quad P''', \ldots$$

welche nach was immer für Richtungen auf den Punct A wirken.

Rückt der Punct A nach B und fällt man aus B auf die Richtungen der Kräfte die Senkrechten

$$Bw, \ Bw', \ Bw'', \ Bw''', \ldots, \text{ so sind}$$

$$Aw = w,\ Aw' = w',\ Aw'' = w'',\ Aw''' = w''', \ldots$$

die virtuellen Geschwindigkeiten derselben.

Nimmt man nun in A ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, wovon AB eine der Axen sein mag und bezeichnet durch

$$a,\ \alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''', \ldots$$

(nach §. 17. II) die Winkel der Kräfte

$$R,\ P,\ P',\ P'',\ P''', \ldots$$

mit dieser Axe; so ist bekanntlich

$$R\cos a = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots$$

Nun ist

$$w = AB\cos\alpha,\ w' = AB\cos\alpha',\ w'' = AB\cos\alpha'',\ w''' = AB''\cos\alpha''', \ldots$$

und wenn W die virtuelle Geschwindigkeit von R vorstellt; so hat man auch $W = AB\cos a$. Multiplicirt man sonach die so eben aufgestellte Gleichung mit AB, so ergibt sich

$$(1)\quad RW = Pw + P'w' + P''w'' + P'''w''' + \ldots,$$

wobei die Zeichen von

$$W,\quad w,\quad w',\quad w'',\quad w''', \ldots$$

mit jenen von

$$\cos a,\ \cos\alpha,\ \cos\alpha',\ \cos\alpha'',\ \cos\alpha''', \ldots$$

übereinkommen.

1) Sind die Kräfte P, P', P'', P''', . . . an dem freien Puncte A im Gleichgewichte, also $R = 0$, so gibt die Gleichung (1)

$$(2)\quad Pw + P'w' + P''w'' + P'''w''' + \ldots = 0.$$

2) Liegt aber der Punct A auf einer festen Ebene, so kann nur Gleichgewicht eintreten, wenn die Resultirende auf diese Ebene senkrecht wirkt und da diesfalls der Weg AB des Punctes A nur in dieser Ebene möglich ist, so ist $a = 90°$, also $W = AB\cos a = 0$, sofort auch bei diesem bedingten Gleichgewichte

$$(2)\quad Pw + P'w' + P''w'' + P'''w''' + \ldots = 0.$$

§. 118. Sind die auf ein freies System von Puncten wirkenden Kräfte

$$P,\ P',\ P'',\ P''', \ldots$$

im Gleichgewichte, so darf nach irgend einer angenommenen Axe keine Bewegung erfolgen, d. h. wenn

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''', \ldots$$

die Winkel dieser Kräfte mit der angenommenen Axe bezeichnen, so muß die Gleichung

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots = 0$$

bestehen.

Werden nun alle Angriffspuncte der Kräfte um die nemliche Größe a zu jener Axe parallel fortgeschoben, so sind, wie man leicht findet, die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte

$$w = a\cos\alpha,\quad w' = a\cos\alpha',\quad w'' = a\cos\alpha'',\quad w''' = a\cos\alpha''',\ \ldots$$

daher durch die Multiplication der vorigen Gleichung mit a

$$(2)\qquad Pw + P'w' + P''w'' + P'''w''' \ldots = 0$$

sich ergibt.

Aus diesem und den vorigen §. sieht man, daß das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auch in den Fällen stattfindet, wenn das System nicht blos um unendlich wenig, sondern um einen endlichen Weg fortschreitet.

§. 119. Kann ein unveränderliches System von Puncten **A, B, C,** ... (Fig. 73), auf welches mehre Kräfte $P, P', P'', \ldots$ wirken, sich blos um eine feste Axe **OZ** drehen, und zerlegt man jede Kraft in zwei auf einander rechtwinklig wirkende V und Q, V' und Q', V'' und Q'', .., wovon die V, V', V'',.. parallel, die Q, Q', Q'', ... senkrecht zur Axe sind; so werden die erstern durch die feste Lage der Axe aufgehoben und nur die letztern um dieselbe zu drehen streben. Soll aber in Bezug der Drehung Gleichgewicht bestehen und bezeichnet man die senkrechten Abstände **Nq, N'q', N''q'',** ... der Kräfte von der Axe mit $q, q', q'', \ldots$, so hat man (§. 112. Gl. f.)

$$(a)\qquad Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots = 0.$$

Nehmen wir nun an, das System werde um den unendlich kleinen Winkel φ gedreht, so ist der von **A** beschriebene Weg $AA' = NA.\varphi$, und die Projection **Am** desselben auf Q ist die virtuelle Geschwindigkeit dieser Kraft, welche wir u nennen wollen.

Da der kleine Bogen **AA'** als eine gerade Linie angesehen auf **NA**, **Am** auf **Nq** und **A'm** auf **Aq** senkrecht ist, sofort die rechtwinkligen Dreiecke **AmA'** und **NqA** ähnlich sind; so ist

$$Nq : Am = NA : AA'$$

oder

$$q : u = NA : NA.\varphi$$

und daraus

$$q = \frac{u}{\varphi}.$$

Eben so ist, wenn $u', u'', \ldots$ die virtuellen Geschwindigkeiten von $Q', Q'', \ldots$ vorstellen,

$$q' = \frac{u'}{\varphi},\ q'' = \frac{u''}{\varphi},\ \text{u. s. w.},$$

folglich durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (a)

$$(b)\quad Qu + Q'u' + Q''u'' + \ldots = 0.$$

Bezeichnen ferner $w, w', w'', \ldots$ die virtuellen Geschwindigkeiten von $P, P', P'', \ldots, v, v', v'', \ldots$ jene von $V, V', V'', \ldots$, so ist nach Gleich. (1) (§. 117) auch

$$(c)\quad \begin{cases} Pw = Qu + Vv, \\ P'w' = Q'u' + V'v', \\ P''w'' = Q''u'' + V''v''. \end{cases}$$

. . . . . .

Da aber die Kräfte $V, V', V'', \ldots$ wegen ihres Parallelismus zur Axe keine Wirkung auszuüben vermögen, sofort

$$v = v' = v'' = \ldots = 0$$

ist (§. 117. 2); so folgt aus der Summe dieser Gleichungen mit Rücksicht auf (b)

$$(2)\quad Pw + P'w' + P''w'' + \ldots = 0.$$

Findet umgekehrt diese Gleichung statt, so müssen die Kräfte

$$P, P', P'', P''', \ldots$$

in Bezug des Drehens um die Axe im Gleichgewichte sein; denn mit dieser Gleichung muß in Bezug der Gleichungen (c) und wegen

$$v = v' = v'' = \ldots = 0$$

auch die Gleichung

$$(b)\quad Qu + Q'u' + Q''u'' + \ldots = 0$$

bestehen. Setzt man sonach hier die Werthe

$$u = q\varphi,\ u' = q'\varphi,\ u'' = q''\varphi, \ldots;$$

so hat man dann wieder die gesuchte Momentengleichung (a).

§. 120. Eine Ausnahme, daß die virtuellen Geschwindigkeiten bei der Drehung unendlich klein sein müssen, macht der Fall, wenn die Kräfte

$$P, P', P'', P''', \ldots$$

(Fig. 74) in Ebenen NAP, N′BP′, N″CP″, . . . liegen, welche auf die Drehungsaxe OZ senkrecht sind und die Angriffspuncte A, B, C, . . . der Kräfte in ihren Richtungen so angenommen werden, daß die auf diese Richtungen gezogenen Senkrechten AN, BN′, CN″, . . . die Axe durchschneiden.

Denn wird bei dieser Annahme das ganze System um irgend einen Winkel φ gedreht, so werden alle Angriffspuncte concentrische Kreisbogen AA′, BB′, CC′, . . . beschreiben und in der Voraussetzung, daß die Kräfte

bei dieser Drehung im Gleichgewichte bleiben, hat man für

$$NA = p,\ N'B = p',\ N''C = p'', \ldots$$

die Gleichung

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Nun können hier zwei Fälle eintreten; entweder bleiben die Kräfte während der Drehung ihren ursprünglichen Richtungen parallel, so daß sie nach vollendeter Drehung die Richtungen ap, bp', cp'', ... haben oder sie bleiben während der Drehung stets zu den von ihren Angriffspuncten beschriebenen Bogen tangirend.

Erster Fall. Sind die Kräfte ihren ursprünglichen Richtungen parallel, also

$$Am = w,\ Bm' = w',\ Cm'' = w'', \ldots.$$

ihre virtuellen Geschwindigkeiten; so hat man in den rechtwinkligen Dreiecken NaA', N'bB', N''cC', ...

$$p = \frac{w}{\sin\varphi},\ p' = \frac{w'}{\sin\varphi},\ p'' = \frac{w''}{\sin\varphi}, \ldots,$$

folglich nach der Substitution in die vorige Momentengleichung

$$(2)\quad Pw + P'w' + P''w'' + \ldots = 0.$$

Zweiter Fall. Sind aber die Kräfte stets zu den von ihren Angriffspuncten beschriebenen Bogen tangirend geblieben, und setzt man

$$AA' = s,\ BB' = s',\ CC' = s'', \ldots,$$

welche Bogen hier für die virtuellen Geschwindigkeiten angesehen werden können, so ist wegen

$$s = p\varphi,\ s' = p'\varphi,\ s'' = p''\varphi, \ldots,$$

wenn man jene Momentengleichung mit φ multiplicirt,

$$(3)\quad Ps + P's' + P''s'' + \ldots = 0,$$

d. h. bei Kräften, welche um eine Axe im Gleichgewichte sind und sich mit dieser drehen, also ihre Abstände von derselben nicht ändern, ist die algebraische Summe der virtuellen Geschwindigkeiten (Producte dieser Kräfte in die von ihren Angriffspuncten beschriebenen Bogen) gleich Null, wobei die Bogen, welche im Sinne der Kräfte beschrieben werden, positiv, die entgegengesetzt beschriebenen aber negativ genommen werden müssen.

§. 121. Sind die auf ein unveränderliches, aber freies System von Puncten wirkenden drei Kräfte P, P', P'' im Gleichgewichte, so ist, wenn w, w', w'' die virtuellen Geschwindigkeiten dieser Kräfte für irgend eine fort-

schreitende oder drehende Bewegung des Systems vorstellen, nach Vorigem

$$Pw + P'w' + P''w'' = 0.$$

Wirkt nun eine dieser Kräfte P'' auf einen festen Punct oder senkrecht auf eine feste Gerade oder auch auf eine feste Ebene, so daß also das eine oder andere ein fester Stützpunct für das System ist; so ist $w''=0$ (§. 117. 2), sofort

$$Pw + P'w' = 0.$$

Da aber diese Gleichung nur bestehen kann, wenn die virtuellen Geschwindigkeiten entgegengesetzte Zeichen haben; so ergibt sich

$$Pw = P'w' \quad \text{oder}$$
$$P : P' = w' : w;$$

d. h. wenn zwei Kräfte mittels eines festen Widerstandes sich im Gleichgewichte erhalten, so sind sie im umgekehrten Verhältnisse der auf ihren Richtungen genommenen virtuellen Geschwindigkeiten, oder wenn der feste Widerstand eine Axe ist, um welche das System gedreht wird, im umgekehrten Verhältnisse der von ihren Angriffspuncten beschriebenen Kreisbogen.

Dieses Gesetz, zuerst von Carteſius aufgestellt, weswegen es auch das Carteſische Gesetz heißt, ist, wie man sieht, blos ein specieller Fall des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. Anwendungen davon werden im nächsten Hauptstücke häufig vorkommen.

Zweites Hauptstück.

Anwendung der Statik auf die Maschinen.

Erster Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte an den Maschinen.

§. 122. Eine Maschine ist ein Werkzeug, mittels dessen durch eine angebrachte Kraft entweder eine Last von einem Orte zu einem andern gebracht oder irgend ein anderes Hinderniß überwältigt wird. In den meisten Fällen geschieht dies mit Vortheile der Kraft. Bei jeder Maschine sind zwei Puncte hauptsächlich in Erwägung zu ziehen; an dem einen wird unmittelbar die Kraft angebracht, der andere aber wirkt unmittelbar auf die Last oder auf das Hinderniß. Man kann den ersten den angreifenden, den letzten aber den ergriffenen Punct der Maschine nennen.

§. 123. Die Haupteintheilung der Maschinen ist in einfache und in zusammengesetzte. Die erstern haben nur einen Theil, die letztern aber sind aus einfachen Maschinen zusammengesetzt, welche so mit einander verbunden sein müssen, daß keine bewegt werden kann, ohne zugleich auch die andern in Bewegung zu setzen. Bei jeder zusammengesetzten Maschine ist der ergriffene Punct des einen Theils der Maschine zugleich der angreifende für den nächst folgenden. Nebst den zwei erwähnten Puncten kommen also bei einer zusammengesetzten Maschine auch noch die Ver-

bindungspuncte der Theile, wie sie auf einander folgen, in Betracht zu ziehen.

§. 124. Bei jeder Maschine wird ein Theil der bewegenden Kraft erfordert, der Last das Gleichgewicht zu halten, ein anderer Theil dient, die Hindernisse zu heben, welche sowohl durch das Gewicht der einzelnen Theile der Maschine als auch durch die Reibung dieser Theile auf einander verursacht werden und der dritte Theil endlich wird die Maschine in Bewegung setzen. Kennt man die Art der Zusammensetzung der Maschine, so werden die beiden ersten Theile durch die Theorie der Statik bestimmt; der dritte Theil, so klein er auch sein mag, wird immer eine Bewegung bedingen.

Von dem dritten Theile der bewegenden Kraft muß ein Beträchtliches verwendet werden, um die Maschine selbst zu bewegen. Wie groß aber die Kraft sein müsse, damit die Maschinentheile eine bestimmte Bewegung erhalten, werden wir weiter unten kennen lernen. Wir werden uns also für jetzt begnügen, blos den ersten und zweiten Theil der bewegenden Kraft an den Maschinen kennen zu lernen, da diese beiden Theile die Grenze der Kraft geben, bei deren Überschreitung eine wirkliche Bewegung erfolgen muß.

§. 125. Wenn eine zusammengesetzte Maschine aus n einfachen besteht, die so innig mit einander verbunden sind, daß, wenn eine derselben bewegt wird, auch die übrigen in Bewegung gesetzt werden; wenn ferner die einfachen Maschinen so beschaffen sind, daß das Verhältniß der Kraft zur Last für den Zustand des Gleichgewichtes bei der ersten Maschine durch $a_1 : \alpha_1$, bei der zweiten durch $a_2 : \alpha_2$, bei der dritten durch $a_3 : \alpha_3$, u. s. w., endlich bei der $n$ten durch $a_n : \alpha_n$ ausgedrückt ist; so muß bei der Verbindung aller Theile, nemlich bei der zusammengesetzten Maschine, wenn man die Last an dem ergriffenen Puncte des letzten Theiles mit Q, die Kraft aber für den Zustand des Gleichgewichtes am angreifenden des ersten Theils mit P bezeichnet,

$$P : Q = a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots . a_n : \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \alpha_4 \ldots . \alpha_n,$$

$$\text{also } P = \frac{a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots . a_n}{\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \alpha_4 \ldots . \alpha_n} . Q$$

sein.

Dieser wichtige Satz in der Maschinenlehre kann auf folgende Art erwiesen werden.

Man nehme erstlich an, daß die Maschine aus zwei Theilen bestehe. Durch die Verbindung derselben kommt der ergriffene Punct des ersten

Theils mit dem angreifenden des zweiten überein und was Last für den ersten ist, wird Kraft für den zweiten. Setzt man die Last des ersten Theils oder die Kraft für den zweiten $= p$; so ist nach der Voraussetzung

bei dem ersten Theile $P : p = a_1 : \alpha_1$,

bei dem zweiten $p : Q = a_2 : \alpha_2$, folglich

bei der ganzen Maschine $P : Q = a_1 . a_2 : \alpha_1 . \alpha_2$

$$\text{oder } P = \frac{a_1 . a_2}{\alpha_1 . \alpha_2} . Q.$$

Man nehme an, daß dieses Gesetz bei n Theilen wirklich gelte und betrachte nun eine aus $n+1$ Theilen zusammengesetzte Maschine.

Weil bei der Zusammensetzung der Maschinen der ergriffene Punct des vorhergehenden Theiles mit dem angreifenden des nächst folgenden übereinkommt und die Last des vorhergehenden Theils zugleich die Kraft für den folgenden wird; so ist, wenn man die Last für den ergriffenen Punct des $n$ten Theils mit p bezeichnet, in Folge der Annahme

$$P : p = a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots\ldots a_n : \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n$$

und für den letzten Theil

$$p : Q = a_{n+1} : \alpha_{n+1},$$

also für die aus $n+1$ Theilen zusammengesetzte Maschine im Zustande des Gleichgewichts

$$P : Q = a_1 a_2 . a_3 . a_4 \ldots . a_n . a_{n+1} : \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \alpha_4 \ldots . \alpha_n . \alpha_{n+1}.$$

Wenn daher das aufgestellte Gesetz bei einer Maschine von n Theilen richtig ist, so gilt es auch für eine Maschine, die aus $n+1$ Theilen zusammengesetzt ist. Es ist aber für $n = 2$ erwiesen, also findet es auch bei was immer für einer Zusammensetzung statt.

§. 126. Zu den einfachen Maschinen, welche die Theile einer jeden zusammengesetzten ausmachen, können folgende gerechnet werden:

Die schiefe Ebene und der Keil, der Hebel, die Rolle, das Wellrad, das gezähnte Rad mit dem Getriebe und die Schraube. Von diesen sind die schiefe Ebene und der Hebel diejenigen einfachen Maschinen, auf die sich alle andern zurückführen lassen. In den folgenden Abschnitten wollen wir bei diesen einfachen Maschinen das Verhältniß der Kraft und Last für den Zustand des Gleichgewichtes untersuchen, und dann die gewöhnlichsten der aus selben zusammengesetzten Maschinen aufzählen.

Da die Maschinenbestandtheile materielle Körper sind, durch deren

gegenseitige Berührung bei der Bewegung der Maschinen eigene Widerstände entstehen, wie die Reibung und die Steifigkeit der Seile; so werden wir bei der Abhandlung über das Gleichgewicht an den Maschinen zugleich auch diese Widerstände mit in Betracht ziehen.

§. 127. Von der Reibung.

Wie auch immer die Oberfläche eines Körpers geglättet oder polirt sein möge, so bemerkt man doch auf derselben oft schon mit unbewaffnetem Auge oder durch das Gefühl kleine Erhöhungen und Vertiefungen, welche von der Porosität der Körper herrühren und sonach niemals ganz beseitigt werden können. Wird daher ein Körper auf einen andern gesetzt, so werden durch den Druck die Erhöhungen und Vertiefungen der beiden Berührungsflächen in einander greifen, so daß bei der gleitenden Bewegung des einen Körpers auf dem andern diese Erhöhungen entweder gegenseitig abgerieben oder aus den Vertiefungen gehoben werden müssen. Der sich hiedurch der Bewegung entgegensetzende Widerstand, welcher um so größer werden muß, je größer der Druck ist, womit die Berührungsflächen an einander gepreßt werden, heißt die Reibung. Hier ist unter Druck immer der auf die Berührungsebene der beiden Körper in ihren Berührungspuncten senkrechte oder normale Druck zu verstehen.

Nach Art der Bewegung eines Körpers auf einem andern hat man gleitende, drehende (Zapfen- oder Axenreibung) und wälzende Reibung, je nachdem die Körper auf einander gleiten, oder der eine auf einem andern sich ohne fortschreitende Bewegung blos dreht oder auf demselben gewälzt wird.

Übrigens wird die Reibung bei einerlei Druck durch möglichste Politur der reibenden Flächen und durch zwischen dieselben gebrachte Schmiermittel, wie Talg, Öl, Wasser, u. dgl., welche ihre Vertiefungen ausfüllen, sehr gemindert.

§. 128. Ruht ein Körper auf einer horizontalen Ebene und soll er durch eine horizontale Kraft in Bewegung gesetzt werden, so hat man das einfachste Beispiel der gleitenden Reibung. Denn da diesfalls das Gewicht des Körpers durch die horizontale Ebene ganz aufgehoben wird und sonach der Kraft nicht entgegenwirkt; so müßte bei vollkommener Politur der sich berührenden Flächen selbst die kleinste Kraft den größten Körper fortzuschieben vermögen. Allein der unvollkommenen Politur wegen wird durch den größern oder kleinern Druck des Körpers auf die horizontale Ebene mehr oder minder Reibung erzeugt, welche durch die horizontale Kraft

überwunden werden muß, um den Körper zu bewegen. Ist die Kraft blos so groß, daß sie den Körper zwar noch nicht fortschiebt, ihn aber bei der mindesten Vergrößerung derselben in Bewegung bringen würde, also gerade nur die Reibung überwindet; so kann sie für das Maß der Reibung genommen werden.

Über die Reibung sind von vielen Gelehrten Versuche angestellt worden, unter denen die von *Coulomb* und in der neuesten Zeit die vom französischen Artillerie-Capitän *Morin* die größte Vollkommenheit haben. Aus diesen Versuchen wurden über die gleitende Reibung folgende Gesetze abgeleitet.

1) Ist die Reibung bei Körpern dem senkrechten Drucke proportional, wobei weder die Materie noch Politur von beiden Flächen einerlei zu sein braucht. Ist nemlich bei dem senkrechten Drucke Q zur Überwindung der Reibung die den reibenden Flächen parallele Kraft P und bei einem andern Drucke q derselben reibenden Flächen unter sonst gleichen Umständen die Kraft p erforderlich; so wird

$$P : p = Q : q$$

und daraus

$$P = \frac{p}{q} . Q.$$

Bezeichnet man das Verhältniß $\frac{p}{q}$ der Reibung p zum Drucke q mit k, welches der Reibungs-Coefficient genannt wird; so ist

$$\text{(a)} \qquad P = k.Q$$

oder die Reibung ist das Product aus dem senkrechten Drucke in den Reibungs-Coefficienten.

2) Hängt bei einerlei senkrechtem Drucke die Reibung nicht von der Größe der sich reibenden Flächen ab. Denn wenn auch bei großen Flächen mehr Erhöhungen in die Vertiefungen eingedrückt werden; so geschieht dieses mit minderer Stärke als bei kleinern Berührungsflächen, wo dafür wieder weniger Erhöhungen und Vertiefungen in einander gedrückt werden.

Eine Ausnahme findet nur statt, wenn eine der reibenden Flächen eine scharfe Kante oder Spitze bildet.

3) Ferner ist die Reibung von der mehr oder minder schnellen oder langsamen Bewegung des einen Körpers auf den andern unabhängig.

4) Jedoch ist die Reibung aus der Ruhe in Bewegung größer als jene während der Bewegung, weil im ersten Falle die Erhöhungen in

die Vertiefungen der reibenden Flächen sich mehr einsetzen konnten. Der Unterschied der Reibungen in beiden Fällen ist sonach auch um so größer, je weicher der eine Körper gegen den andern ist und je länger dieselben auf einander in der Ruhe gelassen worden sind.

Hier folgen nach den Versuchen von *Morin* die Coefficienten der gleitenden Reibung einiger Materien, sowohl aus der Ruhe in die Bewegung, als für die Bewegung, mit Angabe der Schmiermittel zur Verminderung der Reibung; dabei bedeutet das Zeichen (=), daß die Holzfasern zur gleitenden Bewegung parallel, das Zeichen (+), daß die Fasern des gleitenden Körpers auf die Bewegung senkrecht sind, endlich gibt das Zeichen (⊥) zu erkennen, daß Hirnholz sich längs der Fasern vom Langenholz bewegt.

Reibende Körper	Lage der Fasern	Zustand der Fläche (Schmiere)	Reibungscoefficient	
			aus der Ruhe	für die Bewegung
Eiche auf Eiche	=	trocken	0·62	0·48
		trock. Seife	0·44	0·16
	+	trocken	0·54	0·34
		Wasser	0·71	0·25
	⊥	trocken	0·43	0·19
Esche, Tanne, Buche, Vogelbeer auf Eiche	=	trocken	0·57	0·36 bis 0·40
Rindsleder auf Eiche	flach =	trocken	0·61	0·51
	hochkantig		0·43	0·33
		Wasser	0·79	0·29
Hanfgurte auf Eiche	=	trocken	0·64	0·52
Hanfseil auf Eiche			0·80	0·52
Schmiedeeisen auf Eiche		Wasser	0·65	0·25
		Talg	0·11	0·08
Gußeisen auf Eiche		Wasser	0·65	0·26
		trock. Seife	—	0·21
Messing auf Eiche		trocken	0·62	—

Reibende Körper	Lage der Fasern	Zustand der Fläche (Schmiere)	Reibungscoefficient aus der Ruhe	Reibungscoefficient für die Bewegung
Rindsleder auf Gußeisen	flach	trocken oder Wasser	0·62	—
		Öl, Seife oder Fett	0·12	—
Leder-Riemen auf gußeisernen Rollen		trocken	0·28	—
		Wasser	0·38	—
Gußeisen auf Gußeisen		trocken	0·16	0·15
		Wasser	—	0·31
Schmiedeeisen auf Gußeisen		trocken	0·13	—
Gußeisen auf Bronze			—	0·15
Schmiedeeisen auf Bronze			—	0·17
Bronze auf Bronze			—	0·20
Bronze auf Gußeisen			—	0·21
Bronze auf Schmiedeeisen			—	0·16
Eiche, Ulme, Weißbuche, Guß-, Schmiedeeisen, Stahl und Bronze, auf einander und auf sich selbst	=	Talg, Schweinfett, Öl, Wagenschmiere, u. s. w.	0·11	0·07 bis 0·08
		blos fettig	—	0·14

Nach dieser Tabelle findet man z. B., daß ein Körper aus Schmiedeeisen von 180 Pfden auf einer horizontalen Unterlage aus Eichen bei Anwendung von Talg als Schmiermittel die Reibung von $0 \cdot 11 \times 180 = 19 \cdot 8$ Pfunden für die Bewegung aus der Ruhe und von $0 \cdot 08 \times 180 = 14 \cdot 4$ Pfden während der Bewegung darbietet.

§. 129. Ein besonderer Fall der gleitenden Reibung ist der, wenn ein Seil um einen festgehaltenen Cylinder **ABDE** (Fig. 75), der sich nicht drehen läßt, umgewunden ist, und eine Kraft P gefunden werden soll, welche an dem einen Ende des Seiles angebracht, einer Last Q am andern Ende und der Reibung des Seiles auf der Oberfläche des Cylinders Gleichgewicht hält und sonach bei der mindesten Vergrößerung das Seil auf dem Cylinder von **A** über **B** gegen **D** fortschieben würde.

Zur Bestimmung von P theile man den Bogen $ABD = s$, welchen das Seil umspannt, in n sehr kleine gleiche Theile

$$AB = BB_1 = B_1B_2 = \ldots = \frac{s}{n}.$$

Würde das Seil blos den kleinen Bogen **AB** umspannen und bezeichnet man mit t_1 die Kraft oder die Spannung, durch welche nach der Richtung Bt_1 die Last Q und die Reibung des Seiles überwunden wird; so erhält man für den mittlern Druck p des Seiles an **AB** und für den Reibungscoefficienten k

$$t_1 = Q + kp.$$

Würde das Seil auch noch den Bogen BB_1 umspannen und ist p_1 auf diesem der mittlere Druck, t_2 aber die Spannung nach B_1t_2; so ist

$$t_2 = t_1 + k\,p_1.$$

Eben so erhält man für die Spannung t_3, t_4, ... in B_2, B_3, ... bei dem mittlern Drucke p_2, p_3, ... auf B_1B_2, B_2B_3, ...

$$t_3 = t_2 + kp_2,$$
$$t_4 = t_3 + kp_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$P = t_{n-1} + kp_{n-1}.$$

Um p, p_1, p_2, ... zu bestimmen, hat man z. B. bei **AB** auf der einen Seite die Spannung Q, auf der andern jene t_1, wobei $t_1 > Q$ ist.

Nimmt man aber beide Spannungen gleich an und zwar einmal Q, dann t_1 und denkt sie in q nach den Tangenten qA und qB wirkend, so ist in dem Kräftenparallelogramme **ARBq** offenbar **Rq** der Druck des Seiles auf **AB** und wegen $qA = AR = qB = BR$ hat man

$$qR = 2qA.\sin BCq.$$

Setzt man sofort einmal $qA = Q$, sodann $qA = t_1$ und den Halbmesser des Cylinders $CA = r$, so hat man für den Winkel

$$BCq = \tfrac{1}{2}\frac{\text{arc } AB}{r} = \frac{s}{2rn}\text{; folglich}$$

qR oder $p > 2Q \sin\frac{s}{2rn}$ und zugleich $p < 2t_1 \sin\frac{s}{2rn}$.

Da aber n sehr groß ist, also $\sin\frac{s}{2rn} = \frac{s}{2rn}$ gesetzt werden kann, so ist auch

$$p > Q.\frac{s}{rn} \quad \text{und} \quad p < t_1.\frac{s}{rn}.$$

Auf dieselbe Art findet man für den Druck p_1 auf BB_1, für p_2 auf B_1B_2, u. s. w.

$$p_1 > t_1.\frac{s}{rn} \quad \text{und} \quad p_1 < t_2.\frac{s}{rn},$$

$$p_2 > t_2.\frac{s}{rn} \quad \text{„} \quad p_2 < t_3.\frac{s}{rn},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n-1} > t_{n-1}.\frac{s}{rn} \quad \text{„} \quad p_{n-1} < t_n.\frac{s}{rn}.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhin für $t_1, t_2, \ldots P$ aufgestellten Gleichungen; so ergibt sich

$$t_1 > Q(1+\frac{ks}{rn}) \quad \text{und} \quad Q > t_1(1-\frac{ks}{rn}),$$

$$t_2 > t_1(1+\frac{ks}{rn}) \quad \text{„} \quad t_1 > t_2(1-\frac{ks}{rn}),$$

$$t_3 > t_2(1+\frac{ks}{rn}) \quad \text{„} \quad t_2 > t_3(1-\frac{ks}{rn}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P > t_{n-1}(1+\frac{ks}{rn}) \quad \text{„} \quad t_{n-1} > P(1-\frac{ks}{rn}).$$

Multiplicirt man die einen und andern dieser Ungleichungen mit einander; so hat man

$$\frac{P}{Q} > (1+\frac{ks}{rn})^n \quad \text{und} \quad \frac{P}{Q} < (1-\frac{ks}{rn})^{-n}.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber

$$(1\pm\frac{ks}{rn})^{\pm n} = 1 + \frac{ks}{r} + \frac{1\mp\frac{1}{n}}{2}\cdot\left(\frac{ks}{r}\right)^2 + \frac{(1\mp\frac{1}{n})(1\mp\frac{2}{n})}{2.3}\left(\frac{ks}{r}\right)^3 + \ldots.$$

und da für ein unendlich großes n diese Reihe für beide Zeichen

$$1+\frac{ks}{r}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{ks}{r}\right)^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{ks}{r}\right)^3+\ldots=e^{\frac{ks}{r}}$$

zur Grenze hat, wobei $e=2{\cdot}71828\ldots.$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen vorstellt; so ist

$$\frac{P}{Q}=e^{\frac{ks}{r}}.$$

Hier ist P die Kraft, welche die Last Q und die Reibung überwindet. Soll aber P die Kraft sein, welche mit Hilfe der Reibung das Sinken von Q verhindert; so braucht man in der letzten Gleichung blos P mit Q zu vertauschen. Man hat sonach für beide Fälle

$$\text{(b)}\qquad P=Qe^{\pm\frac{sk}{r}}.$$

Wird s in halben Umfängen des Cylinders genommen, nemlich $s=m.r\pi$ gesetzt; so ist

$$\text{(c)}\quad P=Q.e^{\pm mk\pi}.$$

Nach der Tabelle im vorigen §. hat man z. B. für Hanfseile auf Eiche $k=0{\cdot}8$ für die Ruhe; also ist $P=Q.e^{\pm 0\,8m\pi}=Q.e^{\pm 2{\cdot}5133m}$

und für m = 1, 2, 3, ...

$e^{+2{\cdot}5133m}$ = 12·35, 152·41, 1881·61, ...

$e^{-2{\cdot}5133m}$ = 0·081, 0·0066, 0·00053, ...

Man sieht hieraus, wie schnell bis zu 3 halben Umfängen schon die Reibung zunimmt. Es ist daher manche tägliche Wahrnehmung erklärlich, z. B. daß ein Schiff in einem Strome durch ein Seil zurückgehalten wird, welches nur einigemal um einen Pfahl am Ufer umgewunden ist.

Zweiter Abschnitt.

Die schiefe Ebene und der Keil.

I. Die schiefe Ebene.

§. 130. Eine feste Ebene, welche mit dem Horizonte einen spitzen Winkel einschließt, heißt eine schiefe Ebene. Ist AC (Fig. 76) die verticale Durchschnittslinie einer schiefen Ebene mit einer auf derselben senkrechten und zugleich verticalen, und zieht man aus zwei beliebigen Puncten A und C die horizontale Gerade AB und die verticale BC; so nennt man AC die Länge, AB die Grundlinie, BC die Höhe der schiefen Ebene und den von beiden erstern eingeschlossenen Winkel $CAB = \varphi$ ihren Neigungswinkel.

§. 131. Wird ein Körper vom Gewichte Q mit einer Seitenfläche auf die schiefe Ebene gesetzt und soll die in seinem Schwerpuncte S nach der Richtung SP angebrachte Kraft gesucht werden, welche dieser Last Q mit und ohne Reibung Gleichgewicht hält; so zerlege man Q in die auf einander senkrechten Seitenkräfte q und q', P in jene p und p', wobei q und p zur Länge AC der schiefen Ebene parallel sind.

Da der Winkel $QSq' = \varphi$ ist, so hat man für Q die Seitenkräfte

$$q = Q\cos qSQ = Q\sin\varphi \text{ und}$$

$$q' = Q\cos\varphi,$$

von denen $Q\cos\varphi$ der senkrechte Druck des Körpers gegen die schiefe Ebene genannt wird und $Q\sin\varphi$ das relative Gewicht des Körpers heißt, weil mit dieser Kraft der sich selbst überlassene Körper längs der schiefen Ebene herabzugleiten strebt.

Setzt man den Winkel $PSp = \alpha$, welchen die Kraft P mit der schiefen Ebene einschließt, so sind die Seitenkräfte derselben

$$p = P\cos\alpha,\quad p' = P\sin\alpha.$$

Da hier p' gerade entgegengesetzt von q' ist, so hat man diesfalls für den senkrechten Druck des Körpers gegen die schiefe Ebene

$$(1)\quad q' - p' = Q\cos\varphi - P\sin\alpha,$$

somit für die Reibung auf der schiefen Ebene

$$k(q' - p') = k(Q\cos\varphi - P\sin\alpha).$$

Nun kommen hier zwei Fälle zu unterscheiden; entweder soll die Kraft P mit Hilfe der Reibung blos das Hinabgleiten des Körpers von der schiefen Ebene verhindern, oder es soll P nebst dem relativen Gewichte des Körpers auch noch die Reibung überwinden, so daß durch die mindeste Vergrößerung dieser Kraft die Bewegung des Körpers aufwärts der schiefen Ebene erfolgt.

Im ersten Falle sind dem relativen Gewichte q des Körpers, welches ihn auf der schiefen Ebene abwärts zu bewegen strebt, sowohl die Kraft p als auch die Reibung gerade entgegengesetzt und da diese Bewegung nicht erfolgen, sondern zwischen diesen Kräften Gleichgewicht bestehen soll, so ist

$$q = p + k(q' - p') \quad \text{oder}$$
$$p = q - k(q' - p').$$

Im zweiten Falle dagegen, wo die Bewegung aufwärts verhindert werden soll, muß p mit dem relativen Gewichte q und der Reibung zusammen im Gleichgewichte sein, welches sofort die Gleichgewichtsgleichung

$$p = q + k(q' - p')$$

liefert.

Aus der Betrachtung dieser beiden Gleichungen ergibt sich somit für beide Fälle die Gleichung

$$p = q \pm k(q' - p')$$

oder, nach der Substitution der Werthe für p, p', q, q'

$$P\cos\alpha = Q\sin\varphi \pm k(Q\cos\varphi - P\sin\alpha),$$

woraus endlich die gesuchte Kraft

$$(2)\quad P = \frac{Q(\sin\varphi \pm k\cos\varphi)}{\cos\alpha \pm k\sin\alpha}$$

hervorgeht.

Für die negativen Zeichen verhindert diese Kraft die Bewegung auf der schiefen Ebene abwärts, für die positiven Zeichen aber wird dieselbe

gegen eine Bewegung aufwärts durch das relative Gewicht und durch die Reibung verhindert.

Wird der Körper um den Weg SS′ (Fig. 76. a) auf der schiefen Ebene bewegt und fällt man von S′ auf die Richtungen von P und Q die Senkrechten S′a und S′b; so sind Sa und Sb ihre virtuellen Geschwindigkeiten, wovon erstere negativ, letztere positiv ist (§. 116). Die Reibung $k(Q\cos\varphi - P\sin\alpha)$ als eine widerstehende Kraft nach der Länge der schiefen Ebene hat SS′ zur virtuellen Geschwindigkeit, die positiv oder negativ zu nehmen ist, wenn P mit der Reibung, welche letztere nach der Richtung SR widersteht, der Kraft Q oder wenn P der Kraft Q sammt der Reibung, die diesfalls in der Richtung SS′ widersteht, Gleichgewicht hält. Demnach ist die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten

$$Q.Sb - P.Sa \mp k(Q\cos\varphi - P\sin\alpha)\,SS' = 0$$

oder wegen $Sb = SS'.\sin\varphi$ und $Sa = SS'.\cos\alpha$

$$Q\sin\varphi - P\cos\alpha \mp k(Q\cos\varphi - P\sin\alpha) = 0,$$

woraus für P derselbe Ausdruck wie in Formel (2) wieder erhalten wird.

Läßt man die Reibung unbeachtet, d. h. setzt man $k = 0$, so folgt aus der hier aufgestellten ersten Gleichung

$$Q.Sb - P.Sa = 0 \quad \text{oder}$$

$$P : Q = Sb : Sa,$$

wonach also die Kraft zur Last sich verhält, wie umgekehrt die virtuellen Geschwindigkeiten derselben, was mit dem Cartesischen Gesetze (§. 121) übereinstimmt.

§. 132. Nach der Formel (2) mit Bezug auf Fig. 76 sollen hier einige specielle Fälle betrachtet werden.

1) Wirkt die Kraft P nach Sp parallel zur schiefen Ebene, so ist $\alpha = 0$, folglich

$$(3) \quad P = Q(\sin\varphi \pm k\cos\varphi)$$

und nach Gleichung (1) der senkrechte Druck

$$= Q\cos\varphi.$$

2) Ist P nach der Richtung Sr horizontal, also $\alpha = -\varphi$, so ist

$$(4) \quad P = \frac{Q(\sin\varphi \pm k\cos\varphi)}{\cos\varphi \mp k\sin\varphi} = \frac{Q(\operatorname{tang}\varphi \pm k)}{1 \mp k\operatorname{tang}\varphi}$$

und der senkrechte Druck

$$= Q\cos\varphi + P\sin\varphi.$$

3) Wird der Körper durch keine Kraft auf der schiefen Ebene zurückgehalten und soll durch die Reibung allein das relative Gewicht gegen sein Herabgleiten überwunden werden, so kann dieses nur bei einem bestimmten

Neigungswinkel der schiefen Ebene geschehen. Ist ψ dieser Winkel, so muß ψ statt φ in die Formel (2) gesetzt, für die negativen Zeichen $P=0$, sofort

$$\sin\psi - k\cos\psi = 0$$

oder

$$\text{(5)} \qquad \text{tang}\,\psi = k$$

werden, woraus der Winkel ψ, bei welchem der Körper auf der schiefen Ebene im Gleichgewichte bleibt, sich aber bei der mindesten Vergrößerung dieses Winkels abwärts bewegen würde, gefunden wird.

Man nennt diesen Winkel den Reibungswinkel.

Wird derselbe an die Stelle von k in den Formeln (2), (3), (4) eingeführt, so erhält man für alle jene Fälle die einfachern Rechnungsformen

(2′) $P=\dfrac{Q\sin(\varphi\pm\psi)}{\cos(\alpha\mp\psi)}$ für die Richtung SP der Kraft P,

(3′) $P=\dfrac{Q\sin(\varphi\pm\psi)}{\cos\psi}$ für die Richtung Sp von P, parallel zur Länge der schiefen Ebene,

(4′) $P=Q\,\text{tang}(\varphi\pm\psi)$ für die Richtung Sr parallel zur Grundlinie AB der schiefen Ebene.

Aus der Formel (2′) sieht man, daß P am kleinsten wird, wenn der Nenner $\cos(\alpha\mp\psi)=1$ am größten, also $\alpha\mp\psi=0$ oder $\alpha=\pm\psi$ ist; d. h. man hält den Körper gegen das Herabgleiten am leichtesten zurück oder man braucht nach Formel (2′) für die untern Zeichen die kleinste Kraft $P=Q\sin(\varphi-\psi)$, wenn die Richtung dieser Kraft wegen $\alpha=-\psi$ um den Reibungswinkel ψ unter Sp kommt. Eben so überwindet man das relative Gewicht und die Reibung für die Bewegung aufwärts am leichtesten, wenn P wegen $\alpha=+\psi$ um den Reibungswinkel über Sp elevirt ist, weil diesfalls für die obern Zeichen in Formel (2′) $P=Q\sin(\varphi+\psi)$ den kleinsten Werth erhält. Da jedoch die kleinste Kraft in beiden Fällen von jener, welche in denselben Fällen für die zur schiefen Ebene parallele Richtung nach Formel (3′) für das negative und für das positive Zeichen nöthig wird, blos um den, meist nur wenig von der Einheit abweichenden Factor $\dfrac{1}{\cos\psi}$ verschieden ist; so kann man der bequemern Kraftanwendung wegen die Richtung der kleinsten Kraft auch parallel zur schiefen Ebene wählen.

4) Um endlich die Beziehung der Kraft zur Last für das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene zu erhalten, wenn die Reibung unberücksichtigt bleiben kann; so hat man aus Formel (3) für $k=0$

$$P = Q \sin\varphi = Q \cdot \frac{BC}{AC} \quad \text{oder}$$

$$P : Q = BC : AC;$$

d. h. die zur schiefen Ebene parallele Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe zur Länge der schiefen Ebene.

Wie man sieht, sind AC und BC die virtuellen Geschwindigkeiten von P und Q, daher ist dieser Satz zugleich das Carteſische Geſetz.

Ferner folgt für $k = 0$ aus Formel (4)

$$P = Q \operatorname{tang}\varphi = Q \cdot \frac{CB}{AB} \quad \text{oder}$$

$$P : Q = CB : AB;$$

d. h. die zur Grundlinie der schiefen Ebene parallele Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe zur Grundlinie der schiefen Ebene; wobei auch diesfalls AB und BC die virtuellen Geschwindigkeiten von P und Q sind.

§. 133. Der schiefen Ebene bedient man sich meist, um große Lasten von einer Höhe herabzulassen, oder aus der Tiefe zu erheben. Beim Auf- und Abladen der Wägen wird eine solche schiefe Ebene an den Wägen gestellt und darauf die Last hinauf- oder herabgeschoben. Bei runden Körpern wird die Bewegung aufwärts durch das Rollen erleichtert, abwärts aber kann man, wenn die Last sehr groß ist, ein Paar Seile umwinden, um dadurch mit gehöriger Kraft entgegenzuhalten und das zu schnelle Rollen zu verhindern. Sollen beträchtlich große Massen, welche eine ebene Grundfläche haben, fortgeschafft werden; so kann man zur Verminderung der Reibung Walzen unterlegen.

Manchmal wird auch die schiefe Ebene selbst fortgeschoben, und die Last sinkt dann ihres Gewichtes wegen immer mehr herab. In diesem Falle muß aber der Körper, welcher mit einem Ende auf der schiefen Ebene aufliegt, sich um eine unveränderliche Axe drehen und dabei gegen die schiefe Ebene ein hinlänglich großes Hintergewicht haben. Ein Beispiel dieser Art sehen wir bei den in unserer Artillerie eingeführten Richtmaschinen; das Rohr, welches sich um die Axe der Schildzapfen herumdreht, ruht bei einem beträchtlichen Hintergewichte mit dem Stoßboden auf der schiefen Ebene des Richtkeils. Dieser wird durch eine angebrachte Vorrichtung auf einer Ebene hin- und hergeschoben; folglich muß der hintere Theil des Rohres, da er des Hintergewichtes wegen immer an die Fläche der schiefen Ebene angedrückt wird, entweder sich abwärts senken, oder sich erheben, wodurch das Rohr die erforderliche Elevation erhält.

Anmerkung. Obschon die Reibung in vielen Fällen dem Maschinenwesen nachtheilig ist, so gewährt sie doch, auf der andern Seite betrachtet, einen weit größern Nutzen. Wäre sie nicht vorhanden, so könnte kein Geschöpf eine noch so sanft sich erhebende Anhöhe besteigen; alle Körper müßten bei der geringsten Neigung ihrer Unterlage sogleich herabgleiten; wenn ein Körper mit einer noch so großen Kraft gefaßt und gedrückt würde, so müßte er doch den pressenden Theilen entschlüpfen.

III. Der Keil.

§. 134. Der Keil (Fig. 77) ist ein dreiseitiges Prisma, welches mit zwei seiner Seitenflächen, z. B. mit **AF** und **CB** entweder zwischen zwei Körpern hineingedrückt wird, um den einen zu erheben oder das man durch wiederholte Schläge zwischen die Theile eines Körpers hineintreibt, um die Cohäsion aufzuheben; d. h. um den Körper zu zerspalten. Stellt man sich vor, daß durch **EF** eine Ebene **IEFN** senkrecht auf die dritte Seitenebene **DB** gelegt werde; so ist der Keil nichts anderes, als eine Zusammensetzung von zwei schiefen Ebenen, welche durch diesen Schnitt entstehen, in der Voraussetzung, daß die Last senkrecht auf die Ebene wirkt. Denkt man sich ferner einen Schnitt **GHK**, auf welchen die drei parallelen Seitenlinien **AB**, **DC**, **EF** senkrecht stehen, so werden **GH** der Rücken, **GK** und **HK** die Seiten, **KL** die Länge und der Winkel **GKH** die Schärfe des Keils genannt. In den meisten Fällen der Anwendung sind die beiden Seiten **GK** und **HK** einander gleich und man hat dann einen gleichseitigen Keil.

§. 135. Wenn der Widerstand parallel zum Rücken, die Kraft aber senkrecht darauf wirkt, so kommt auf jede Hälfte des gleichseitigen Keils die halbe Last von der halben Kraft zu überwinden; die Hälfte ist aber eine schiefe Ebene, bei welcher die Last senkrecht auf die Grundlinie **LK**, die Kraft aber parallel zu derselben wirkt.

Vermöge §. 132. 4 ist aber

$$\frac{\frac{1}{2}P}{\frac{1}{2}Q} = \frac{GL}{LK}, \quad \text{also}$$

$$P:Q = GL:LK;$$

d. h. bei dem gleichseitigen Keile verhält sich im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last wie der halbe Rücken zur Länge der Keils, wenn die Kraft senkrecht auf dem Rücken ist, der Widerstand aber parallel zu demselben wirkt.

Bei dem Spalten der Körper kann man den Widerstand senkrecht auf die Seiten des Keils, die Kraft aber senkrecht auf den Rücken, also

nach der Richtung **LK** annehmen. In diesem Falle ist der Keil von der schiefen Ebene verschieden und man kann das Verhältniß der Kraft zur Last für den Zustand des Gleichgewichtes auf folgende Art bestimmen. Errichtet man in einem willkürlichen Puncte **M** der Seite **GK** (Fig. 78) die Senkrechte **MR** und aus **R** auf die andere Seite **HK** die Senkrechte **RS**; so kann bei dem gleichseitigen Keile **RM** und **RS** den Widerstand bezeichnen. Verzeichnet man ferner das Kräftenparallelogramm **MRSU**, so ist die Diagonale **RU** die Größe der zum Gleichgewichte erforderlichen Kraft P und $MR = RS = \frac{1}{2}Q$. Zieht man die Gerade **MS**, so ist $RT = TU = \frac{1}{2}P$ und man erhält aus den beiden ähnlichen Dreiecken **MRT** und **GLK**

$$RT : MR = GL : GK \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{2}P : \tfrac{1}{2}Q = P : Q = GL : GK;$$

d. h. wenn bei dem gleichseitigen Keile der Widerstand senkrecht auf die Seiten, die Kraft aber senkrecht auf den Rücken wirkt, so verhält sich im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last wie der halbe Rücken zur Seite des Keils. Aus beiden Untersuchungen folgt, daß in Hinsicht auf den Widerstand die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft desto kleiner wird, oder daß der Keil desto eher eindringt, je schärfer derselbe ist.

§. 136. Die Anwendung des Keils ist in dem gemeinen Leben sehr ausgebreitet. Meist wird er zum Zertrennen der Körper genommen. Dazu gehören alle Messer, Säbel, Äxte, Bohrer, u. s. w. Damit die Reibung so viel als möglich vermindert werde, müssen die Seitenflächen eine gute Politur erhalten. Die Materie des Keils muß hart, aber nicht zu spröde sein, damit er beim Schlagen nicht zerspringe. Bei Maschinen wird oft der Keil gewählt, um eine Pressung zu verursachen. Die Bohrer sind Keile mit gekrümmten Flächen, welche mit ihrer bewegten Schärfe zugleich als Säge dienen. In der Baukunst hat der Keil bei den Gewölben eine vorzügliche Anwendung.

Dritter Abschnitt.

Der Hebel.

§. 137. Wenn in zwei Puncten **A** und **B** (Fig. 79 und 80) einer unbiegsamen und unschweren Geraden zwei Kräfte ***P*** und ***Q*** wirken, diese Gerade aber in einem dritten Puncte **C** so befestigt ist, daß sie sich zwar um denselben in derjenigen Ebene, welche durch die Richtungen der Kräfte gezogen ist, frei herumdrehen, sonst aber keine Bewegung annehmen kann; so wird diese Gerade ein mathematischer *geradliniger Hebel* und der Punct **C**, um welchen die Umdrehung geschieht, der *Unterstützungs-* oder *Ruhepunct* genannt. Die beiden Stücke **AC**, **BC** der Linie **AB** vom Unterstützungspuncte bis zu denjenigen Puncten, an welchen die Kräfte eingreifen, heißen die *Hebelsarme*. Liegt der Unterstützungspunct **C** zwischen den Puncten **A** und **B**, an welchen die Kräfte angebracht werden, wie in **Fig. 79**, so hat man einen *doppelarmigen Hebel*; liegen aber diese Puncte auf derselben Seite des Unterstützungspunctes, wie in **Fig. 80**, so wird dann der Hebel ein *einarmiger* genannt.

Wenn aber zwei unbiegsame Geraden **AC**, **BC** (**Fig. 81**) einen unveränderlichen Winkel **ACB** bilden, der in dem Scheitel **C** so befestigt ist, daß er zwar, wenn auf die Schenkel, wo immer in **A** und **B**, zwei Kräfte ***P*** und ***Q*** wirken, deren Richtungen in der Ebene des Winkels liegen, sich in dieser Ebene um den Punct **C** frei herumdrehen, sonst aber keine Bewegung annehmen kann; so nennt man diese Vorrichtung einen *Winkelhebel*.

§. 138. Sind die Richtungen der an den Hebelsarmen angebrachten Kräfte ***P*** und ***Q*** so beschaffen, daß sie den Hebel auf dieselbe Seite um **C** zu drehen streben, so kann kein Gleichgewicht unter diesen

Kräften ſtattfinden. Damit alſo die beiden Kräfte am Hebel im Gleichgewichte ſein können, müſſen die Richtungen der Kräfte bei dem doppelarmigen Hebel auf derſelben Seite von **AB**, bei dem einarmigen aber auf verſchiedenen Seiten liegen, und bei dem Winkelhebel die beiden Kräfte zugleich entweder den Winkel zu vergrößern oder zu verkleinern ſtreben.

Das Gleichgewicht der Kräfte an dem Hebel kann aber nur dann eintreten, wenn das Drehungsbeſtreben derſelben gegenſeitig aufgehoben wird, d. h. die Reſultirende der Kräfte muß durch den Unterſtützungspunct gehen, ſofort den Hebel an dieſen Punct andrücken.

Anmerkung. Bei der Betrachtung der Kräfte am Hebel für das Gleichgewicht kann der Winkelhebel ganz unberückſichtigt bleiben, weil derſelbe ſtets entweder auf einen doppel- oder einen einarmigen zurückgeführt werden kann. Denn zieht man (**Fig. 81**) durch **C** eine gegen den Winkel **BCA** feſtgeſetzte Gerade **B′CA′** ſo, daß ſie die Richtungen beider Kräfte in **A′** und **B′** durchſchneidet, und verſetzt die Kräfte nach ihren Richtungen in dieſe Durchſchnittspuncte, nemlich ***P*** nach **A′** und ***Q*** nach **B′**; ſo hat man einen doppelarmigen Hebel, an dem die Kräfte im Gleichgewichte ſein werden, wenn ſie am Winkelhebel im Gleichgewichte waren, und umgekehrt. Eben ſo hat man durch eine Gerade **CA″**, welche die Richtungen der Kräfte durchſchneidet., ſtatt des Winkelhebels einen einarmigen, an dem in **A″** und **B″** die Kräfte ***P*** und ***Q*** dieſelbe Wirkung für das Gleichgewicht hervorbringen, als wenn ſie am Winkelhebel unmittelbar in **A** und **B** wirken würden.

§. 139. Da das Gleichgewicht am Hebel die Bedingung in ſich ſchließt, daß die Reſultirende der Kräfte durch den Unterſtützungspunct gehen muß; ſo wird, wenn man aus dieſem Puncte **C** (**Fig. 79** und **80**) auf die Richtungen der Kräfte ***P*** und ***Q*** die Senkrechten **CD** und **CE** fällt, vermöge §. 106. Gl. 5

$$P.CD - Q.CE = 0,$$

weil der entgegengeſetzten Drehungsbeſtrebungen wegen die Momente ungleiche Zeichen erhalten. Aus dieſer Gleichung folgt

$$(1)\quad P = Q.\frac{CE}{CD}, \quad \text{oder}$$

$$P : Q = CE : CD;$$

d. h. für das Gleichgewicht am Hebel verhalten ſich die beiden Kräfte oder Kraft und Laſt zu einander wie um-

gekehrt ihre senkrechten Abstände vom Unterstützungspuncte *).

Sind aber die Kräfte zu einander parallel (Fig. 82 und 83), wozu auch der Fall gehört, wenn sie auf die Hebelsarme senkrecht sind; so hat man

$$CE : CD = CB : CA$$

und die vorige Proportion übergeht in

$$P : Q = CB : CA,$$

wonach also parallele Kräfte am Hebel sich wie umgekehrt ihre Hebelsarme verhalten.

Anmerkung. Aus diesen aufgestellten Gesetzen der Kräfte für das Gleichgewicht am Hebel ist zu ersehen, daß eine Last von einer desto kleinern Kraft erhalten werde, je kleiner der Hebelsarm der Last und je größer jener der Kraft wird, und daß es bei der Anwendung des Hebels vortheilhaft sein wird, den Stützpunct so nahe als möglich an die Last, hingegen die Kraft von demselben so weit entfernt, als es nur immer sein kann, anzubringen. Soll z. B. (Fig. 82 und 83) die Last Q von 100 Pfden von einer Kraft $P = 20$ Pfden im Gleichgewichte erhalten werden, so muß $AC = 5CB$ sein. Würde man die Kraft noch weiter hinausrücken, so daß $AC = 10\,CB$ wird, so halten schon 10 Pfunde in A der Last von 100 Pfunden in B das Gleichgewicht. Hier wird das Gewicht der Stange, auf welche die Kräfte angebracht werden, außer Acht gelassen. Welche Verhältnisse die Kräfte im Zustande des Gleichgewichtes beim Hebel haben müssen, wenn man auch das Gewicht der Hebelsarme berücksichtigt, wird bald gezeigt werden.

§. 140. Um die Resultirende der beiden Kräfte oder den Druck auf den Unterstützungspunct C (Fig. 79 und 80) zu finden, ziehe man durch letztern zwei auf einander rechtwinklige Axen, von denen die eine CA, die andere die darauf senkrechte CY ist und bestimme die Winkel, welche die Kräfte P und Q mit diesen positiven Halbaxen einschließen, nach §. 17. II., indem man die von ihnen mit CA eingeschlossenen durch φ und ψ bezeichnet; so hat man bei beiden Hebeln (Fig. 79 und 80)

---

*) Wird der Hebel um einen kleinen Winkel φ gedreht und sind W und V die virtuellen Geschwindigkeiten von P und Q, so ist (§. 119)

$$CD = \frac{W}{\varphi}, \quad CE = \frac{V}{\varphi},$$

also wegen $P : Q = CE : CD$ auch

$$P : Q = V : W,$$

wie es das Cartesische Gesetz (§. 121) ausspricht.

für P und Q mit der Axe CA die Winkel φ und ψ

„ „ „ „ „ „ „ CY „ „ $90^\circ - \varphi$ „ $\mp 90^\circ + \psi$.

Zerlegt man sonach diese Kräfte in ihre zu diesen Axen parallelen Seitenkräfte; so sind diese

für P parallel zu CA und CY respective $P\cos\varphi$ und $P\sin\varphi$,

„ Q „ „ „ „ „ „ $Q\cos\psi$ „ $\pm Q\sin\psi$.

Bezeichnet ferner X die Resultirende der zu CA und Y die der zu CY parallelen Kräfte, endlich R die von P und Q oder den Druck auf C; so ist

$$X = P\cos\varphi + Q\cos\psi,$$

$$Y = P\sin\varphi \pm Q\sin\psi \quad \text{und}$$

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos(\psi \mp \varphi)}.$$

Man sieht leicht, daß der Druck R auf den Unterstützungspunct C gerade so groß ist, als ob die Kräfte P und Q ihren Richtungen parallel auf diesen Punct angebracht wären.

Sind die Kräfte P und Q zu einander parallel, so ist bei dem doppelarmigen Hebel (Fig. 79) $\psi = \varphi$, bei dem einarmigen (Fig. 80) $\psi = 180^\circ - \varphi$ in den Ausdruck zu setzen und man hat diesfalls, so wie wenn die Kräfte senkrecht auf den Hebel wirken,

für den ersteren $R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ} = Q+P$

und „ „ andern $R = \sqrt{P^2+Q^2-2PQ} = \pm(Q-P)$.

§. 141. Sind bei dem Hebel die beiden parallelen Kräfte P und Q (Fig. 82 und 83) nebst dem Abstande AB ihrer Richtungen von einander gegeben; so kann die Lage des Unterstützungspunctes C für den Zustand des Gleichgewichtes sehr leicht aus der Proportion

$$P : Q = CB : CA$$

gefunden werden.

Bei dem doppelarmigen Hebel (Fig. 82) ist $CB = AB - CA$, folglich

$$P : Q = (AB - CA) : CA,$$

sofort $CA = AB.\frac{Q}{P+Q}$ und $CB = AB.\frac{P}{P+Q}$;

d. h. am doppelarmigen Hebel ist im Zustande des Gleichgewichtes der Abstand des Unterstützungspunctes von der Richtung der einen Kraft gleich der andern multiplicirt mit dem Abstande beider und dividirt durch ihre Summe.

Bei dem einarmigen Hebel (Fig. 83) ist $BC = CA - AB$, daher

$$P : Q = (CA - AB) : CA, \text{ woraus}$$

$$CA = AB.\frac{Q}{Q-P} \text{ und } CB = AB.\frac{P}{Q-P} \text{ folgt;}$$

d. h. bei dem einarmigen Hebel ist der Abstand des Unterstützungspunctes von einer Kraft gleich der andern multiplicirt mit dem Abstande beider und getheilt durch ihre Differenz. Daraus folgt, daß bei dem einarmigen Hebel die beiden parallelen Kräfte nie einander gleich werden können.

§. 142. Durch das Gesetz des Hebels wollen wir die folgenden zwei Aufgaben lösen.

I. Aufgabe. Eine materielle unbiegsame Stange AB (Fig. 84) ist an den beiden Enden A und B unterstützt und an bestimmten Puncten r, r', r'', ... mit Gewichten R, R', R'', ... beschwert, wozu noch in dem Schwerpuncte b der Stange ihr Gewicht q gedacht wird. Man soll den Druck auf jeden der Unterstützungspuncte bestimmen.

Lösung. Ist C der Schwerpunct aller Gewichte $q, R, R', R'', \ldots$. so ergibt sich nach der Lehre vom Schwerpuncte sein Abstand von A

$$AC = \frac{Ab.q + Ar.R + Ar'.R' + Ar''.R'' + \ldots}{q + R + R' + R'' + \ldots}.$$

Denkt man sich nun in C die ganze Last

$$q + R + R' + R'' + \ldots = S$$

vereint und bezeichnet den Druck derselben auf A durch P und den auf B durch Q; so wird, wenn man anstatt der Unterstützungen in A und B die Kräfte P und Q vertical aufwärts wirken läßt, zwischen den parallelen Kräften P, Q und S Gleichgewicht bestehen, wenn nach §. 58 und 59

$$P.AC = Q.BC \text{ und}$$
$$P + Q = S$$

stattfindet. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man endlich den Druck

$$P = \frac{CB}{AB}.S \text{ auf A und jenen } Q = \frac{CA}{AB}.S \text{ auf B, also auch}$$

$$P : Q = CB : CA.$$

Wenn daher z. B. zwei Menschen eine Last an einer schweren Stange tragen, so verhalten sich die dazu erforderlichen Kräfte wie umgekehrt die Abstände des gemeinschaftlichen Schwerpunctes der Belastungen und des Gewichtes der Stange von den beiden Unterstützungs- oder Tragpuncten;

daher der schwächere der beiden Menschen vom Schwerpuncte entfernter zu tragen hat, wenn jeder seinen Kräften angemessen angestrengt sein soll. Ist z. B. die Stärke des einen $\frac{2}{3}$ jener des andern, also $P = \frac{2}{3}Q$, so ist nach der Proportion umgekehrt $CB = \frac{2}{3}CA$ oder weil $CB + CA = AB$ ist,

$$CB = \tfrac{2}{5}AB, \quad CA = \tfrac{3}{5}AB.$$

II. Aufgabe. Auf einer festen horizontalen Unterlage AB (Fig. 85) ist FA befestigt und daran in F ein Hebel JHGFE angebracht, von welchem JHG der eine, FE der andere Hebelsarm und F der Unterstützungs- oder Drehpunct ist. Mit FE ist eine Stange EC durch ein bewegliches Knie bei E verbunden, welche, wenn eine Kraft an dem Hebelsarme JHG den Hebelsarm FE gegen C dreht, gegen B fortgeschoben wird und ein, mittels eines Kniees an C befestigtes Prisma CDdc auf AB fortschiebt und daher einen vor demselben festgehaltenen Körper zusammenpreßt. Man soll nun bei dieser Vorrichtung, welche man eine Presse oder ihrer Zusammensetzung wegen einen Kniehebel nennt, die Pressung von CDdc gegen einen auf AB befestigten Körper durch eine auf den Hebelsarm GHJ wirkende Kraft P ausdrücken.

Lösung. Es sei $FE = a$, $EC = b$, $Ff = AF - CD = h$ und die veränderliche Gerade $CF = \gamma$; ferner sei die aus F auf die Kraft P gefällte Senkrechte $Fp = A$, so wie die Winkel $ECF = x$, $EFC = y$ und $fCF = z$. Ist R die Kraft, womit EC nach ihrer Richtung fortgeschoben wird und fällt man aus F auf selbe die Senkrechte Fq; so ist an dem einarmigen Hebel FE'p

$$A.P = R.Fq.$$

Zerlegt man R in die Seitenkräfte $CQ = Q$ parallel zu AB und $CS = S$ senkrecht darauf; so ist

$$Q = R\cos(x+z), \quad S = R\sin(x+z),$$

wovon S durch die feste Unterlage AB aufgehoben wird.

Ferner folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke FqE, in welchem der Winkel $FEq = x + y$ ist,

$$Fq = a\sin(x+y).$$

Setzt man sonach diesen Werth und jenen $R = \frac{Q}{\cos(x+z)}$ in jene Momentengleichung, so hat man

$$A.P = \frac{aQ\sin(x+y)}{\cos(x+z)} \text{ und daraus}$$

$$(1) \qquad Q = \frac{A.P}{a} \cdot \frac{\cos(x+z)}{\sin(x+y)}.$$

Dies ist nun die Pressung, welche die Kraft P am Kniehebel mittels des Prisma CDdc auf einen vor cd befindlichen Körper nach horizontaler Richtung ausübt und man sieht, daß sie bei derselben Kraft P mit der Abnahme von $x+z$ und $x+y$ oder wie man leicht erkennt, mit der Vergrößerung von γ und Verkleinerung von h größer wird.

Setzt man

$$\frac{a+b+\gamma}{2}=s,\ s(s-a)(s-b)(s-\gamma)=M;$$

so findet man

$$\sin(x+y)=\frac{2}{ab}\sqrt{M},\ \cos z=\frac{\sqrt{\gamma^2-h^2}}{\gamma},\ \sin z=\frac{h}{\gamma},$$

$$\cos x=\frac{\gamma^2+b^2-a^2}{2b\gamma},\ \sin x=\frac{2\sqrt{M}}{b\gamma};\ \text{also}$$

$$\cos(x+z)=\frac{(\gamma^2+b^2-a^2)\sqrt{\gamma^2-h^2}-4h\sqrt{M}}{2b\gamma^2}.$$

Durch Substitution für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+z)$ in die Gleichung (1) erhält man sonach auch

$$(2)\quad Q=\frac{AP}{4\gamma^2}\left\{[\gamma^2+(b-a)(b+a)]\frac{\sqrt{(\gamma-h)(\gamma+h)}}{\sqrt{M}}-4h\right\},$$

wobei h positiv oder negativ ist, je nachdem F ober oder unter der Geraden Cf liegt.

Für $h=0$, in welchem Falle F nach f kommt, ist

$$(3)\quad Q=\frac{AP}{4\gamma}\frac{[\gamma^2+(b-a)(b+a)]}{\sqrt{M}}.$$

So z. B. ergibt für $a=3''$, $b=10''$, $\gamma=12''$, $A=18''$ und $P=30$ Pfunden sich $\sqrt{M}=12{\cdot}1835$ Q. Z.; also

$$Q=P\frac{18.235}{48.12{\cdot}1835}=7{\cdot}233\,P=217\text{ Pfunden.}$$

Ist aber bei denselben Zahlenwerthen von a, b, A und P, $\gamma=12{\cdot}8''$; so ist $\sqrt{M}=6{\cdot}086$ Q. Z., sofort

$$Q=14{\cdot}72\,P=442\text{ Pfunden,}$$

mehr als doppelt so groß als im vorigen Beispiele.

Überhaupt wächst Q mit der Zunahme von γ, welches aber, wie man sieht, kleiner als $a+b$ sein muß.

§. 143. Wirken auf einen Hebel mehre Kräfte P', P'', P''', ..., deren Richtungen mit dem Hebel in einerlei Ebene liegen und sind p', p'', p''', ... die senkrechten Abstände derselben vom Unterstützungspuncte, ferner α', β', α'', β'', α''', β''', ... die Winkel, welche diese Kräfte mit zwei rechtwinkligen, in ihrer Lage gegen den Hebel bestimmten Axen nach §. 17. I. einschließen; so hat man für das Gleichgewicht (§. 106) die Momentengleichung

$$(1) \qquad P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

worin die Momente der nach einer Seite zu drehenden Kräfte positiv, die andern aber negativ zu nehmen sind.

Ist ferner R der Druck, welchen jene Kräfte auf den Unterstützungspunct hervorbringen und sind a, b die Winkel desselben mit den angenommenen Axen; so ist, wenn man

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots = \Sigma P\cos a,$$

$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \ldots = \Sigma P\cos\beta$$

setzt,

$$(2) \qquad R = \sqrt{[\Sigma P\cos a]^2 + [\Sigma P\cos\beta]^2},$$

$$(3) \qquad \cos a = \frac{\Sigma P\cos a}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma P\cos\beta}{R}.$$

Indessen werden wir die Richtung des Druckes, d. i. die Winkel a und b selten zu bestimmen nöthig haben.

§. 144. Der Hebel als Maschine betrachtet, d. h. der materielle oder physische Hebel unterscheidet sich vom mathematischen nur dadurch, daß für die beiden Hebelsarme statt einer unbiegsamen unschweren Linie eine nicht zu biegende schwere Stange von Holz oder Metall genommen wird. Denkt man sich in ihrem Schwerpuncte ihr Gewicht vereint oder was dasselbe ist, statt der Stange eine unbiegsame Linie, an der im Schwerpuncte der Stange deren Gewicht angebracht ist, übrigens aber bei demselben Unterstützungspuncte auch dieselben Kräfte auf die Linie wirkend, wie bei dem physischen Hebel, so kann derselbe für das Gleichgewicht nach vorigem §. behandelt werden.

Da aber nebst dem Gewichte des physischen Hebels auch noch zu berücksichtigen kommt, daß seine Unterstützung nicht ein Punct oder eine gerade Linie ist, sondern in cylindrischen Zapfen besteht, welche sich in cylindrischen Pfannen drehen, sofort durch den Druck der Zapfen an die Pfannen an deren Umfang eine Reibung entsteht, welche für die Drehung des Hebels überwunden werden muß; so wollen wir bei der Untersuchung des

Gleichgewichtes am physischen Hebel zugleich auch diese Zapfenreibung mit in Erwägung nehmen.

§. 145. Es sei bei einem physischen Hebel (Fig. 86) von irgend einer Form seiner Arme, die daher auch hier nicht dargestellt ist, C der Mittelpunct der cylindrischen Zapfen, welche in der Pfanne pGf ruhen; ferner sei P die Kraft und Q die Last, deren Angriffspuncte in ihren respectiven Richtungen an den Hebelsarmen gedacht werden müssen; endlich sei Sq eine Verticale durch den Schwerpunct des Hebels und q sein Gewicht.

Setzt man die senkrechten Abstände der Kräfte P, Q, q von C, nemlich $CA = A$, $CB = a$, $CF = b$; so ist (§. 143) für den Zustand des Gleichgewichtes dieser Kräfte ohne Reibung der Zapfen an den Pfannen

$$(1) \qquad AP + bq = aQ$$

und dabei muß der auf den Zapfen hervorgebrachte Druck durch C gehen.

Soll aber eine nach der Richtung AP angebrachte Kraft mit Q, q und der Reibung, welche sich der Drehung des Zapfens in der Pfanne pGf entgegensetzt und deswegen die drehende oder Zapfenreibung heißt, im Gleichgewichte sein; so muß diese Kraft, welche wir mit V bezeichnen, größer als P und so beschaffen sein, daß sie, um das mindeste vergrößert, den Hebel in ihrem Sinne zu drehen vermag.

Wegen $V > P$ kann nun die Resultirende von V, Q, q nicht mehr durch C gehen, sondern ihre Richtung HR muß den Zapfen zwischen C und A in irgend einem Puncte G schneiden und ihn daselbst an die Pfannen andrücken.

Um diese Resultirende, die R heißen mag, zu finden, seien im Sinne von §. 17. I. φ und ψ die Winkel der Kräfte P und Q gegen eine horizontale Axe CX, also $90° - \varphi$ und $-90° + \psi$ die Winkel derselben gegen eine verticale Axe CY. Zerlegt man demnach jede Kraft in zwei Seitenkräfte nach diesen Axen, so hat man für den Druck auf den Zapfen in horizontaler Richtung $V\cos\varphi + Q\cos\psi$ und in verticaler $V\sin\varphi + Q\sin\psi + q$; folglich für den ganzen Druck in der Richtung HR

$$(2) \qquad R = \sqrt{(V\cos\varphi + Q\cos\psi)^2 + (V\sin\varphi + Q\sin\psi + q)^2}.$$

Ist Q entgegengesetzt von P, wie Q', so ist der Winkel ψ' an die Stelle von ψ und $90° + \psi'$ an die von $-90° + \psi$ zu setzen.

Ziehen wir ferner durch C die Gerade CGR'', dann zu G die Tangente R'Gr' zu dem Zapfen und zerlegen R in die senkrechten Seitenkräfte R'' und R', so ist erstere der normale Druck des Zapfens gegen die

Pfanne, also kR'' die Reibung, welche gegen die Drehung durch die Kraft V nach der Richtung Gr' widersteht, daher durch die ihr gerade entgegengesetzt wirkende Seitenkraft R', wenn V mit Q, q und der Reibung im Gleichgewichte sein soll, überwunden werden muß. Es wird sonach

$$R' = k.R''$$

und da $R^2 = R'^2 + R''^2$

ist, so folgt aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen

$$R' = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.R = k'.R.$$

Man nennt k' den Coefficienten der drehenden Reibung, welchen man aber nicht durch den Coefficienten k der gleitenden Reibung aus $k' = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ berechnet, sondern aus wirklichen Drehversuchen bestimmt, worüber am Schlusse des nächsten §. eine Tabelle folgen wird.

Da R' nach der Richtung Gr' mit Q einerlei, V und q das entgegengesetzte Drehungsbestreben haben, so wird, wenn man den Halbmesser des Zapfens $CG=\alpha$ setzt, wodurch das Moment der Reibung $= \alpha R' = \alpha k' R$ ist, für das Gleichgewicht von R', Q, V, q

$$(3) \qquad AV + bq = aQ + \alpha k' R.$$

§. 146. Nach der Substitution des Werthes von R aus Formel (2) in die Gleichung (3) (vorig. §.) erhält man zur Bestimmung von V eine verwickelt quadratische Gleichung, woraus für V ein sehr zusammengesetzter Ausdruck mit einer Quadratwurzel, die bald positiv, bald negativ zu nehmen ist, folgen würde. Allein da in den meisten Fällen der Anwendung entweder R rational erscheint, oder wo dieses nicht ist, ohne merkliche Veränderung des Werthes rational dargestellt werden kann; so wollen wir nur mehre dieser Fälle hier betrachten.

1) Sind Q und V vertical abwärts (Fig. 86. a), so ist $\varphi = \psi = 90°$ und es wirken alle Kräfte in demselben Sinne, folglich wird nach Formel (2) und (3)

$$R = V + Q + q, \quad AV + bq = aQ + \alpha k'(V + Q + q)$$

und daraus

$$(4) \qquad V = \frac{Q(a+\alpha k') - (b - \alpha k')q}{A - \alpha k'}.$$

2) Sind aber Q und V vertical aufwärts (Fig. 86. b), so ist $\varphi = \psi = 90°$ und q wirkt entgegengesetzt mit V und Q. Man hat sonach diesfalls aus (2) und (3)

$$R = V + Q - q\,,\quad AV - bq = Qa + ak'(V + Q - q)\,,$$

$$(5)\qquad V = \frac{Q(a+ak') + (b-ak')q}{A - ak'}\,.$$

Wie aus dem Vergleiche von Fig. 86. b. und 86. a. zu sehen ist, muß die Formel (5) auch aus der (4) hervorgehen, wenn in letzterer V und Q negativ genommen werden.

3) Ist Q vertical ab- und V vertical aufwärts, also der Hebel einarmig (Fig. 86. c); so ist $\varphi = 90°$, $\psi = 90°$ und weil q der Kraft V entgegengesetzt ist,

$$R = \pm(Q + q - V)\,,\quad VA - bq = Qa \pm ak'(Q + q - V)\,,$$

wo wegen des positiven R die obern oder untern Zeichen gelten, je nachdem $Q + q > V$ oder $Q + q < V$ ist. Man hat also

$$(6)\qquad V = \frac{Q(a \pm ak') + (b \pm ak')q}{A \pm ak'}\,.$$

4) Ist aber Q vertical auf- und V abwärts (Fig. 86. d), so braucht man nur in der Formel (6) V und Q negativ zu nehmen, um für diesen Fall

$$(7)\qquad V = \frac{Q(a \pm ak') - (b \pm ak')q}{A \pm ak'}$$

zu erhalten, wo für $Q + q > V$ die obern und für $Q + q < V$ die untern Zeichen gelten.

5) Ist ferner Q vertical abwärts und V horizontal (Fig. 86. e), so ist $\varphi = 0$, $\psi = 90°$, sofort nach Formel (2)

$$R = \sqrt{V^2 + (Q + q)^2} = \delta'(\delta V + Q + q)\,,$$

wo $\delta = \dfrac{P}{Q+q}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} = \delta'$ ist*) Den Werth von P gibt die

*) Denn man hat allgemein

$$\sqrt{m^2+n^2} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.m + \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.n = \frac{\delta m + n}{\sqrt{1+\delta^2}} \text{ für } \frac{m}{n} = \delta,$$

wobei die Werthe von m und n positiv zu nehmen sind; auch sei $m < n$, also $\delta < 1$. Wäre m oder n nicht genau bekannt, sondern nur nahe Werthe derselben (wie wir vorhin P statt V gesetzt haben), so erhält man für δ den etwas verschiedenen Werth $\gamma = \delta(1 \pm \frac{1}{n})$ in jener Formel und die gesuchte Quadratwurzel wird um einen Theil $f.\sqrt{m^2+n^2}$ fehlerhaft werden. Um diesen Fehler zu finden, hat man sofort

$$\sqrt{m^2+n^2} = \frac{\gamma m + n}{\sqrt{1+\gamma^2}} + f\sqrt{m^2+n^2}$$

Gleichung (1) des vorig. §. Man hat sonach der Formel (3) wegen

$$AV+bq=aQ+ak'\delta'(\delta V+Q+q)$$

und daraus

$$(8)\qquad V=\frac{Q(a+ak'\delta')-(b-ak'\delta')q}{A-ak'\delta'\delta}.$$

6) Ist endlich Q vertical aufwärts und V horizontal (Fig. 86. f), hat man $\varphi=0$ und $\psi'=90°$, also

$$R=\sqrt{V^2+(Q-q)^2}=\delta'(\delta V+Q-q),$$

für $\delta=\frac{P}{Q-q}$ und $\delta'=\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$. Die Formel (3) ist diesfalls

$$AV+bp=aQ+ak'\delta'(\delta V+Q-q)$$

und gibt

$$(9)\qquad V=\frac{Q(a+ak'\delta')-(b+ak'\delta')q}{A-ak'\delta'\delta}.$$

Wäre aber $Q-q>P$, so setzt man $\frac{Q-q}{P}=\delta$, und man hat

$$R=\delta'[V+\delta(Q-q)],$$

$$AV+bq=aQ+ak'\delta'[V+\delta(Q-q)],$$

also diesfalls

$$(10)\qquad V=\frac{Q(a+ak'\delta'\delta)-(b+ak'\delta'\delta)q}{A-ak'\delta'}.$$

Anmerkung. Soll in den Fällen von 1) bis 6) V diejenige Kraft vorstellen, welche mit Hilfe der Reibung die Drehung im Sinne von Q verhindert, so braucht man nur, da die Reibung jetzt zu Gunsten von V wirkt, in allen den Formeln (4) bis (10) $-ak'$ an die Stelle von ak' treten zu lassen.

---

und daraus

$$f=1-\frac{\gamma m+n}{\sqrt{(1+\gamma^2)(m^2+n^2)}}=1-\frac{\gamma\delta+1}{\sqrt{(1+\gamma^2)(1+\delta^2)}},\text{ oder}$$

$$f=1-\frac{n(1+\delta^2)\pm\delta^2}{\sqrt{(1+\delta^2)[n^2.(1+\delta^2)+\delta^2\pm 2n\delta^2]}}=$$

$$=\frac{1}{2n^2}\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)^2\mp\frac{\delta}{n^3}\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)^3+\ldots.$$

Hieraus sieht man, daß für den kleinen Werth von $n=5$ und für den größten Werth $\delta=1$, $f=\frac{1}{150}$ oder $\frac{1}{250}$, somit die Wurzel nach Formel $\sqrt{m^2+n^2}=\frac{\gamma m+n}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ um ihren $\frac{1}{150}$ oder $\frac{1}{250}$ Theil kleiner, je nachdem $\gamma=\frac{4}{5}\delta$ oder $=\frac{6}{5}\delta$ ist.

Überhaupt nimmt f mit der Zunahme von n um so mehr ab, je tiefer δ unter 1 kommt.

Nachfolgende Tabelle gibt den Coefficienten k' nach sorgfältigen Versuchen von *Morin* über die Zapfenreibung.

Körper des Zapfens	Körper der Pfanne	Schmiermittel	Reibungscoefficient k' bei dem Geben der Schmiere: gewöhnlicher Art	Reibungscoefficient k' bei dem Geben der Schmiere: ununterbrochen
Gußeisen		Olivenöl, Schweinfett, Talg oder Schweinfett mit Graphit	0·07 bis 0·08	0·054
		dieselben Schmieren und naß	0·08	—
		Asphalt	0·054	—
		fettig oder fettig und naß	0·14	—
Schmiedeeisen	Gußeisen	Olivenöl, Schweinfett, Talg, oder Schweinfett und Graphit	0·07 bis 0·08	0·054
Schmiedeeisen	Bronze	Olivenöl, Schweinfett oder Talg	0·07 bis 0·08	0·054
		feste Wagenschmiere	0·09	—
		fett und naß	0·19	—
		sehr wenig fett	0·25	—
Bronze	Gußeis.	Öl oder Talg	0·09	0·045 bis 0·052
Bronze		Öl	0·10	—
		Schweinfett	0·09	—
Gußeisen	Bronze	Olivenöl, Schweinfett, Talg oder Schweinfett mit Graphit	0·07 bis 0·08	0·054
		fettig oder fettig und naß	0 16	—
		sehr wenig fettig	0·19	—
Gußeisen	Franzosen- od. Guajakholz	ohne Schmiere	0·18	—
		Öl oder Schweinfett	—	0·090
		fettig von Öl oder Schweinfett	0·10	—
		fettig von Schweinfett und Graphit	0·14	—
Schmiedeeisen	Franzosenholz	Öl oder Schweinfett	0·11	—
		blos fettig von jedem	0·19	—
Franzosenholz	Gußeisen	Schweinfett	0·12	—
		blos fettig	0·15	—
Franzosenholz		Schweinfett	—	0·07

§. 147. Der Hebel wird sehr häufig angewendet. Zu den einfachen Maschinen, welche zu der Gattung der Hebel gehören, kann der Hebbaum, der Geißfuß, die Heblade, alle Gattungen von Scheeren und Zangen, der einfache Krahn und die Wage gezählt werden.

Der gemeine Hebbaum dient eine Last entweder zu erheben, oder weiter fortzuschieben. In dem ersten Falle ist er ein doppelarmiger Hebel, an dessen beiden Enden Kraft und Last angebracht sind. Im zweiten Falle aber ist er ein einarmiger, bei welchem der Unterstützungspunct zu Ende desselben auf der Erde aufliegt und die Last auf denjenigen Punct wirkt, welcher an dieselbe angedrückt wird.

Der Geißfuß oder die Brechstange ist ein Hebbaum, dessen Ende an der Last gekrümmt und gabelförmig ausgeschnitten ist. Er wirkt als doppelarmiger Hebel.

Die Heblade (Fig. 87) besteht aus zwei starken, beiläufig eine Klafter langen und zehn Zoll breiten Pfosten, welche an den beiden Enden mittels Nägel und Ringe an einander befestigt sind. Diese Pfosten sind von oben bis unten von einander getrennt, damit sich eine eiserne Stange dazwischen auf- und abwärts bewegen kann. In der Breite dieser Pfosten sind zwei Reihen Löcher angebracht, welche in gleichen Abständen immer aufwärts gehen und in beiden Pfosten so auf einander passen, daß man einen Bolzen durchstecken kann. Der vordere Theil AB des Hebels, welcher außerhalb der Pfosten sich bewegt, ist eine hölzerne Stange, der hintere Theil aber ist ein prismatisches Stück Eisen, welches an der untern Kante zwei cylindrische Einschnitte m, n hat, die von einander eine solche Entfernung haben, daß, wenn man in zwei nächsten Löchern der beiden Reihen an den Pfosten Bolzen durchsteckt, diese Einschnitte in die Bolzen eingreifen. Zwischen diesen Einschnitten ist an der Stange an einem Ringe ein Haken r angebracht, an welchem die Last mittels einer Kette befestigt wird. Damit die Heblade eine feste Stellung erhalte, so muß sie rückwärts durch ein oder auch zwei Stützen gehalten werden.

Alle Gattungen Scheeren sind entweder doppelarmige Hebel, wie z. B. die gemeinen Scheeren, bei welchen der Drehpunct um den Stift der Unterstützungspunct ist, oder einarmige, wie z. B. die Schafscheere, die Feuerzange u. s. w., wobei die Kraft größer als die Last sein muß, weil erstere näher an dem Unterstützungspuncte als die letztere angebracht wird.

Der Krahn oder Kranig dient, um Lasten von einem Orte in die Höhe zu heben und sie an einem andern niederzulassen. Der Krahn

muß also nebst der Eigenschaft, in die Höhe zu heben, auch noch eine umdrehende Bewegung um eine verticale Axe annehmen können. Die einfachste Einrichtung zeigt Fig. 88.

Andere Einrichtungen der Krahne, wovon einige selbst mit den Lasten weiter gebracht werden können, findet man in größern Werken über Maschinenwesen erörtert.

Die in der Artillerie eingeführte Transportir- und die Schnabel-Protze kommen mit dem Krahne, als Hebel genommen, ziemlich überein.

Die Wagen dienen, um mittels eines angebrachten Gegengewichtes die Gewichte der Körper zu erforschen und die Massen derselben unter einander zu vergleichen. Sie erhalten ihre Einrichtung nach den verschiedenen Zwecken, die man damit erreichen will. Alle Gattungen der Wagen sind doppelarmige Hebel, bei welchen auf der einen Seite der abzuwägende Körper, auf der andern vom Unterstützungspuncte aber das entsprechende Gegengewicht angebracht wird. Zu den Hebelsarmen wird eine unbiegsame Stange von Eisen genommen, welche man den Wagbalken nennt. Sind die Hebelsarme einander gleich, so muß auch das Gewicht des Körpers dem zum Abwägen verwendeten Gegengewichte gleich sein. Da sich nun hier die Gewichte der Körper von selbst ergeben, ohne daß man eine weitere Berechnung anstellen darf; so ist der Gebrauch dieser Wagen am bequemsten und für die gewöhnlichen Fälle des Handels allgemein eingeführt. Diese Gattung der Wagen nennt man die gemeinen Wagen.

Die gemeine Wage (Fig. 89. a) hat in der Mitte des Wagbalkens auf beiden Seiten einen darauf senkrechten Zapfen, welcher unten, um die Reibung zu vermindern, keilförmig zugeschärft ist. Die Zapfen liegen in den Pfannen einer Scheere, so daß sich der Wagbalken in einer verticalen Ebene frei herumdrehen kann, wenn die Scheere an einem oben angebrachten Haken entweder frei gehalten, oder mittels desselben an einem Gestelle aufgehängt wird. In der Mitte des Wagbalkens ist ein senkrechter Stift — Zunge — befestigt, welcher sich in der Scheere frei bewegen kann. Weil die Scheere vertical herabhängt, so muß der Wagbalken die horizontale Lage angenommen haben, wenn sich die Zunge genau zwischen der Scheere befindet. An den Endpuncten des Wagbalkens werden zwei Wagschalen von gleichem Gewichte, welche entweder in Schnüren oder auch an Ketten befestigt sind, eingehängt.

Würde der Schwerpunct des Wagbalkens und der Aufliegpunct an der Schärfe der Zapfen in der Verbindungslinie sich befinden, die man zwi-

schen den beiden Aufhängpuncten der Wagschalen ziehen kann; so müßte bei gleichen Gewichten der Wagbalken in jeder Lage schwebend erhalten werden. Bei ungleichen Gewichten könnte aber derselbe nicht eher ruhen, als bis er in die verticale Lage treten würde. Fiele aber der Schwerpunct oberhalb des Unterstützungspunctes, so müßte sich der Wagbalken bei der geringsten Veränderung gänzlich umschlagen. In beiden Fällen würde also die Wage nicht wohl zu brauchen sein.

Bei der Einrichtung einer Wage hat man auf folgende Puncte wesentlich Rücksicht zu nehmen.

1) Der Wagbalken muß auf beiden Seiten des Unterstützungspunctes eine gleiche Länge haben und gleichförmig gearbeitet sein, damit der Schwerpunct desselben in die Senkrechte falle, die man durch den Unterstützungspunct auf die Mittellinie des Wagbalkens ziehen kann.

2) Der Wagbalken muß in seiner Stärke von der Mitte an immer abnehmen, jedoch noch an den Endpuncten so beschaffen sein, daß er von der größten Last, die man mit einer solchen Wage abwägen will, noch nicht gebogen werde. Bei einer größern Stärke würde das Gewicht des Wagbalkens ohne Noth vermehrt, also die Reibung an den Zapfen vergrößert und die Empfindlichkeit dadurch vermindert werden.

3) Damit die Zunge das gehörige Gegengewicht erhalte und der in der Scheere eingelegte Wagbalken ohne Schalen blos eine horizontale Lage annehme; so muß der Schwerpunct des Wagbalkens unterhalb des Unterstützungspunctes liegen. Befindet sich nun der Unterstützungspunct in der Verbindungslinie der Aufhängpuncte, so finden alle die in der Anmerkung des §. 102 gemachten Schlüsse statt; es wird nemlich bei gleichen Gewichten der Wagbalken in die horizontale Lage übergehen, was durch das Einspielen der Zunge in die Scheere angezeigt wird; bei ungleichen Gewichten aber wird der Schwerpunct auf die Seite des größern Gewichtes gerückt, folglich wird da der Wagbalken sinken, damit dann der Schwerpunct wieder in die Unterstützungslinie kommt. Der Winkel, um welchen bei einem gegebenen Unterschiede der Gewichte der Wagbalken von der horizontalen Lage abweicht, wird der Ausschlag genannt.

Wenn **C** (Fig. 90) der Unterstützungs- oder Drehpunct, α der Schwerpunct und q das Gewicht des Wagbalkens **ABDC** ist, **A** und **B** die Aufhängpuncte der Wagschalen und die Gewichte P und Q gleich sind; so fällt der Schwerpunct der ganzen Belastung unter **C** und es muß bei horizontalem Wagbalken Gleichgewicht eintreten. Ist aber etwa $P > Q$, so rückt der Schwerpunct dieser Gewichte nach β näher an **A** und der

Schwerpunct S der ganzen Belastung muß in der Geraden $\beta\alpha$ liegen. Die Stange kann also in diesem Falle nur in Gleichgewicht kommen, wenn der Schwerpunct S beim Sinken von A in die durch C gedachte Verticale tritt, wobei die Wage um den Winkel $SC\alpha$, welcher der Ausschlag ist, sich gedreht haben mußte. Bezeichnet man diesen Winkel durch φ, setzt $AD = DB = a$, $CD = b$, $C\alpha = c$ und zieht $S\gamma$ senkrecht auf CD, so ist

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{S\gamma}{C\gamma}.$$

Nun ist wegen der Belastungen $q+P+Q$, Q und P in den Puncten S, B und A

$$S\gamma(q+P+Q)+aQ = aP \quad \text{oder}$$
$$S\gamma(q+P+Q) = a(P-Q)$$

und wegen der Belastungen $q+P+Q$, q und $P+Q$ in S, α und β

$$C\gamma(q+P+Q) = cq+b(P+Q),$$

wodurch

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{a(P-Q)}{cq+b(P+Q)}$$

sich ergibt; d. h. der Ausschlag φ oder die Empfindlichkeit der Wage ist bei demselben P und Q desto größer, je größer a und je kleiner b, c und q sind, also je länger der Wagbalken ist, je weniger tief die Aufhängpuncte der Wagschalen und der Schwerpunct des Wagbalkens unter dem Drehpuncte liegt und je geringer das Gewicht des Wagbalkens ist.

4) Soll aber auch, wenn man große Lasten abzuwägen hat, ein schon beträchtlicher Unterschied der Gewichte doch noch einen mäßigen Ausschlag geben; so müssen die Aufhängpuncte der Wagschalen auch etwas herabgerückt werden, weil dadurch der Schwerpunct der Ware und des Gewichtes, welcher in der Verbindungslinie der beiden Aufhängpuncte liegt, unterhalb des Unterstützungspunctes fällt, also dann die in 3) gemachten Schlüsse eintreten. Daraus folgt, daß die Wage desto unempfindlicher (fauler) wird, je tiefer die Aufhängpuncte angebracht sind.

5) Da 4) auf die Unempfindlichkeit der Wage einen größeren Einfluß hat als 3); so muß man bei feinen Wagen, welche schon bei einem sehr geringen Uebergewichte einen Ausschlag geben sollen, die Aufhängpuncte gar nicht herabsetzen, sondern man kann blos durch die Verstärkung des Wagbalkens an dem untern Theile den Schwerpunct etwas unter den Unterstützungspunct bringen. Damit aber auch die Reibung auf den Ausschlag einen geringen Einfluß habe; so müssen die Pfannen der Scheere

möglichst glatt sein. Bei sehr feinen Wagen, auf welchen nur wenige Grane abgewogen werden, laufen die Zapfen in krystallenen Pfannen.

6) Es kann bei einer gemeinen Wage ein Arm des Wagbalkens länger als der andere sein, und doch der Wagbalken sowohl für sich als auch bei eingehängten leeren Wagschalen in die horizontale Lage treten; dies geschieht, wenn nach Verhältniß die Wagschale des kürzern Armes ein größeres Gewicht hat, als die des längern. Bei solchen Wagen kann nun bei horizontaler Lage das Gewicht der Last dem eingelegten Gewichte auf der andern Seite nicht gleich sein und der Verkäufer wird gewinnen, wenn die Ware in die leichtere Wagschale gelegt wird. Um zu untersuchen, ob eine Wage betrüglich sei, darf man nur die Wagschalen oder noch besser, Ware und Gewicht verwechseln und dabei nachsehen, ob auch bei dieser Verwechslung die Zunge in der Scheere einspielt. Durch letzteres Mittel kann man auch bei einer falschen Wage das wirkliche Gewicht x der Ware bestimmen. Es seien a und b die Längen der beiden Arme, an welchen die Wagschalen in **A** und **B** hängen. Ist die Ware in der Wagschale bei **B** und P das erforderliche Gegengewicht; so ist im Zustande des Gleichgewichtes

$$P : x = b : a.$$

Legt man aber die Ware in die bei **A** eingehängte Wagschale, so ist, wenn man das erforderliche Gegengewicht mit Q bezeichnet,

$$x : Q = b : a, \text{ also } P : x = x : Q \text{ und } x = \sqrt{PQ};$$

d. h. das wirkliche Gewicht ist gleich der mittlern geometrischen Proportional-Zahl zwischen den beiden erhaltenen verschiedenen Gewichten.

7) Wäre in der Pfanne keine Reibung, so müßte wegen 3) jeder noch so geringe Unterschied der Gewichte einen Ausschlag geben. Da aber bei noch so gut polirten Flächen diese dennoch immer stattfindet, so gibt es bei jeder Wage eine gewisse Grenze, von welcher an man das Gewicht der Ware nicht genauer bestimmen kann. Diese hängt von der Abrundung an den Zapfen, welche nie in eine vollkommene Schärfe übergehen kann, von der Länge und dem Gewichte des Wagbalkens, von der Größe der Reibung und des Gewichtes des abzuwägenden Körpers ab. Man kann sie auf folgende Weise bestimmen: Ist Q die Ware und V das Gewicht, das jener sammt der Reibung Gleichgewicht hält, daher bei der mindesten Vergrößerung das Steigen der Ware bewirken würde; so ist nach Gl. (4) §. 146 für $A = a$ und $b = 0$

$$V = \frac{Q(a + ak') + ak'q}{a - ak'} = Q + \frac{ak'(2Q + q)}{a - ak'}.$$

Ist aber V' das Gewicht, welches mit der Reibung zusammen das Sinken von Q verhindert, so hat man nach der Anmerkung in §. 146 in der eben aufgestellten Gleichung $-ak'$ statt ak' zu setzen, wodurch

$$V' = \frac{Q(a-ak')-ak'q}{a+ak'} = Q - \frac{ak'(2Q+q)}{a+ak'}$$

sich ergibt. Wie man sieht, wird Q durch V in der ersten Gleichung zu groß und in der zweiten zu klein angegeben.

Die Grenze der Verläßlichkeit einer gegebenen Wage gibt der Werth von $V-Q$ oder $Q-V'$; das größte Gewicht aber, welches bei der Wage noch keinen Ausschlag gibt, wird durch den Werth von $V-V'$ erhalten.

Es sei z. B. bei einer sehr feinen Wage die größte Last, welche man darauf abwägt, $Q = 60$ Granen, das Gewicht des Wagbalkens $q = 480$ Granen, die halbe Länge desselben $a = 4$ Zoll, der Halbmesser der herzförmigen Abrundung $a = 0{\cdot}001$ Zoll und der sehr guten Politur wegen der Reibungscoefficient $k' = 0{\cdot}1$; so ist

$$V = 60{\cdot}015 \text{ und } V' = 59{\cdot}985, \text{ daher } V - V' = 0{\cdot}030;$$

bei dieser Wage könnte man nemlich ein Gewicht von 60 Granen bis auf $0{\cdot}015 = \frac{1}{67}$tel von einem Grane richtig angeben; dabei kann eine Vermehrung des Gegengewichtes von $\frac{3}{100}$tel Gran keinen Ausschlag geben.

8) Je länger der Wagbalken angenommen wird, desto bedeutender wird auch bei einem Überschusse des Gewichtes der Ausschlag sein müssen; da jedoch ein längerer Wagbalken auch noch hinlängliche Stärke haben muß, damit er dem größten Gewichte, welches man auf dieser Wage abwägen will, widerstehe und nicht gebogen werde; so muß es eine gewisse Grenze geben, bei der man, wenn sie überschritten wird, durch die vermehrte Reibung an Empfindlichkeit mehr verliert, als man durch die Vergrößerung des Momentes des längern Hebelsarmes wieder gewinnt.

Nach dem verschiedenen Gebrauche der gemeinen Wage ist auch die Benennung derselben verschieden; man hat nemlich Krämerwagen, Probierwagen, Gold- oder auch Ducatenwagen, u. s. w. Um bei feinen Wagen die horizontale Lage des Wagbalkens so genau, als es nur immer möglich ist, zu bemerken, muß die Zunge eine beträchtliche Länge haben, und auf einen in der Scheere angebrachten Stift auftreffen.

Eine Schnellwage (Fig. 89. b) ist jene Wage, bei welcher mittels eines einzigen Gewichtes die Waren abgewogen werden; in diesem Falle muß der Arm des Wagbalkens, an dem das Gewicht angebracht wird, beträchtlich länger sein, als der Arm, an welchem die Wagschale

für die Last hängt. Je nachdem die Einrichtung getroffen ist, das Gegengewicht oder den Unterstützungspunct mittels einer Hilfe auf dem Wagbalken hin und her zu schieben, heißt die Wage eine römische oder schwedische.

Wenn der längere Arm des Wagbalkens der römischen Wage mit dem kürzern im Gleichgewichte ist; so kann die Eintheilung des längern Armes für die verschiedenen Lasten sehr leicht durch den Satz geschehen, daß sich im Zustande des Gleichgewichtes die Gewichte so gegen einander verhalten wie verkehrt die Hebelsarme; sind die beiden Arme nicht im Gleichgewichte, so ist es für die Ausübung hinlänglich genau, wenn man die Eintheilung durch Versuche vornimmt. Über die practische Eintheilung des Wagbalkens s. Eitelwein B. I. S. 239.

Da der kürzere Arm gegen 3 Zoll lang sein muß, damit die Scheere und die Wagschale einander nicht hindern; so kann aus den ersten Abtheilungen des Gewichtes, welche man auf dieser Wage bemerken will, sehr leicht sowohl die Größe des Gegengewichtes als die Länge des Wagbalkens bestimmt werden. Je größer das Gegengewicht genommen wird, desto kleiner werden die Unterschiede der Gewichte ausfallen müssen, die man auf dem Wagbalken abzählen kann und desto größer wird auch das kleinste Gewicht sein, das die Wage noch angeben kann.

Es sei bei dem Wagbalken der Schnellwage C der Unterstützungspunct, die Länge eines Theiles $CB = a$, q sein Gewicht, die Länge des andern Theiles $CA = b$ und r dessen Gewicht. Ist ferner der Abstand des Aufhängpunctes D der Wagschale von dem Unterstützungspuncte C, nemlich $CD = c$; so kann das Gewicht p der Wagschale, der Ketten und des Hakens bestimmt werden, damit dann der Schwerpunct des Wagbalkens in den Unterstützungspunct C falle, wenn beide Theile prismatische Stangen von gleichförmiger Dichtigkeit sind.

Werden die Momente von dem Unterstützungspuncte C gerechnet, so ist nach dieser Benennung $\frac{1}{2}aq$ das Moment des Theiles CB, $\frac{1}{2}br$ das des Theiles CA und cp jenes der Wagschale; folglich ist, wenn C der Schwerpunct sein soll,

$$cp + \tfrac{1}{2}br = \tfrac{1}{2}aq; \text{ also } p = \tfrac{1}{2}\,\frac{aq - br}{c}.$$

Hat der Wagbalken in beiden Theilen eine gleiche Stärke, so ist

$$a : b = q : r; \text{ folglich}$$

$$p = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^2 - b^2}{bc}.r = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^2 - b^2}{ac}.q.$$

Ist in diesem letztern Falle $c = \frac{1}{2}b$ und $a = nb$; so wird

$$p = (n^2 - 1)r.$$

Sollen nun beide Theile, ohne die Wagschale einzuhängen, im Gleichgewichte sein; so muß, wenn man die Stärke des längern Theiles als Einheit annimmt, n^2 die des kürzern sein in der Voraussetzung, daß die Länge des kürzern Theiles in der des andern genau $n$mal enthalten ist.

Die Schnellwagen werden hauptsächlich bei größern Lasten angewendet. Damit man den Wagbalken nicht zu lang machen darf, kann man mehre Gewichte an demselben anbringen, wovon aber nur das eine verschoben wird und die übrigen nach Umständen ausgehängt werden können. In diesem Falle erhält der Wagbalken so viele verschiedene Eintheilungen, als man Gewichte anbringen will.

Die Brückenwage. Die Brücke, worauf die abzuwägende Last kommt, ruht in vier Puncten A′, A″, A‴, A^{IV} (Fig. 91) der Stützen A′B′, A″B″, A‴B‴, A^{IV}B^{IV} auf zwei Hebeln B′DB″ und B‴DB^{IV}, deren Drehaxen C′C″ und C‴C^{IV} zu einander parallel sind und dabei haben B′, B″ von C′C″, dann B‴, B^{IV} von C‴C^{IV} denselben Abstand a. Die beiden Hebel sind durch ein Knie D in Verbindung, welches von jeder Drehaxe den gleichen Abstand A hat. Ferner ist D durch eine Stange DE mit einem doppelarmigen Hebel EG, dieser durch die Stange GH mit einer Schnellwage HK in Verbindung, welche in dem Puncte K eine Wagschale trägt.

Durch diesen Mechanismus wird eine Last auf der Brücke die Puncte B′, B″, B‴, B^{IV} herab, den Punct D und mit ihm den Punct E hinauf drücken; G wird sofort mit dem Hebelsarme HI der Schnellwage herabgedrückt und der Punct K muß steigen. Bringt man daher in der Wagschale bei K ein Gegengewicht an, welches das Einspielen der Schnellwage bewirkt, so ist dieses mit der ganzen Belastung der Brückenwage im Gleichgewichte. Damit aber für das Abwägen alle Theile der Brückenwage für unschwer angesehen werden können, sofort die abzuwägende Last auf der Brücke blos durch das Gegengewicht im Gleichgewichte erhalten werde; so ist das Gewicht der Wagschale dergestalt regulirt, daß durch dieselbe das Gleichgewicht bei unbelasteter Brücke besteht.

Dieses vorausgesetzt sei Q die abzuwägende Last auf der Brücke, durch welches die Puncte B′, B″, B‴, B^{IV} mit Q', Q'', Q''', Q^{IV} gedrückt werden und sonach

$$Q' + Q'' + Q''' + Q^{IV} = Q.$$

Geschieht nun auf den Punct D durch Q', Q'' mittels des Hebels B′DB″ der Druck X', durch Q''', Q^{IV} des Hebels B‴DB^{IV} der Druck X'',

also im Ganzen der Druck $X' + X'' = X$, welches auch der Druck auf **E** ist; so hat man

$$Q'a + Q''a = X'A,$$
$$Q'''a + Q^{IV}a = X''A$$

und als Summe beider Gleichungen

$$Qa = XA.$$

Ist ferner Y der Druck auf **G** und **H**, P das Gegengewicht in der Wagschale bei **K** und setzt man die Hebelsarme $\mathbf{EF} = b$, $\mathbf{FG} = B$, $\mathbf{HI} = c$, $\mathbf{IK} = C$; so ist

$$bX = BY \quad \text{und}$$
$$cY = CP,$$

folglich durch Multiplication dieser drei Gleichungen

$$Q = \frac{ABC}{abc}.P.$$

Für das leichte und schnelle Abwägen wird die Einrichtung so getroffen, daß $\frac{ABC}{abc} = m$ eine ganze Zahl ist, indem dadurch jede Gewichtseinheit in der Wagschale m Gewichtseinheiten der abzuwägenden Last gibt.

Das Nichtvorkommen von Q', Q'', Q''', Q^{IV} in der letzten Formel beweist, daß es gleichgiltig sei, auf welchen Puncten der Brücke die Last ruht.

Die hier beschriebene Brückenwage dient zur Lastbestimmung von Wägen. Kann ein Wagen nicht ganz auf die Brücke gestellt werden, so führt man denselben einmal mit den vordern Rädern auf die Brücke und wägt ab, dann mit den hintern Rädern und wägt abermals ab. Die Summe beider Resultate gibt das Gewicht des ganzen Wagens.

Für kleinere Lasten hat man auch die tragbaren Brückenwagen von Quintenz. Endlich gibt es noch zusammengesetzte Hebel-, Zeiger-, Feder- und Universalwagen, worüber man in größern Werken über Maschinen, wie auch in Kaisers Handbuch der Statik nachlesen kann.

Vierter Abschnitt.

Die Rolle.

§. 148. Eine kreisrunde Scheibe (Fig. 92), die in ihrer Mitte an einem unbeweglichen cylindrischen Bolzen so angesteckt ist, daß sie sich frei um denselben herumdrehen kann, wird eine Rolle und die Hilfe oder Scheere, in welcher der Bolzen steckt, der Kloben genannt. Damit man um dieselbe eine Schnur legen und dadurch die Last Q mit der Kraft P verbinden könne, muß an dem Umfange der Rolle eine Vertiefung angebracht sein. Läßt man das Gewicht der Rolle und die Reibung an dem Bolzen außer Acht, so findet folgendes Gesetz statt:

Wenn an den Enden einer Schnur, die um den Umfang der Rolle gelegt wird, zwei Kräfte nach was immer für Richtungen angebracht werden, welche die Rolle nach entgegengesetzten Seiten zu drehen streben, so müssen sie im Zustande des Gleichgewichtes einander gleich sein.

Denn die um die Rolle gelegte Schnur wird sich da, wo sie den Umfang der Rolle verläßt, nach der Richtung einer jeden Kraft beiderseits in die gerade Linie ausspannen, deren Verlängerung eine Tangente zu dem Umfange ist. Denkt man sich nun zu den Berührungspuncten **A** und **B** die Halbmesser **CA** und **CB** gezogen, so werden die Richtungen der Kräfte in den Berührungspuncten auf dem Halbmesser senkrecht stehen. Für den Zustand des Gleichgewichtes ist es nun einerlei, ob die ganze Rolle vorhanden ist oder ob man diese hinwegnimmt und dafür den Winkelhebel **ACB** oder den doppelarmigen **ECD** setzt. Dann aber ist im Zustande des Gleichgewichtes $P:Q = CB:CA$ und da $CB = CA$ ist, so muß $P = Q$ sein.

Diese Rolle, welche ohne ihren Ort zu verändern, blos eine drehende Bewegung annehmen kann, nennt man eine feste Rolle.

Anmerkung. Die Rolle ist für die ausübende Mechanik von sehr großem Nutzen. Sie dient, einer Kraft jede beliebige Richtung zu geben, die man, so oft es nur immer nöthig ist, brechen kann, wenn man mehre Rollen zu Hilfe nimmt. So kann man z. B. mittels einer festen Rolle durch einen horizontalen Zug eine Last vertical erhalten und dadurch die Stärke der Menschen und Thiere im Ziehen prüfen.

§. 149. Wenn aber die Last Q (Fig. 93) an dem Kloben angebracht und das eine Ende des umschlungenen Seiles an einem hinlänglich widerstehenden Gegenstande **F** festgehalten ist; so wird die an dem andern Seilende wirkende Kraft P die Last sammt der Rolle fortbewegen, indem letztere von **B** gegen **F** auf dem Seile fortgewälzt wird.

Dieser doppelten Bewegung halber wird diese Rolle eine Zug- oder lose Rolle genannt.

Denkt man sich, da hier durch die Wirkung von P der Punct **A** um **B** gedreht wird, diese beiden Berührungspuncte durch die Sehne **AB** verbunden, so kann man die lose Rolle als einen einarmigen Hebel **AB** betrachten, bei welchem **B** der Unterstützungspunct, **A** und **E** aber die Angriffspuncte der Kraft und Last vorstellen. Zieht man daher aus **B** auf **AP** die Senkrechte **BD**; so ist, wenn Q die angehängte Last sammt Scheere und q das Gewicht der Rolle bedeutet, für das Gleichgewicht ohne Reibung am Zapfen **C**

$$P:(Q+q) = BE:BD.$$

Verbindet man **C** mit dem Berührungspuncte **A**, so ist **CA** parallel zu **BD** und die beiden rechtwinkligen Dreiecke **CAE** und **BAD** sind ähnlich, folglich

$$EA:BD = CA:BA.$$

Da aber **EA**=**EB** ist, so folgt aus der Betrachtung beider Proportionen

$$P:(Q+q) = CA:BA;$$

d. h. bei der losen Rolle verhält sich im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens.

Da der Halbmesser der Rolle eine unveränderliche Größe ist, so wird bei derselben Last und Zugrolle die Kraft desto kleiner, je größer die Sehne **BA** wird. Da nun der Durchmesser die größte Sehne ist, so wird bei einer

gegebenen Last die Gleichgewicht haltende Kraft am kleinsten, wenn die Seile vertical oder mit einander parallel sind und es ist mithin diese Lage bei der Anwendung der Zugrolle am vortheilhaftesten.

Wenn die Last mit der Zugrolle durch eine andere Kraft an AP (Fig. 93. a) um den Weg CC′ bewegt wird; so ist CC′ $= w''$ die virtuelle Geschwindigkeit der Last. Zieht man zu CA aus C′ die Parallele C′A′, sodann A B′ parallel zu AB und berücksichtigt, daß bei jener Bewegung der Angriffspunct A der Kraft P den Weg BB′ + AA′ = 2AA′ beschreibt, indem die Rolle durch ihr Wälzen auf BF den Theil des Seiles BB′ aufnimmt und ihn bei A nebst dem Theile AA′ wieder verläßt; so ist 2AA′ $= w'$ die virtuelle Geschwindigkeit von P. Zieht man nun Ca parallel zu AA′, so hat man die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke CEA und C′aC, also

$$CC' : Ca = CA : EA, \text{ nemlich wegen } Ca = AA'$$
$$CC' : 2AA' = CA : BA \text{ oder}$$
$$w'' : w' = CA : BA.$$

Nach dem Vorigen ist aber

$$P : (Q+q) = CA : BA, \text{ daher}$$
$$P : (Q+q) = w'' : w',$$

also findet auch bei der losen Rolle der Cartesische Satz statt und dabei brauchen w'' und w' nicht unendlich klein zu sein.

Für verticale Seilgänge, wo $P = \frac{1}{2}(Q+q)$ der halben Last gleich und am kleinsten ist, beschreibt auch umgekehrt die Last den kleinsten Weg $w'' = \frac{1}{2}w'$, nemlich nur den halben Weg der Kraft.

§. 150. Sowohl bei der festen als bei der Zugrolle (Fig. 92 und 93) entsteht am Bolzen C eine Reibung, wodurch die zum Gleichgewichte mit der Last und dieser Reibung erforderliche Kraft V größer als die in §. 148 und 149 gefundene Kraft P sein muß.

Die Kraft V bestimmt sich auf folgende Art.

I. Bei der festen Rolle (Fig. 92) sei α der Halbmesser des Zapfens, CA = CB = a der Halbmesser der Rolle bis zur Mitte des Seiles, q das Gewicht der Rolle und φ, ψ die Winkel, welche V und Q mit der horizontalen Geraden ECD einschließen. Da hier in Vergleich des Hebels (§. 145) der Schwerpunct in C liegt und die Abstände der Kräfte von diesem Puncte gleich sind; so hat man daselbst in den Gleichungen (2) und (3) $b = 0$ und $A = a$ zu setzen und man erhält

$$(1) \quad \begin{cases} R = \sqrt{(V\cos\varphi + Q\cos\psi)^2 + (V\sin\varphi + Q\sin\psi + q)^2}, \\ Va = Qa + ak'.R. \end{cases}$$

Man pflegt Q die Spannung des einen Seilganges und V die des andern zu nennen.

1) Sind die Seilgänge parallel, jedoch gegen den Horizont unter dem Winkel φ geneigt, so ist $\psi = \varphi$, sofort

$$R = \sqrt{(V+Q)^2 + 2(V+Q)q\sin\varphi + q^2} \text{ oder nahe}$$
$$= V + Q + q\sin\varphi,$$

also aus der zweiten Gleichung (1)

$$(2) \qquad V = \frac{Q(a+\alpha k') + \alpha k' q\sin\varphi}{a - \alpha k'}.$$

2) Für verticale Seilgänge hat man $\varphi = 90°$, also aus letzterer Formel

$$(3) \qquad V = \frac{Q(a+\alpha k') + \alpha k' q}{a - \alpha k'}.$$

Hieraus folgt $k' = \frac{a(V-Q)}{\alpha(V+Q+q)}$,

als Ausdruck zur Bestimmung des Coefficienten k' der drehenden Reibung mittels Versuche. Hängt man zu diesem Zwecke an einem sehr biegsamen um die Rolle gelegten Faden ein beliebiges Gewicht Q und vermehrt auf der andern Seite das Gegengewicht so lange, bis sich bei der geringsten Vermehrung auf dieser Seite die Rolle zu drehen anfängt, so hat man den entsprechenden Werth von V.

Berücksichtigt man, daß α in Bezug auf a, q in Bezug auf Q sehr klein sind und k' ein kleiner Bruch ist; so kann man in Formel (3) $\alpha k' q$ im Zähler vernachlässigen und es ist für verticale Seilgänge ohne merklichen Fehler

$$(4) \qquad V = Q\,\frac{a+\alpha k'}{a-\alpha k'}.$$

3) Ist Q vertical abwärts und V horizontal; so ist nach Formel (8) (§. 146) für $b=0$, $A=a$, $\delta = \frac{Q}{Q+q}$ und $\delta' = \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}$

$$(5) \qquad V = \frac{Q(a+\alpha k'\delta') + \alpha k'\delta' q}{a - \alpha k'\delta'\delta} = Q + \frac{\alpha k'\delta'[(1+\delta)Q + q]}{a - \alpha k'\delta'\delta}.$$

4) Ist dagegen Q vertical aufwärts und V horizontal, so wird nach Formel (10) (§. 146) für $b = 0$, $A = a$, $\delta = \frac{Q-q}{Q}$

$$(6)\quad V=\frac{Q(a+ak'\delta'\delta)-ak'\delta'\delta.q}{a-ak'\delta'}=Q+\frac{ak'\delta'[(1+\delta)Q-\delta q]}{a-ak'\delta'}.$$

Anmerkung. Wenn die Rolle gegen das Drehen festgehalten wird, so ist die Kraft für das Gleiten des Seiles auf derselben $= Q.e^{k\pi}$ (§. 129) und für das Drehen der freien Rolle eine Kraft $= Q\,\frac{a+ak'}{a-ak'}$ nöthig. Nun ist aber, wenn man die Logarithmen dieser beiden Ausdrücke vergleicht, $k\pi > \frac{2ak'}{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{ak'}{a}\right)^3+\ldots$, weil $k>k'$, $\pi>2$ und $\frac{a}{a}$ ein sehr kleiner Bruch ist, daher also auch $Qe^{k\pi} > Q\,\frac{a+ak'}{a-ak'}$, d. h. das Seil kann auf der Rolle nie gleiten, sondern es kann sich von derselben blos ab- und aufwickeln und muß sonach die Rolle drehen. Dasselbe wird auch durch den Vergleich von $Qe^{\frac{1}{2}k\pi}$ mit dem Ausdrucke (5) oder (6) bewiesen, wozu man q unterdrücken, somit $\delta=1$, $\delta'=\frac{1}{\sqrt{2}}$ setzen kann.

II. Bei der Zugrolle (Fig. 93) geschieht die Reibung an dem Zapfen **C**, worauf die Last Q sammt der Scheere drückt, und nicht an dem Unterstützungspuncte **B** des einarmigen Hebels **BA**. Es können sonach hier zur Bestimmung von V die Formeln in §. 146 nicht angewendet werden, sondern man muß dafür einen andern Weg einschlagen.

Ist $\mathbf{CA}=\mathbf{CB}=a$ der Halbmesser der Rolle, q ihr Gewicht, α der Halbmesser des Zapfens und die Sehne $\mathbf{AB}=c$, so wird ohne Reibung (§. 149)

$$P:(Q+q)=\mathbf{CA}:\mathbf{AB}=a:c$$

und daraus

$$P=\frac{a}{c}(Q+q).$$

Ist ferner p die Kraft, die jener P zugegeben werden muß, um auch noch die Zapfenreibung zu überwinden; so ist, wegen des Druckes Q auf den Zapfen, kQ die Reibung an demselben. Da diese Reibung den Hebelsarm α und die sie überwindende Kraft p den Hebelsarm a hat, so wird

$$ap=\alpha kQ,$$

wobei k den Coefficienten der gleitenden Reibung vorstellt.

Addirt man den hieraus folgenden Werth von p zu P, so hat man $P+p=V$, also

$$(7) \quad V = \frac{a}{c}(Q+q)\left(1+\frac{c\alpha k}{a^2}\right) - \frac{\alpha k}{a}.q = P\left(1+\frac{c\alpha k}{a^2}\right) - \frac{\alpha k}{a}.q.$$

Sind beide Seilgänge vertical, also $c = 2a$, so ist

$$V = \tfrac{1}{2}(Q+q)\left(1+2\frac{\alpha k}{a}\right) - \frac{\alpha k}{a}.q$$

oder wenn man die Last und das Gewicht der Rolle für Q annimmt,

$$V = \tfrac{1}{2}Q\,\frac{a+2\alpha k}{a} - \frac{\alpha k}{a}.q.$$

Läßt man von diesem Ausdrucke die kleine Größe $\frac{\alpha kq}{a}$ hinweg, so wird derselbe etwas vergrößert, zugleich aber wieder verkleinert, wenn man in dem übrigen Theile k mit dem kleinern Coefficienten k' der drehenden Reibung vertauscht (§. 145). Subtrahirt man endlich vom Zähler und Nenner des uneigentlichen Bruches $\frac{a+2\alpha k'}{a}$ die kleine Größe $\alpha k'$, so wird zwar der dadurch erhaltene Bruch $\frac{a+\alpha k'}{a-\alpha k'}$ größer sein, doch ist diese Vergrößerung geringer als der sehr kleine Bruch $2\left(\frac{\alpha k'}{a}\right)^2$ und man kann daher ohne merklichen Fehler

$$(8) \qquad V = \tfrac{1}{2}Q\,\frac{a+\alpha k'}{a-\alpha k'}$$

annehmen.

Es ist also sowohl bei der festen als der Zugrolle nach dieser Gleichung und der (4), wenn X die Spannung des Seiles auf der einen Seite ist, die auf der andern

$$V = X.\frac{a+\alpha k'}{a-\alpha k'}.$$

Wird das Seil, wie in Fig. 94, noch um die feste Rolle bei **F** geführt, so wird, wenn $\frac{1}{2}Q$ die Spannung des Seiles **DB** ist, jene des Seiles **AF**

$$X = \tfrac{1}{2}Q\,\frac{a+\alpha k'}{a-\alpha k'}$$

und jene des Seiles, an dem die Kraft angebracht ist, im Zustande des Gleichgewichtes, wenn die Reibung schon überwältigt ist,

$$V = X\,\frac{a+ak'}{a-ak'} = \tfrac{1}{2}\,Q.\left(\frac{a+ak'}{a-ak'}\right)^2$$

unter der Voraussetzung, daß beide Rollen gleiche Halbmesser und Bolzen haben.

§. 151. Da die Seile bei den Rollen zur Verbindung der Kraft und Last dienen, so müssen sie auch vorzüglich in Erwägung gezogen werden. Bei der Auswahl derselben muß man trachten, sie so biegsam als möglich zu erhalten und nicht dicker anzunehmen, als es die für die Last nöthige Stärke erfordert. Dickere Seile sind unbiegsamer, belasten auch zu sehr die Maschinen und verursachen eine stärkere Reibung. Die Erfahrung hat gezeigt, daß geflochtene Seile stärker und biegsamer sind als gedrehte.

§. 152. Wenn ein Seil um eine Rolle oder um einen Cylinder gelegt und mit Gewichten beschwert wird, so werden bei der Bewegung desselben die obern Lätzen mehr als die untern ausgedehnt. Dieser ungleichförmigen Spannung wegen entsteht ein Widerstand, zu dessen Überwindung eine Kraft erforderlich ist. Diesen Widerstand nennt man die Steifigkeit der Seile. Es ist klar, daß dieser Widerstand desto größer sein müsse, je nachdem das Seil eine größere Dicke hat, je fester es gedreht ist und je stärker es gespannt wird. Die Steifigkeit nimmt immer mehr ab, je mehr das Seil gebraucht wird. Trockene Seile sind immer steifer als etwas feuchte; nasse Seile aber, besonders wenn sie beträchtlich dick sind, werden wieder steifer als trockene. In Wachs oder in Theer getränkte Seile sind noch etwas steifer als gewöhnliche, besonders nimmt bei wachsender Kälte die Steifigkeit der erstern beträchtlich zu.

Wenn verschiedene Seile um verschiedene Rollen mit verschiedenen Gewichten gespannt werden, so kann man für den Widerstand, der durch die Steifigkeit der Seile entsteht, folgendes Gesetz, welches mit allen hierüber angestellten Versuchen ziemlich übereinstimmt, annehmen.

Die Widerstände durch die Steifigkeit bei zwei verschiedenen Seilen stehen in dem geraden Verhältnisse der spannenden Gewichte, dem quadratischen der Dicke der Seile und in dem umgekehrten der Halbmesser der Cylinder oder der Rollen, um welche die Seile gelegt werden. Ist nemlich δ der Durchmesser des Seiles, Q das spannende Gewicht, a der Halbmesser der Rolle

oder des Cylinders und bezeichnet man durch S die Steifigkeit des Seiles, so ist nach dem so eben Gesagten

$$S = c\,\frac{\delta^2}{a}\,Q,$$

wobei c eine absolute Zahl ist, die man den Steifigkeits-Coefficienten oder Biegungszeiger nennt.

Versuchen zufolge ist sehr nahe $c = \frac{1}{2}$.

§. 153. Nun ist es leicht, sowohl bei der festen als der losen Rolle bei einer gegebenen Spannung Q des Seiles auf der einen Seite die des Seils auf der andern so zu bestimmen, daß bei der geringsten Vermehrung eine Bewegung erfolge. Ist R diese Spannung, so wird bei der festen Rolle, wenn Kraft und Last vertical wirken, der Durchmesser des Seiles durch δ bezeichnet und das Gewicht der Rolle außer Acht gelassen wird,

$$R = V + S = Q\left[\frac{a + ak'}{a - ak'} + \frac{c\delta^2}{a}\right],$$

bei der Zugrolle aber

$$R = \tfrac{1}{2}Q\left[\frac{a + ak'}{a - ak'} + \frac{c\delta^2}{a}\right]$$

und wenn dann das Seil noch über eine feste Rolle von gleicher Größe geführt wird,

$$R = \tfrac{1}{2}Q\left[\frac{a + ak'}{a - ak'} + \frac{c\delta^2}{a}\right]^2.$$

Zur Bestimmung des Coefficienten c lege man über eine verstärkte feste Rolle ein Seil, befestige an einem Ende desselben ein beliebiges Gewicht Q und bringe am andern ein solches Gewicht R an, daß es bei der geringsten Vermehrung die Rolle auf diese Seite drehen würde. Zu Q und R ist das Gewicht des betreffenden Seilganges bis zum höchsten Puncte der Rolle mit eingerechnet. Bezeichnet nun q das Gewicht der Rolle und a ihren Halbmesser bis zur Mitte des Seiles, ferner α den Halbmesser des Zapfens und δ den Durchmesser des Seiles; so hat man

$$R = V + S = \frac{Q(a + ak') + ak'q}{a - ak'} + c\,\frac{\delta^2}{a}Q,$$

indem man für V den genauen Werth nach Gl. (3) §. 150 gesetzt hat.

Ist der Reibungs-Coefficient k' bekannt, so kann man aus diesem Ausdrucke den Biegungszeiger berechnen. Soll aber auch zugleich k' bestimmt wer-

den, so muß man für noch eine Spannung Q' die entgegengesetzte Spannung R' für das Gleichgewicht suchen, wodurch sich eine zweite Gleichung

$$R' = \frac{Q'(a + ak') + ak'q}{a - ak'} + c\,\frac{\delta^2}{a}\,Q'$$

ergibt, die in Verbindung mit der vorigen sowohl k' als c liefert. Macht man auf diese Art mehre Versuche mit verschiedenen spannenden Gewichten, Seilen von verschiedenen Dicken und mit Rollen von verschiedenen Halbmessern, so wird man für c einen mittlern Werth erhalten.

§. 154. Die Verbindung mehrer Rollen zu einem einzigen Kloben nennt man eine Flasche. Wenn aber eine befestigte und eine bewegliche Flasche mittels eines Seiles so mit einander verbunden werden, daß das Seil wechselweise um eine Rolle der beweglichen und dann um eine der unbeweglichen Flasche geführt wird, um sie beide einander näher zu bringen und dadurch die an die bewegliche Flasche angehängte Last zu heben; so gibt diese Verbindung einen Flaschenzug. Dabei wird die erste Flasche die feste, die andere aber die lose oder auch die Zugflasche genannt.

§. 155. Die Rollen einer Flasche können entweder so geordnet sein, daß sich jede derselben um einen eigenen Bolzen dreht, oder sie können alle neben einander an einem gemeinschaftlichen Bolzen sich befinden oder endlich können einige Rollen, z. B. zwei und zwei an einem Bolzen hängen. In dem ersten Falle können diejenigen, welche zu einer Flasche gehören (Fig. 95), neben einander fortlaufen, oder (Fig. 96) unter einander, also vertical, angebracht sein. Die Kloben AB und CD nemlich können eine horizontale oder eine verticale Lage erhalten.

Sind die Rollen in der Flasche neben einander, wie es in Fig. 95 zu ersehen ist, so können sie in beiden Flaschen gleiche Durchmesser haben und dabei so geordnet sein, daß bei horizontaler Lage des Klobens die Seile parallel laufen, also die vortheilhafteste Einrichtung erhalten; aber man ist dabei der Gefahr ausgesetzt, daß sich die Flasche seitwärts wirft, und dadurch die Seile von den Scheiben leicht herabkommen können. Diese Anordnung der Rollen kann sehr nützlich sein, wenn man große, sehr lange Steine in die Höhe heben will. Um diese an der Zugflasche besser befestigen zu können, kann man nebst dem Haken c in der Mitte auch noch an den beiden Enden einen Haken anbringen. Die obere Flasche wird bei dem Gebrauche auch durch zwei Ringe befestigt, um eine sichere Lage zu erhalten.

Vortheilhafter sind die Flaschen mit verticaler Kloben, bei welchen die Scheiben unter einander gebracht werden. In diesem Falle aber müssen die Rollen in beiden Flaschen eine ungleiche Größe haben, wenn die Seile parallel laufen sollen, also die Halbmesser der Rollen in der Ordnung, wie das Seil in beiden Flaschen nach und nach um dieselben geführt wird, sich wie die auf einander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... verhalten, weshalb bei dieser Einrichtung die Flaschen nicht so viele Rollen enthalten dürfen, weil die letztern, um welche das Seil geführt wird, zu groß ausfallen würden. Aus eben dieser Ursache wird man die folgenden Rollen immer etwas kleiner entwerfen, ohne auf den parallelen Gang des Seiles zu achten; nur wird man darauf noch Rücksicht nehmen müssen, daß die Seile einander gehörig ausweichen können und sich nicht an einander reiben.

Am vortheilhaftesten und gebräuchlichsten sind die Flaschenzüge (Fig. 97), bei welchen die Rollen in den Flaschen sich um einen gemeinschaftlichen Bolzen AB drehen. Die Gänge des Seiles werden unter einander parallel laufen, wenn die Rollen einander gleich sind; folglich können letztere eine beliebige Größe haben, nur muß der Bolzen, damit er sich nicht biegen kann, eine hinlängliche Stärke erhalten.

Die Scheiben oder Rollen werden aus gutem harten Holze oder noch besser aus Metall erzeugt; der Kloben muß, wenn er aus Holz verfertigt ist, gut mit Eisen beschlagen sein; in dem Falle, wo die metallenen Scheiben an einem Bolzen angebracht werden, sind auch die Kloben aus Metall. Die Bolzen endlich müssen von Eisen sein.

Das eine Ende E des Seiles, an welchem die Kraft angebracht wird, muß immer über die letzte Rolle der unbeweglichen Flasche geführt werden; das andere F kann entweder, wie in Fig. 95 und 97, an die unbewegliche, oder, wie in Fig. 96, an die bewegliche Flasche durch einen daselbst angebrachten Haken befestigt werden. Im ersten Falle haben beide Flaschen eine gleiche Anzahl Rollen, im zweiten aber muß die unbewegliche Flasche um eine Rolle mehr als die bewegliche erhalten, in der Voraussetzung, daß Kraft und Last nicht entgegengesetzte Richtungen haben, was beinahe immer stattfindet. Soll die Last durch Thiere gehoben werden, die nach einer horizontalen Richtung ziehen, so muß das Seil noch um eine zu diesem Zwecke angebrachte feste Rolle geführt werden.

Damit die bewegende Kraft besser vertheilt werde, kann sie zugleich an beiden Enden des Seiles angebracht werden. In diesem Falle kann man blos die in Fig. 97 und 98 abgebildeten Flaschenzüge anwenden. Zu diesem Zwecke wird meist an dem Boden der unbeweglichen Flasche noch

eine kleine Rolle a, deren Ebene mit der Ebene der übrigen Rollen einen rechten Winkel bildet, angebracht. Ueber diese wird das Seil bis zur Mitte gezogen, und seine beiden Theile werden über die zwei mittlern Rollen der andern, dann über die zwei mittlern der ersten, ferner über die zwei folgenden der zweiten Flasche, u. s. w. durchgeführt, bis sie endlich über die zwei äußersten Rollen der unbeweglichen Flasche in gleicher Länge kommen. Es ist klar, daß in diesem Falle jede Flasche eine gleiche Anzahl Rollen, und sollte die unbewegliche Rolle an der beweglichen Flasche angebracht sein, die unbewegliche Flasche um zwei Rollen mehr als die bewegliche haben müsse. (Fig. 98).

§. 156. Wenn man bei dem Flaschenzuge mit parallelen Seilgängen die Reibung und die Steifigkeit des Seiles nicht in Erwägung zieht, so müssen im Zustande des Gleichgewichtes alle Seilgänge gleich stark gespannt sein, oder was dasselbe ist, die ganze Last muß auf diese gleichförmig vertheilt werden. Ist also n die Anzahl dieser Seilgänge und Q die Last, welche durch den Flaschenzug im Gleichgewichte erhalten wird, so ist $P = \frac{1}{n} Q$. Würde in diesem Falle die Kraft um n Schuh sinken, so müßte jeder dieser Seilgänge um 1 Schuh kürzer werden, also die Last sich um einen Schuh erheben; d. h. beim Flaschenzuge verhalten sich die von der Kraft und Last in derselben Zeit zurückgelegten Wege wie umgekehrt diese Kräfte für den Zustand des Gleichgewichtes, also findet auch bei dem Flaschenzuge das Carteſische Gesetz statt.

Wenn die Kraft auf derselben Seite wie die Last wirkt, so sind eben so viele Rollen als Seilgänge; sollte aber die Kraft aufwärts ziehen, wenn die Last abwärts drückt, so ist die Anzahl der Rollen um eine Einheit kleiner als die der Seilgänge. Die Formel

$$P = \frac{1}{n} Q$$

gilt, wenn das eine Ende des Seiles entweder an die bewegliche oder an die unbewegliche Flasche angehängt ist; sollte aber das Seil durch einen Ring bis zur Mitte durchgezogen sein und an beiden Enden die Kraft wirken, so ist

$$P = \frac{2}{n} Q.$$

§. 157. Bei dem Flaschenzuge ist das Hinderniß, welches durch die Reibung und Steifigkeit des Seiles hervorgebracht wird, so groß, daß es immer in Rechnung gezogen werden muß. Dies kann auf folgende Art geschehen.

Man setze der Kürze wegen den Ausdruck (§. 153)

$$\frac{a+ak'}{a-ak'}+\frac{c\delta^2}{a}=f.$$

Nun ist $\frac{1}{n}Q$ die Spannung des ersten Seiles, welches mit seinem Ende befestigt ist; wird es über die erste Rolle geführt, so ist $\frac{1}{n}fQ$ die Spannung des zweiten, $\frac{1}{n}f^2Q$ die des dritten, u. s. w. Ist nun m die Anzahl der Rollen, so wird für das letzte Seil, an welchem die Kraft angebracht ist,

$$V=\frac{1}{n}f^mQ.$$

In dieser Formel liegt die Voraussetzung, daß alle Rollen und Bolzen einander gleich sind. Ist dieses nicht, so wird man für die Ausübung hinlänglich genaue Resultate erhalten, wenn man sowohl von den Halbmessern der Rollen, als auch von denen der Bolzen das Mittel nimmt.

Ist nur an einem Ende des Seiles die Kraft angebracht, so ist in den meisten Fällen, wo nemlich Kraft und Last nach einerlei Richtung wirken, $n=m$; wird aber das Seil bis zur Mitte durchgezogen und mit beiden Enden durch die Rollen geführt; so ist für jedes Seilende $m=\frac{1}{2}n$ und für beide

$$V=\frac{2}{n}f^{\frac{n}{2}}Q.$$

Wäre keine Reibung vorhanden, so müßte durch Vermehrung der Rollen in den Flaschen eine jede noch so kleine Kraft eine jede, wie immer denkbar große Last überwinden. Aber durch die Reibung findet man bei jeder gegebenen Last eine Grenze für die Anzahl Rollen, so daß man, wenn diese überschritten wird, der Reibung wegen mehr verliert, als durch die Verminderung der Kraft, wenn keine Reibung stattfände, gewonnen würde. Diese Grenze kann auf folgende Art bestimmt werden.

Man nehme an, n bezeichne die größte Anzahl Rollen, so daß durch Vermehrung oder Verminderung derselben die zum Gleichgewichte erforderliche Kraft immer größer werden muß; dann wird sich letztere schon wenig ändern, wenn man eine Rolle mehr oder weniger nimmt.

Setzt man also

$$\frac{1}{n}f^nQ=\frac{1}{n+1}f^{h+1}.Q \text{ und}$$

$$\frac{1}{n} f^n Q = \frac{1}{n-1} f^{n-1} Q,$$

so folgt aus der ersten Gleichung $n = \frac{1}{f-1}$

und aus der zweiten $n = \frac{f}{f-1}$.

Von den auf diese Art bestimmten Werthen von n wird der eine etwas zu groß, der andere etwas zu klein sein; man nehme also von beiden das Mittel und setze $n = \frac{1}{2} \frac{f+1}{f-1}$.

Es sei z. B. $a = 3\frac{1}{2}''$, $\alpha = \frac{3}{8}''$, $k' = 0{\cdot}013$, $c = \frac{1}{2}$, $\delta = 1''$; so wird $f = 1{\cdot}146$, daraus folgt sehr nahe $n = 7$, d. h. bei den angenommenen Abmessungen der Rollen und Bolzen und der Dicke der Seile wird man bei dem Flaschenzuge für die bewegende Kraft immer verlieren, wenn man mehr als 7 Rollen annimmt. Ist die bewegende Kraft $V = 100$ Pf.; so ist $Q = 265$ Pf. für $n = 6$, für $n = 7$ ist $Q = 270$ Pf., für $n = 8$ wird $Q = 269$ Pf., für $n = 9$ wird $Q = 264$ Pf., u. s. w.

Man sieht also, daß man durch den Flaschenzug bei den angenommenen Abmessungen mit einer Kraft von 100 Pfunden nicht mehr als eine Last von 270 Pfunden überwältigen könne und daß es unvortheilhaft wäre, mehr als 7 Rollen anzunehmen.

Anmerkung. Einige Schriftsteller schlagen vor, um eine größere Kraft zu gewinnen, mehre Flaschenzüge mit einander zu verbinden; ob dadurch ein Vortheil erhalten würde, kann aus obiger Untersuchung beurtheilt werden. Man kann noch die Rollen auf andere Arten verbinden, da man aber dadurch die Last nur auf eine geringe Höhe heben kann, so werden diese ältern Anordnungen beinahe gar nicht angewendet.

Fünfter Abschnitt.

Das Wellrad.

§. 158. Die Welle ist ein Cylinder, der an seinen Enden mit kleinern Cylindern oder Zapfen versehen ist, welche sich in dazu bestimmten ausgehöhlten Löchern — Pfannen oder Pfannenlagern — herumdrehen. Hat die Welle eine beträchtliche Stärke, so nennt man sie gewöhnlich Wellbaum. Wenn die Welle nicht mit einem gezähnten Räderwerke verbunden ist; so wird das eine Ende eines Seiles an dieselbe befestigt, an dem andern hängt die Last; diese wird entweder einem bestimmten Orte näher gebracht oder von demselben entfernt, je nachdem durch das Umdrehen der Welle sich das Seil aufwindet oder von der Welle abwickelt. Die Kraft wird entweder an dem Umfange eines an der Welle befestigten Rades oder statt desselben auch an Speichen, die in der Welle befestigt sind oder endlich an einem Winkelhebel, welcher an dem Zapfen angesteckt ist, angebracht. Die ganze Maschine heißt ein Wellrad und wenn mit derselben eine Last mittels eines Seiles entweder emporgehoben oder herabgelassen wird, eine Winde. Die Welle der Winde kann entweder eine horizontale oder eine verticale Lage erhalten; in dem ersten Falle hat man eine liegende Winde oder einen Haspel, in dem andern aber eine stehende oder einen Göpel.

§. 159. Bei dem Wellrade (Fig. 99) wird wegen der Festigkeit der Materie die Wirkung der Kraft nicht geändert, wenn man sie in paralleler Richtung in gleichem Abstande AC = CA′ von der Welle wo immer anbringt. Da noch überdies der Schwerpunct der Welle in der Axe liegt, so kann man das Wellrad als einen mathematischen Hebel betrachten, bei dem CA und CB die Abstände der Kraft und Last von der Axe sind. Ist A der Abstand der Kraft, a jener der Last, so wird für den Zustand des

Gleichgewichtes, wenn die Reibung an den Zapfenlagern und die Steifigkeit des Seiles nicht berücksichtigt wird,

$$P:Q=a:A \quad \text{oder} \quad P=\frac{a}{A}\cdot Q.$$

Wenn das Seil, an welchem die Last hängt, sich auf der Welle aufwindet, so ist der Abstand der Last gleich dem um die halbe Dicke des Seils vergrößerten Halbmesser der Welle. Wirkt ferner auch die Kraft nach senkrechter Richtung, so muß sie sich während der Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser A drehen. Kraft und Last werden in gleichen Zeiten immer gleiche Winkel beschreiben; bezeichnet man die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege ihrer Angriffspuncte durch S und s; so ist

$$S:s=A:a=Q:P;$$

d. h. auch bei dem Wellrade gilt mit Rücksicht des zweiten Falles §. 120 das Carteſiſche Geſetz.

Bei dem Wellrade mit horizontaler Welle werden die Pfannen von den Zapfen mit einem Gewichte gedrückt, welches der Last, der zu dem Gleichgewichte erforderlichen Kraft und dem Gewichte des Wellrades entspricht. Dreht sich die Kraft in einem Kreise herum, so wird die zur Überwindung der Reibung und Last erforderliche Kraft, die wir V nennen wollen, in jeder Lage anders ausfallen müssen. Ist eine Lage festgesetzt, nemlich V in **A**, Q in **B**, wo also **CA** auf V und **CB** auf Q senkrecht ist und bezeichnet man durch φ, ψ die Winkel, welche V, Q mit der durch **C** gezogenen horizontalen Geraden **ED** einschließen und durch q das Gewicht des ganzen Wellrades, dessen Schwerpunct in der Axe **C** liegt; so braucht man zur Bestimmung von V aus §. 145 blos die Gl. (2) und (3), indem man in letzterer $b=0$ setzt, wonach also

$$(1)\quad \begin{cases} R=\sqrt{(V\cos\varphi+Q\cos\psi)^2+(V\sin\varphi+Q\sin\psi+q)^2} \\ VA=Qa+ak'R \end{cases}$$

ist. Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen erhält man für die gehörigen Werthe von φ und ψ jenen von V, der sich auch aus §. 146 unmittelbar ergibt. Als Beispiel hierüber wollen wir hier zugleich jene Fälle herausheben, wo V am größten oder kleinsten wird.

1. Wenn Q vertical abwärts und

a) V vertical abwärts wirkt (Fig. 99. a), ist $\varphi=\psi=90°$, also (§. 146. 1)

$R=V+Q+q$ und daher aus $VA=Qa+ak'(V+Q+q)$

$$\text{(a)} \qquad V = \frac{Q(a + ak') + ak'q}{A - ak'}.$$

Wirkt aber

b) V vertical aufwärts, (Fig. 99. b), wofür $\varphi = \psi = 90°$ ist, so hat man wegen §. 146. 3)

$R = Q + q - V$ oder $V - Q - q = R$. Da jedoch beim Wellrade, wo mit Vortheil der Kraft gewirkt werden soll, $V > Q + q$ nicht sein kann; so gilt nur der erste Werth von R und es ist sofort aus $VA = Qa + ak'(Q + q - V)$

$$\text{(b)} \qquad V = \frac{Q(a + ak') + ak'q}{A + ak'}.$$

Bezeichnet man die Ausdrücke (a) und (b) mit V_a und V_b und berücksichtigt, daß das Verhältniß $\frac{V_a - V_b}{V_a} = \frac{2ak'}{A + ak'}$ als ein sehr kleiner Bruch erscheint; so kann man bei vertical abwärts hängender Last und bei jeder Lage der Kraft V für letztere stets ihren größten Werth nach Gl. (a)

$$(2) \qquad V = \frac{Q(a + ak') + ak'q}{A - ak'}$$

annehmen.

2. Ist Q vertical aufwärts, was in Verbindung des Wellrades mit einem Flaschenzuge vorkommt und entweder

a) V vertical aufwärts (Fig. 99. c), also $\varphi = \psi = 90°$, so ist nach §. 146. 2) $R = V + Q - q$ und aus $VA = Qa + ak'(V + Q - q)$

$$\text{(c)} \qquad V = \frac{Q(a + ak') - ak'q}{A - ak'},$$

oder

b) V vertical abwärts (Fig. 99. d), mithin $\varphi = \psi = 90°$, so wird vermöge §. 146. 4) $R = Q - q - V$ und aus $VA = Qa + ak'(Q - q - V)$

$$\text{(d)} \qquad V = \frac{Q(a + ak') - ak'q}{A + ak'}.$$

Da auch hier $\frac{V_c - V_d}{V_c} = \frac{2ak'}{A + ak'}$ sehr klein ausfällt, so kann man bei vertical aufwärts wirkender Last in jeder Lage der Kraft für selbe den größten Werth aus der Gl. (c), nemlich aus

$$(3) \qquad V = \frac{Q(a + ak') - ak'q}{A - ak'}$$

berechnen.

Bei dem horizontalen Wellrade, dessen Welle vertical ist, entstehen zwei Reibungen; die eine, durch den Druck der Kraft und Last seitwärts des Zapfens verursacht, worauf das Gewicht des Wellrades keinen Einfluß hat, daher in den Gl. (2) und (3) $q = 0$ wird, ist

$$V = \frac{Q(a + ak')}{A - ak'}.$$

Die zweite Reibung ist auf der Grundfläche des aufruhenden Zapfens gleichförmig vertheilt. Da der Schwerpunct eines sehr kleinen Kreisausschnittes nach §. 92. V um zwei Drittheile des Halbmessers vom Mittelpuncte entfernt ist; so kann man sich mit dieser Eröffnung einen concentrischen Kreis beschrieben vorstellen, auf dessen Umfange sich die Reibung vereinigt. Nach dieser Vorstellung widersteht der Bewegung die Last q mit dem Hebelsarme $\frac{2}{3}a$ und es ist

$$p = \tfrac{2}{3}\frac{akq}{A}.$$

Man hat demnach bei verticaler Welle die Kraft

$$(4) \qquad V = \frac{Q(a + ak')}{A - ak'} + \tfrac{2}{3}\frac{akq}{A},$$

wo k der Coefficient der gleitenden Reibung ist.

Um die Steifigkeit des Seiles beim Wellrade auch mit in Erwägung zu ziehen, darf man nur das zur Biegung erforderliche Gewicht zur Last hinzuschlagen und dann die zum Gleichgewichte gehörige Kraft bestimmen. Man muß nemlich in den Gl. (1) bis (4) an die Stelle von Q den Ausdruck $Q(1 + c\frac{\delta^2}{a})$ setzen, indem $c\frac{\delta^2}{a}Q$ die Steifigkeit des Seiles am Umfange der Welle und δ den Durchmesser des Seiles bedeutet.

Die Reibungen werden desto kleiner, je kleiner der Halbmesser des Zapfens ist und würden ganz verschwinden, wenn der Zapfen keine Dicke hätte. Je stärker die Welle ist, desto größer wird ihr Gewicht q und sofort auch die dadurch entstehende Reibung. Man muß also die Dicke der Welle und der Zapfen so klein machen, daß die Welle durch die Last noch nicht gebogen oder die Zapfen abgebrochen werden.

§. 160. Das Wellrad ist für die ausübende Mechanik besonders wichtig. Man bedient sich desselben bei allen Mühlen und in den meisten Fällen, wo Lasten in die Höhe zu heben, in die Tiefe niederzulassen oder auch nur weiter fortzubringen sind. Sehr oft wird das Wellrad mit an-

dern einfachen Maschinen verbunden, um eine größere Wirkung hervorzubringen.

Bei dem einfachen Wellrade kann, wie schon im §. 159 erwähnt worden ist, die Welle eine horizontale oder eine verticale Lage erhalten. Nach der Verschiedenheit der Art, als die bewegende Kraft in beiden Gattungen angebracht wird, erhält auch das Wellrad verschiedene Benennungen. Zu dem Wellrade mit horizontaler Welle kann man füglich folgende Gattungen zählen: den Kreuzhaspel, den Hornhaspel oder die Kurbel, den Radhaspel, das Laufrad und das verticale Tretrad, das verticale Wasserrad und die verticalen Windflügel. Zu dem Wellrade mit verticaler Welle gehören: der gemeine Göpel, die Erdwinde, das horizontale Wasserrad, die horizontalen Windflügel und die Tretscheibe.

1) Bei dem Kreuzhaspel (Fig. 100) sind die Hebbäume oder Speichen **ab**, **cd** unter rechten Winkeln durch die Welle **AB** gesteckt. In diesem Falle ist es vortheilhaft, die Welle an den beiden Enden mit eisernen Ringen zu belegen. Meist sind zwei Kreuze angebracht, zwischen welchen sich das Seil aufwindet; oft endigen sich die Zapfen in vier- oder dreiseitigen Prismen, an welche dann die Kreuze angesteckt werden; manchmal wird bei nicht gar zu großen Lasten auch nur ein einziger Hebel angebracht. Zur Verminderung der Reibung kann der Wellbaum eiserne Zapfen erhalten, welche in messingenen Pfannen laufen. Vortheilhaft ist es, dem Wellbaume eine solche Länge zu geben, daß sich das Seil nicht überwickeln darf.

Da die Arbeiter die Speichen ergreifen und dann wieder auslassen, um andere zu fassen, so kann die bewegende Kraft nur sprungweise wirken. Der Kreuzhaspel kann also nur da angewendet werden, wo es auf eine ununterbrochen gleichförmige Bewegung nicht ankommt; z. B. um Lasten aus der Tiefe zu erheben, u. s. w. Um alles Unglück wegen des Zurücksinkens der Last zu vermeiden und die entgegengesetzte Bewegung zu verhindern, muß man wenigstens auf der einen Seite der Welle ein Sperr-Rad mit einem Einfallhaken anbringen.

Das Artilleriehebzeug ist eine aus dem Kreuzhaspel und dem Flaschenzuge zusammengesetzte Maschine, deren Einrichtung in Folgendem besteht. Vier Stützen werden an ihrem Ende mittels eines eisernen Bolzens so verbunden, daß sie, wenn sie aufgerichtet werden, eine vierseitige Pyramide bilden. Die Zwischenweite derselben muß so groß sein, daß die Transportier-Protze mit dem Geschützrohre und auch die Laffete oder ein anderes Fuhrwerk bequem dazwischen fahren könne. Die Welle wird dann in die Pfannen eingelegt; die Zapfen erhalten beider-

seits einen dreikantigen Vorsprung, um Kreuze anstecken zu können. Das Ganze läßt sich sehr leicht zerlegen und von einem Orte zum andern bringen. Jede Flasche hat vier Rollen, welche sich um einen und denselben Bolzen drehen. An dem untern Boden der unbeweglichen Flasche befindet sich nach der Quere eine kleine unbewegliche Rolle, durch welche das Seil bis zur Mitte durchgezogen und mit beiden Enden über die Rollen der Flaschenzüge geführt wird. Diese Enden werden dann an der Welle in die dazu bestimmten Haken eingehängt, so daß bei der Umdrehung der Welle beide Theile des Seiles entweder auf- oder abgewickelt werden. Damit das Wellrad nicht zurückgehen, also in jeder Lage die Last für sich erhalten werden könne, ist an beiden Enden der Welle eine Sperrscheibe mit einem Sperr- oder Einfallhaken angebracht. Man bedient sich dieses Hebzeuges, um die größern Kanonenröhre aus den Laffeten zu heben und auf Wägen zu bringen oder umgekehrt.

Man kann den Halbmesser der Rolle bis zur Mitte des Seiles $= 3\frac{1}{2}''$, den des Bolzens $= \frac{3}{8}''$, die Dicke des Seiles $= 1''$, $k' = 0{\cdot}013$ und $c = \frac{1}{2}$ setzen. Nun ist, wenn man diese Werthe in der Formel

$$f = \frac{a + ak'}{a - ak'} + \frac{c\delta^2}{a}$$

substituirt, $f = 1{\cdot}146$ und nach der Formel $V' = \frac{1}{4} f^4 Q$ die Kraft, welche unmittelbar an dem Flaschenzuge angebracht werden müßte, $= 0{\cdot}4312.Q$.

Ist ferner der Hebelsarm der Kraft $= 30''$, der Halbmesser der Welle mit der halben Dicke des Seiles $= 4''$, der Halbmesser des Zapfens $= 3''$, das Gewicht der Welle und der beiden Kreuze $= 120$ Pfden; so ist, weil die Kraft für den Flaschenzug die Last für den Kreuzhaspel ist, nach der im §. 159 aufgestellten Formel

$$V = \frac{(a + ak')\, V' - ak'q}{A - ak'}, \text{ wenn man } k' = \tfrac{1}{3} \text{ setzt,}$$

$$V = 0{\cdot}0744\, Q - 4{\cdot}1379.$$

Wenn man die Reibung nicht in Erwägung zieht; so ist

$$V' = \tfrac{1}{4} Q \text{ und } V = \frac{Q}{30} = 0{\cdot}03333.Q.$$

Ist z. B. $Q = 6000$ Pfunden, so ist zum Gleichgewichte für die Last nach Überwindung der Reibung und Steifigkeit des Seiles eine Kraft von 442 Pfden erforderlich; mit Vernachlässigung der Reibung wäre diese Kraft $= 200$ Pf.; also wird in diesem Falle ein Theil der Kraft von 242 Pf. zur Überwindung der Reibung erfordert, nemlich eine grö-

ßere Kraft, als zur Überwindung der Last angewendet werden muß. Aus diesem Beispiele ist zu ersehen, daß man bei einer Maschine, besonders wenn sie mit einem Flaschenzuge versehen ist, die Reibung immer in Erwägung ziehen müsse.

Wenn man der Welle von der Mitte an eine ungleiche Stärke gibt und die Ende des Seiles entgegengesetzt aufwickelt; so windet sich bei der Bewegung der Welle das eine Ende des Seiles auf, indem sich das andere abwickelt. Geschieht das Aufwickeln auf dem dickern Theile, so wird die bewegliche Flasche, folglich auch die Last in die Höhe gehoben; bei der entgegengesetzten Drehung erfolgt das Umgekehrte. Da beide Seilgänge die Welle auf entgegengesetzte Seiten zu drehen streben, so wirkt beim Erheben der Last das um den dünnern Theil der Welle gespannte Seil zum Vortheile der Kraft. Um aber die Bewegung der Last mehr zu beschleunigen, kann man die Anzahl der Rollen vermindern. Für den einfachsten Fall geht die bewegliche Flasche in eine Zugrolle über und die unbewegliche Flasche erhält zwei Rollen, über welche die beiden Theile des Seiles geführt werden, die sich dann auf der Welle auf- oder abwinden. Da der Unterschied der Dicke der Welle auf beiden Seiten nicht beträchtlich sein kann, so wird wesentlich deswegen, wie auch mit Beihilfe der Reibung an den Zapfen und der Steifigkeit des Seiles die Last durch eine geringe Kraft gegen ihr Sinken zurückgehalten, daher hier ein Sperr-Rad mit einem Haken überflüssig ist. Die Gestalt dieses Hebzeuges ist aus (Fig. 101) deutlich zu ersehen.

Zur Übersicht für die Bestimmung der Kraft bei diesem Hebzeuge dient Fig. 101. a. Hier seien r, r_1 die beiden festen und r_2 die Zugrolle. Ist a der Halbmesser dieser Rollen, α der ihrer Bolzen und δ die Dicke des Seiles; so hat man

$$f = \frac{a + \alpha k'}{a - \alpha k'} + c \cdot \frac{\delta^2}{a};$$

ferner sei **W** der dickere und w der dünnere Theil der Welle, q ihr Gewicht und Q die Last sammt dem Gewichte der Zugrolle.

Ist V die Kraft, welche mit der Last und allen Widerständen am Flaschenzuge im Gleichgewichte sein soll, also V die Spannung des Seilganges 3, welche auf den dickern Theil der Welle wirkt und ist V_1 die auf den dünnern Theil der Welle wirkende Spannung, so muß V_1 von V mittels der drei Rollen überwunden werden und man hat sonach

$$V = V_1 \cdot f^3.$$

Ferner wird jeder Seilgang 1 und 2 durch $\frac{1}{2}Q$ gespannt und da der Seilgang 1 die Spannung V_1 überwinden muß, um auf die Welle w zu wirken, so ist

$$\tfrac{1}{2}Q = V_1 f, \quad \text{folglich}$$

$$V_1 = \frac{\frac{1}{2}Q}{f} \text{ und sofort } V = \tfrac{1}{2}Q \cdot f^2.$$

Bezeichnet nun U die Kraft, welche mit dem Hebelsarme A an der Welle Gleichgewicht halten soll, und R den Druck auf dieselbe, so ist offenbar

$$R = \pm U + V + V_1 - q,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, wenn U wie in A auf- oder wie in A′ abwärts wirkt.

Es ist sonach $\alpha R k'$ das Moment der Reibung am Zapfen der Welle, daher, wenn b den Halbmesser des dünnern und mb jenen des dickern Wellentheiles bezeichnet,

$$AU + bV_1 = mbV + \alpha k' R.$$

Substituirt man hier zuerst für R, dann für V und V_1 die Werthe, so folgt aus dieser Gleichung

$$(1)\ U = \frac{\frac{1}{2}Q\left[(mb + \alpha k')\, f^2 - \frac{b - \alpha k'}{f}\right] - \alpha k' q}{A \mp \alpha k'},$$

wobei das obere oder untere Zeichen, je nachdem U auf- oder abwärts wirkt.

Bezeichnet aber U_1 die Kraft, welche die Last Q gegen das Sinken zurückhält, so braucht man blos in (1) $-\alpha k'$ statt $\alpha k'$ zu setzen und man hat

$$(2)\ U_1 = \frac{\frac{1}{2}Q\left[(mb - \alpha k')\, f^2 - \frac{b + \alpha k'}{f}\right] + \alpha k' q}{A \mp \alpha k'}.$$

Soll nun diese zurückhaltende Kraft U_1 ein $n$ter Theil von U sein und setzt man in (2) zuerst $\frac{U}{n}$ statt U_1, sodann den Ausdruck (1) für U, so erhält man aus der dadurch gebildeten Gleichung

$$(3)\ m = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\alpha k'}{b} \left(1 + \frac{1}{f^3} - \frac{q}{\frac{1}{2}Qf^2}\right) + \frac{1}{f^3}$$

und für diesen Werth übergeht dann die Formel (1) in

$$(4)\ U = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\alpha k'\left[Q\left(f^2 + \frac{1}{f}\right) - 2q\right]}{A \mp \alpha k'}.$$

Man sieht hieraus, daß mit der Zunahme von n sowohl m als U abnehmen.

Nimmt man dieselben Zahlenwerthe wie bei dem gewöhnlichen Hebzeuge an, nemlich $f = 1{\cdot}146$, $A = 30''$, $b = 4''$, $\alpha = 3''$, $k' = \frac{1}{3}$, $q = 120$ Pf. und $Q = 6000$ Pf., so hat man für $n = 10$ $m = 1{\cdot}164$ oder nahe $\frac{7}{6}$, daher aus (1) oder (4) $U = 493$ Pf., sofort $U_1 = 49$ Pf.

Für $n = \infty$, also $U_1 = 0$, wo die Last sich selbst im Gleichgewichte erhält, hat man $\frac{n+1}{n-1}$ und $\frac{n}{n-1}$ gleich 1, $m = \frac{59}{55}$, $U = 444$ Pf. wie bei dem gewöhnlichen Hebzeuge.

Der Vortheil des Hebzeuges mit ungleicher Wellendicke besteht sonach einzig darin, daß man wenig oder gar keiner Rückhaltkraft gegen das Sinken der Last bedarf, jedoch ist die Kraft für das Erheben der Last meist größer als die bei dem gewöhnlichen Hebzeuge; auch steigt bei jenem die Last langsamer. Denn bei dem Hebzeuge, dessen Welle ungleiche Dicke hat, wird bei einer Umdrehung derselben das Seil um $2mb\pi - 2b\pi$ verkürzt, mithin steigt der Zugrolle wegen die Last um die Hälfte dieser Verkürzung, nemlich um $(m-1)b\pi$, dagegen bei dem gewöhnlichen Hebzeuge durch eine Umdrehung der Welle jeder Seilgang um $2b\pi$ verkürzt wird, und da derselbe über 4 Rollen geht, so steigt die Last um $\frac{2b\pi}{4} = \frac{1}{2}b\pi$. Demnach verhält sich für eine gleiche Anzahl von Umdrehungen der Welle bei beiden Hebzeugen das Steigen der Last bei dem gewöhnlichen und dem andern wie $\frac{1}{2} : (m-1)$, sofort nach unserm ersten Beispiele wie 3 : 1 und nach dem zweiten wie 55 : 8.

2) Wenn an dem horizontalen Wellrade ein Winkelhebel angesteckt wird, um dadurch mittels der Hand des Arbeiters das Rad zu bewegen; so wird das Wellrad ein Hornhaspel, der angesteckte Winkelhebel aber eine Kurbel oder auch bei größern Maschinen ein Krummzapfen genannt. Die Kurbel wird entweder an dem einen Zapfen oder bei beträchtlichen Lasten, um mehr Arbeiter anstellen zu können, an jedem Zapfen angebracht. Oft wird, wenn das Wellrad durch eine andere Kraft, z. B. durch Wasser, in Bewegung gesetzt wird, die Kurbel mit einem Stangenwerke verbunden, um dadurch eine bestimmte Wirkung hervorzubringen. Der Theil bc (Fig. 102) der Kurbel, welcher den Hebelsarm der Kraft bestimmt, heißt der Kurbelbug, der andere Theil ab aber, welchen die Hand des Arbeiters ergreift, wird der Kurbelgriff ge-

nannt. Der Kurbelbug wird zuweilen nach einem Kreisbogen gekrümmt, jedoch ohne allen Vortheil vor dem geraden Buge, wenn er eine gleiche Weite hat. Bei der Kurbel wirkt die bewegende Kraft sehr ungleich, beim Niederdrücken kann der Arbeiter mit seinem Gewichte auf die Kurbel wirken. Am vortheilhaftesten wird die Lage, wenn der Kurbelgriff in den Horizont des Zapfens kommt; von da wird die Bewegung schon etwas beschwerlicher, besonders wenn der Kurbelgriff wieder erhoben werden soll. Bei zwei Kurbeln wird meist, wenn die eine in der verticalen Lage aufwärts steht, die andere in dieser Lage herabhängen; vortheilhafter aber ist es, wenn man sie so anbringt, daß sich die Ebenen derselben rechtwinklig schneiden.

3) Wenn an der Welle ein Rad befestigt ist, an dessen Umfange die Arbeiter entweder mittels eines eingelegten Seiles ohne Ende, einer Kette oder an eingesetzten Zapfen (Spillen) wirken, so ist das Wellrad ein Radhaspel. Damit das Seil durch die Reibung das Rad umdrehen kann, muß es sich zwischen eisernen Gabeln fest einklemmen, wie man aus Fig. 103 erkennt. Bei angebrachten Spillen ergreifen die Arbeiter eine um die andere. In beiden Fällen können diese fast mit dem ganzen Gewichte des Körpers wirken; die Bewegung geschieht zwar ungleichförmig, doch wird dieser Radhaspel auch nur da angewendet, wo es auf keine gleichförmige Bewegung ankommt.

4) Das Laufrad hat zwei Kränze oder Ringe, welche am äußern Umfange mit Bretern verschlagen werden; auf letzteren sind von innen Leisten befestigt, welche als Stufen dienen. Das Laufrad wird entweder von Menschen oder Thieren in Bewegung gesetzt. Die Anwendung desselben findet man bei einigen Mühlen, beim Erheben von Lasten, bei Kranigen, u. s. w.

5) Bei dem verticalen Tretrade sind die Leisten oder Stufen am äußern Umfange des Rades angebracht; zu der Bewegung desselben werden gleichfalls Menschen oder Thiere von einem beträchtlichen Gewichte verwendet. Für Menschen muß eine auf einem Gerüste befestigte Stange über die Breite des Rades geführt werden, wie aus Fig. 104 zu ersehen ist. An diese hält sich der Arbeiter mit den Händen fest, indem er auf die Stufe a tritt. Da diese abwärts sinkt, so tritt er auf die nächstfolgende Stufe b, u. s. w., so daß er bei dem fortgesetzten Steigen seine Stelle nicht ändert.

6) Das verticale Wasserrad, welches sich in einer verticalen Ebene herumdreht, wird durch den Stoß oder durch den Fall

und Druck des Wassers in Bewegung gesetzt; es wird bei den meisten Mühlen und bei vielen andern technischen Maschinen angewendet. Die verticalen Wasserräder sind entweder oberschlächtig oder unterschlächtig, je nachdem das Wasser von einer Höhe auf das Rad herunterstürzt oder nur mit der Geschwindigkeit des Laufes unten an die angebrachten Flächen anstößt. Das oberschlächtige Wasserrad wird bei wenigem Wasser angewendet, wenn man ein hohes Gefälle erhalten kann. Um nebst dem Stoße auch noch durch das Gewicht des Wassers an der bewegenden Kraft zu gewinnen, werden an dem Umfange des Rades mehre Behältnisse (Zellen) angebracht, in welchen das herabfallende Wasser aufgefangen und dann bei der Umdrehung des Rades wieder unten ausgegossen wird, so daß die Zellen leer in die Höhe steigen. Dadurch entsteht auf der einen Seite ein größeres Gewicht als auf der andern und das Rad muß sich herumdrehen. Die Zellen müssen so eingerichtet sein, daß sie bei der bestehenden Geschwindigkeit des Rades gerade vollgefüllt werden können.

Bei dem unterschlächtigen Wasserrade stößt das Wasser an eingesetzte vierseitige Brettchen (Schaufeln); diese sind entweder an einem einzigen Ringe oder Kranze angebracht, dann heißt es ein Strauberrad oder die Schaufeln sind zwischen zwei Ringen eingesetzt, wenn sie breiter sein müssen, welches bei großen Flüssen mit einem geringen Gefälle erfordert wird; dann nennt man es ein Staberrad. Die Breite desselben muß wenigstens 3 Schuh betragen. Hat das Rad eine beträchtliche Größe und sind die Schaufeln zwischen den zwei Ringen wenigstens 6 Schuh lang, so heißt es ein Pansterrad. Der Überfluß des Wassers muß unterhalb des Rades Raum genug haben, um sich verlaufen zu können, weil sonst das Wasser gegen die Schaufeln zurücktritt, und dadurch die Bewegung des Rades hemmt. In diesem Falle erhält die Welle eine bewegliche Unterlage, welche nach der verschiedenen Höhe des Wassers mit der Welle und dem übrigen Räderwerke in die Höhe gewunden oder herabgelassen werden kann; das Rad wird dann ein Ziehpansterr genannt. Schiffmühlenräder sind beträchtlich breiter, als die Pansterräder; in diesem Falle werden die Schaufeln in 4 Ringen eingesetzt, um der daranstoßenden beträchtlich großen Wassermenge gehörig widerstehen zu können. Die Zwischenweite der beiden äußersten Ringe, über welche die Schaufeln noch um einen Schuh hervorreichen, beträgt bei den Schiffmühlen in der Gegend von Wien gegen 20 Schuh.

7) Damit sich bei der Windmühle die Welle durch den Stoß des Windes in Bewegung setze, kann die Einrichtung auf folgende Art geschehen. Zwei

Bäume (Windruthen), welche eine Länge von 30 bis 40 Schuh haben, werden durch den vordern Kopf der Welle so gesteckt, daß sie senkrecht auf der Axe stehen und unter sich rechte Winkel bilden. An diesen werden in der Entfernung von $1\frac{1}{3}$ bis 2 Schuh Sprossen angebracht und zu beiden Seiten derselben Latten befestigt, die mit Segeltuch bekleidet oder mit dünnen Brettern zugedeckt werden. Der ganze hervorragende Theil auf einer Seite heißt ein Windflügel. Damit der Wind seitwärts durchstreichen könne, muß die Fläche der Flügel gegen die Axe der Welle unter einem Winkel von 70° bis 75° geneigt sein. Da der Wind nicht immer in gleicher Stärke wirkt, so werden die Windflügel mit Thüren versehen, um diese nach Erforderniß öffnen und dadurch die Wirkung des Windes vermindern zu können. Um die Windflügel der Richtung des Windes entgegenzusetzen, kann die Mühle so eingerichtet werden, daß sie sich mit den Windflügeln um eine verticale Welle herumzudrehen vermag, wobei die Bewegung mittels eines langen Hebels bewirkt wird, oder es wird nur das Dach der Mühle mit den Windflügeln herumgedreht. Die Mühlen ersterer Art werden Bockmühlen oder auch deutsche Windmühlen, die andern holländische genannt. Es gibt auch Windmühlen, welche sich von selbst nach dem Winde drehen und auch mittels eines eigenen Maschinenwerkes bei gänzlicher Windstille gebraucht werden können.

8) Der gemeine Göpel (**Fig. 105**) wird meist an Baustellen zum Hinaufschaffen der Balken und anderer Baumaterialien verwendet. Zwischen einem Gerüste bewegt sich die verticale Welle, indem die Arbeiter an die durchgesteckten Zug- oder Schiebstangen drücken. Auf dem obern Theile der Welle windet sich das Seil auf, welches über eine an dem Gerüste angebrachte Rolle geführt wird und dann gerade herabhängt, wenn der Göpel oben steht oder über eine zweite, oben befestigte Rolle läuft, wenn die Last in die Höhe gezogen wird, der Göpel aber unten aufgerichtet ist; soll endlich die Last horizontal fortgezogen werden, so muß man noch an dem Gerüste eine zweite Rolle etwas tiefer anbringen. Um eine größere Wirkung zu erreichen, werden an einem durch die Welle gesteckten Baume, welchen man den Schwengel nennt, Pferde gespannt, welche in einem Kreise herumgehen. In diesem Falle wird der Göpel ein Pferdegöpel oder wegen des häufigen Gebrauches in Bergwerken ein Bergwerksgöpel genannt.

9) Die Erdwinde (**Fig. 106**) ist von dem gemeinen Göpel wesentlich darin unterschieden, daß die Welle beträchtlich kleiner ist

und das Seil sich unterhalb der Schiebstangen aufwindet. Das eine Ende des Seiles wird, nachdem es einigemal aufgewickelt worden ist, von einem oder mehren Menschen angezogen, weil es sich bei der Bewegung in dem Verhältnisse, als es auf der Seite der Last sich aufwindet, auf der andern wieder abwickelt. Oft ist die Welle der Erdwinde horizontal und wird dann durch wechselweise eingesteckte Hebbäume gedreht.

10) Bei dem horizontalen Wasserade, dessen Welle sich vertical herumbewegt, sind an dem äußern Rande Schaufeln angebracht, welche mit der Ebene des Rades einen schiefen Winkel einschließen. Das Wasser, welches durch ein Gerinne, am besten durch eine cylindrische Röhre geleitet wird, fällt von der Höhe auf die Schaufeln herab, welche, um dem Stosse auszuweichen, sich mit dem Rade herumdrehen müssen.

11) Die horizontalen Windflügel werden nicht so häufig wie die verticalen angewendet. Mehre Ruthen werden durch den Kopf der verticalen Welle gesteckt und enthalten an ihren Enden die eigentlichen Windflügel. Diese sind mit Thüren versehen, welche sich alle nach einer Seite zu von selbst öffnen, und als Ventilen dienen. Der Wind mag von was immer für einer Seite kommen, so werden einige Thüren angedrückt, die entgegengesetzten aber geöffnet, so daß durch diese Öffnungen der Wind durchstreichen kann. Durch den Stoß auf die zugedrückten Thüren wird die Welle herumgedreht.

12) Die Einrichtung der Tretscheibe zeigt die Fig. 107.

Sechster Abschnitt.

Das gezähnte Rad mit dem Getriebe und die Seilräder.

§. 161. Obgleich zwei Räder, die sich gegenseitig umdrehen, von denen also jedes eine eigene Axe hat, keine einfache Maschine vorstellen; so machen sie doch, vereint betrachtet, einen Bestandtheil einer mehr zusammengesetzten Maschine aus und werden also deswegen gewöhnlich mit den einfachen Maschinen abgehandelt.

I. Das Rad mit dem Getriebe.

§. 162. Wenn auf dem Umfange zweier Wellräder (Fig. 108) in gleichen Abständen Einschnitte gemacht oder Zapfen eingesetzt werden, daß die Hervorragungen des einen in die Vertiefungen des andern Rades oder in die Zapfen desselben eingreifen und sich dadurch wechselweise umdrehen; so nennt man diese beiden Wellräder das gezähnte Rad mit seinem Getriebe. Die Hervorragungen oder eingesetzten Zapfen werden Zähne oder auch im letztern Falle Kämme genannt. Befinden sich die Zähne in der fortgesetzten Ebene des Rades, so hat man ein Sternrad (Stirnrad); sind aber die Zähne oder Kämme auf der Ebene des Rades senkrecht angebracht (Fig. 109), so wird es ein Kammrad (Kronrad) genannt. Von den beiden in einander greifenden Rädern heißt das kleinere das Getriebe. Hat das Rad nicht die Gestalt eines Cylinders, sondern die eines geraden Kegels, nach dessen Seiten die Zähne eingeschnitten sind, so heißt es ein conisches Rad (Fig. 110) und es ist klar, daß in dasselbe auch nur ein conisches Getriebe einzugreifen ver-

mag. Bei mehren Rädern ist an der Axe des Rades wieder ein neues Getriebe angebracht, welches mit der Axe ein Ganzes bildet. Besteht das Getriebe aus zwei parallelen Scheiben, zwischen welchen Stäbe eingesetzt sind, welche statt der Zähne dienen (Fig. 109), so heißt das Getriebe ein Trilling; sind aber an der Welle selbst zur Axe parallele Vertiefungen eingeschnitten, so wird das Getriebe insbesondere ein Kumpf genannt. Die Zähne des Getriebes, die Stäbe des Trillings und die Hervorragungen des Kumpfes nennt man Triebstecken.

Anmerkung. Wie man sieht, sind beim Sternrade die Axen des Rades und Getriebes zu einander parallel, beim Kronrade auf einander senkrecht und schneiden sich beim conischen Rade unter dem Winkel, den die Axen der Kegel bilden. Demnach kann man nach der einen oder andern Anordnung von der parallelen Axendrehung zu jeder andern unter beliebigem Winkel der sich drehenden Axen übergehen.

§. 163. Da bei der Bewegung die Triebstecken wechselweise in die Zwischenweiten der Zähne eingreifen und einander auslösen, so müssen, damit keine Stockung im Ganzen geschieht,

1) alle Zähne oder Triebstecken und die Zwischenweiten im Rade oder im Getriebe einander gleich sein.

2) Die Zwischenweiten im Rade und im Getriebe müssen etwas größer angenommen werden, als die Dicke der Triebstecken und die der Zähne beträgt.

3) Die Dicke der Zähne und Triebstecken, dann die Zwischenweiten derselben müssen aber so proportionirt sein, daß ein folgender Zahn oder Triebstecken schon früher in Berührung komme, als der vorhergehende ausgelassen wird, damit nicht die Last beim Auslassen zurücksinke.

4) Die Dicke der Zähne und Triebstecken muß so groß sein, daß sie in Hinsicht auf die zu überwindende Last nicht abgebrochen werden; daher ist es auch nachtheilig, den Zähnen eine größere Länge zu geben, als es zum Eingreifen nothwendig ist. Die Triebstecken, welche ihrer geringern Anzahl wegen öfters eingreifen, also dem Abnützen mehr unterworfen sind, müssen eine größere Stärke als die Zähne des Rades erhalten. Aus dieser Ursache werden selbst bei hölzernen Rädern eiserne, bei messingenen aber stählene Getriebe angebracht.

5) Endlich muß die Dicke eines Zahnes sammt der Zwischenweite zweier Zähne genau so groß sein als die Dicke des Triebsteckens sammt der Zwischenweite am eingreifenden Getriebe, d. h. die Abstände der Mitte der Zähne müssen eben so groß sein als die Abstände der Mitte der Triebstecken. Ist A der Halbmesser des Rades, N die Anzahl der Zähne,

a der Halbmesser des Getriebes und n die Anzahl der Triebstecken; so ist $\frac{2A\pi}{N}$ die Entfernung der Mitte zweier auf einander folgender Zähne und $\frac{2a\pi}{n}$ die Entfernung der Mitte zweier auf einander folgender Triebstecken, folglich

$$\frac{2A\pi}{N} = \frac{2a\pi}{n} \text{ oder } \frac{A}{a} = \frac{N}{n} \text{ oder}$$

$$A : a = N : n;$$

d. h. bei einem Rade und dem eingreifenden Getriebe müssen die Halbmesser derselben mit der Anzahl der Zähne und Triebstecken in Proportion stehen. Wenn daher drei von diesen vier Stücken gegeben sind, so kann man das vierte bestimmen. Dabei ist zu bemerken, daß die Halbmesser der Räder und der eingreifenden Getriebe von der Axe an bis zu den Eingreifungspuncten gerechnet werden, nemlich bis zu den Puncten, wo die Abrundungen an den Zähnen der Triebstecken anfangen. Je größer die Anzahl der Triebstecken im Getriebe ist, desto gleichförmiger ist der Gang des Räderwerkes. Man nimmt nie weniger als 4, meist aber nicht weniger als 6 Triebstecken zum Getriebe.

Ist die Entfernung b beider Axen, die Anzahl N der Zähne des Rades und die Anzahl n der Triebstecken im Getriebe gegeben, so kann man die beiden Halbmesser A und a bestimmen.

Es ist nemlich, weil

$A + a = b$ und $A : a = N : n$ sein muß,

$(b - a) : a = N : n$ und

$(b - A) : A = n : N$, woraus

$$a = \frac{b.n}{N+n} \text{ und } A = \frac{b.N}{N+n}$$

folgt.

Manchmal liegt das Getriebe innerhalb des ergriffenen Rades, in welchem Falle

$A - a = b$, nemlich $A = b + a$ und $a = A - b$

ist; werden diese Werthe in der oben aufgestellten Proportion

$A : a = N : n$ substituirt; so erhält man

$$a = \frac{b.n}{N-n} \text{ und } A = \frac{b.N}{N-n}.$$

§. 164. Wirkt bei einer Welle mittels einer Kurbel oder eines angesteckten Hebels von der Länge B eine Kraft P in dem Umfange eines Kreises, welchen der ergriffene Punct beschreibt; ist an der Axe dieser Welle das erste Getriebe angebracht, welches in ein Rad eingreift, an der Axe dieses Rades ein zweites Getriebe befestigt, welches wieder in ein anderes Rad eingreift, u. s. w., und windet sich an der Welle des letzten Rades ein Seil auf, an welchem die Last Q hängt; so kann, wenn die Halbmesser der Getriebe und Räder gegeben sind, das Verhältniß der Kraft zur Last im Zustande des Gleichgewichtes, wenn die Reibung außer Acht gelassen wird, sehr leicht gefunden werden.

Man bezeichne den Halbmesser der Welle des letzten Rades durch b, die Halbmesser der auf einander folgenden Getriebe durch

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots . r_n,$$

die Halbmesser der von diesen Getrieben ergriffenen Räder durch

$$R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots . R_n.$$

Das Räderwerk ist aus $n+1$ einfachen Maschinen zusammengesetzt, die so innig mit einander verbunden sind, daß der ergriffene Punct der vorhergehenden Maschine zugleich auch der angreifende für die folgende ist und jede dieser einfachen Maschinen kann als ein Wellrad angesehen werden. Nun ist nach §. 159 $r_1 : B$ das Verhältniß der Kraft und Last im Zustande des Gleichgewichtes, wenn die Reibung beseitigt wird, bei der ersten Maschine, $r_2 : R_1$ bei der zweiten, $r_3 : R_2$ bei der dritten, u. s. w., $r_n : R_{n-1}$ bei der vorletzten und $b : R_n$ bei der letzten, folglich ist nach §. 125

$$P = \frac{r_1 . r_2 . r_3 . r_4 . \ldots . r_n}{R_1 . R_2 . R_3 . R_4 . \ldots . R_n} \cdot \frac{b}{B} \cdot Q.$$

Bezeichnet man die Anzahl der Triebstecken in jedem auf einander folgenden Getriebe mit $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ und die der Zähne in den von den Getrieben ergriffenen Rädern mit $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$; so ist wegen §. 163

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{a_1}{A_1}; \quad \frac{r_2}{R_2} = \frac{a_2}{A_2} = \ldots . \quad \frac{r_n}{R_n} = \frac{a_n}{A_n}, \text{ daher auch}$$

$$P = \frac{a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n}{A_1 . A_2 . A_3 \ldots A_n} \cdot \frac{b}{B} . Q,$$

oder wenn man das Product aus den Triebstecken aller Getriebe durch x und das Product aus den Zähnen aller Räder durch X ausdrückt,

$$P = \frac{x}{X} \cdot \frac{b}{B} \cdot Q, \text{ woraus}$$

$$\frac{x}{X} = \frac{B}{b} \cdot \frac{P}{Q}$$

folgt.

Ist der zweite Theil der Gleichung gegeben, so kann die Anordnung des Räderwerkes sehr leicht bestimmt werden, indem man Zähler und Nenner in eine gleiche Anzahl Factoren zerlegt, welche ganze oder gebrochene Zahlen sein können, wodurch man die Getriebe und die Räder erhält. Gleichgiltig ist es, ob man beim Eintheilen der Zähne und der Triebstecken in der auf einander folgenden Ordnung der Räder und der Getriebe den einen oder den andern Factor zuerst wählt. Bei der Wahl der Factoren muß man wesentlich darauf Rücksicht nehmen, daß die Räder in Hinsicht auf die Getriebe nicht gar zu groß ausfallen; aus dieser Ursache pflegt man einem Rade nicht leicht über 100 Zähne zu geben.

Es sei z. B. eine Last von 1000 Pfden durch eine Kraft von 11 Pfden im Gleichgewichte zu erhalten; wenn man dabei $B = 18''$ und $b = 5''$ festsetzt; so ist

$$\frac{x}{X} = \frac{18}{5} \cdot \frac{11}{1000} = \frac{99}{2500} = \frac{9}{50} \cdot \frac{11}{50}.$$

Man kann also zwei Getriebe von 9 und 11 Triebstecken und 2 Räder von 50 Zähnen nehmen.

Wenn sich Zähler und Nenner nicht in schickliche Factoren zerlegen lassen, so kann man die Zahlen um einige Einheiten ändern, bis sie schickliche Factoren geben. Man hat für die Ausübung keinen wesentlichen Fehler zu besorgen, weil man bei dieser Bestimmung ohnehin auf die Reibung noch nicht Rücksicht genommen hat; so kann man z. B. statt

$$\frac{x}{X} = \frac{99}{2500} \text{ setzen } \frac{x}{X} = \frac{1}{26} = \frac{1}{5.5\frac{1}{5}} = \frac{1}{2.3\frac{1}{4}.4} = \frac{1}{6.4\frac{1}{3}}$$

und man erhält die Brüche

$$\frac{10.10}{50.52} = \frac{12.8.8}{24.26.32} = \frac{10}{60} \cdot \frac{12}{52}, \text{ u. s. w.}$$

Es ist klar, daß die Anordnung des Räderwerkes auf unzählige Arten geschehen könne.

Anmerkung. Wenn sich die Welle des letzten Rades, an der die Last aufgewunden wird, einmal herumdreht, so durchläuft die Last in dieser Zeit einen Raum $s = 2b\pi$, wenn b der Halbmesser der Welle ist; da aber in dieser Zeit, wie später zu sehen sein wird, das erste Getriebe, folglich auch der an ihm angebrachte Hebelsarm B sich $\frac{X}{x}$ mal herumdrehen muß, so ist $S = \frac{X}{x} \cdot 2B\pi$ der in dieser Zeit von der Kraft zurückgelegte Weg. Nun ist

$$\frac{X}{x} = \frac{b}{B} \cdot \frac{Q}{P}, \text{ also}$$

$$S = \frac{b.Q}{P}.2\pi \text{ und}$$

$$S : s = \frac{2bQ\pi}{P} : 2b\pi = Q : P;$$

d. h. auch beim Räderwerke findet das Carteſiſche Geſetz ſtatt.

§. 165. Bei dem gezähnten Räderwerke finden zwei Reibungen ſtatt, die eine wirkt an dem Zapfen der Welle und muß ſo wie beim Wellrade nach §. 159 berechnet werden; die andere aber entſteht durch das Eingreifen der Triebſtecken und der Zähne, die ſich an einander ſchleifen, ehe ſie ausgelöst werden und dieſe kann man auf folgende Art in Rechnung bringen.

Bei dem letzten Stirnrade, an deſſen Welle die Laſt aufgewunden wird oder eine andere Verbindung ſtattfindet, ſei (Fig. 111) **C** der Punct, in welchem der Triebſtecken des Getriebes und der Zahn des Rades in einander greifen, deren Halbmeſſer durch **BC** und **AC** vorgeſtellt werden. Die Senkrechte **CF** bezeichne die Größe der Kraft Q, welche der Laſt und der davon herrührenden Reibung an der Welle Gleichgewicht hält. Dem Fortſchreiten des Triebſteckens widerſetzt ſich die Reibung nach der Richtung **AC** mit einer Kraft kQ. Macht man alſo $CD = kQ$ und verzeichnet das Rechteck **CDEF**, ſo ſtellt die Diagonale $CE = Q\sqrt{1+k^2} = Q(1+\frac{1}{2}k^2)$ die Größe und Richtung des geſammten Widerſtandes vor, welcher die Bewegung des Triebſteckens verhindert. Ueber die Diagonale **CE** verzeichne man das Rechteck **CHEG**, bei welchem eine Seite über den Halbmeſſer **BC** des Getriebes fällt; ſo wird **CE** in die zwei Seitenkräfte **CH** und **CG** zerlegt, wovon die erſte, weil der Mittelpunct **B** ſeine Lage nicht ändern kann, durch die Feſtigkeit des Getriebes aufgehoben wird und nur der Druck **CG** ſenkrecht auf den Halbmeſſer **BC** wirkt. Dieſer Druck iſt die Laſt, welche an dem Umfange des Getriebes zu überwinden iſt. In der

Ausübung kann man immer CE statt CG nehmen, weil diese beiden Kräfte nur sehr wenig von einander unterschieden sein können. Nun bestimme man den Werth von Q für das Stirnrad, welches an der Axe desselben Getriebes angebracht ist und schreite dann immer weiter fort.

Über die Reibung beim Räderwerke hat die Erfahrung folgende Bemerkungen bestätigt.

1) Die Reibung ist desto größer, je geringer die Anzahl der Zähne am Rade ist.

2) Wenn ein kleines Getriebe in ein vielzähniges Rad eingreift, so ist die Reibung geringer, als wenn das Eingreifen vom Rade in das Getriebe geschieht.

3) Bei den Kammrädern ist die Reibung größer, als bei den Stirnrädern.

4) Es ist vortheilhaft, besonders bei großen Rädern, die Triebstecken für das eingreifende Getriebe so anzunehmen, daß die Anzahl derselben mit jener der Zähne des ergriffenen Rades keinen gemeinschaftlichen Theiler habe, weil dadurch jeder Triebstecken zwischen allen Zähnen läuft und diese unter einander sich besser abschleifen, also dann bei dem fortgesetzten Gebrauche die Reibung vermindert wird.

III. Die Seilräder.

§. 166. Sind die zwei Räder **AB** und **ab** (**Fig. 112. a** und **b**) gleichsam wie zwei feste Rollen gestaltet und durch ein über beide gespanntes Seil **NAanbBN**, welches meist auch ein Riemen ist, verbunden, durch welches Seil sie gegenseitig gedreht werden; so nennt man die auf solche Art verbundenen Räder *Seilräder*. In **Fig. 112. a** haben die beiden Räder eine gleichartige Drehung, in **Fig. 112. b** aber, wo sich das Seil kreuzt, eine ungleichartige Drehung, wie es die Pfeile anzeigen.

Daß das Seil oder der Riemen bei der Drehung des einen Rades auf den beiden Rädern nicht gleiten kann, somit auch das andere Rad drehen muß, folgt schon aus §. 150. I. Anm.

§. 167. Um die an der Axe **c** mittels des Hebelsarmes $cd = B$ angebrachte Kraft V zu bestimmen, welche einer Last Q an der Welle des andern Rades mit der Reibung an den Zapfen Gleichgewicht halten soll; so seien $CD = b$ der Halbmesser dieser Welle, r und R die Halbmesser der Räder **n** und **N**, endlich α der Halbmesser der Zapfen.

Durch das Bestreben von V zur Drehung erhält der Seilgang **bB** eine gewisse Spannung V' und sonach wird $V' \mp V$ der Druck auf den

Zapfen o, wenn man das Gewicht der Welle und des Rades unberücksichtigt läßt, für das obere oder untere Zeichen sein, je nachdem V und V' entgegengesetzt oder wie in d' parallel sind. Da aber die Kraft jede Lage um das Rad annimmt; so kann man für den Druck seinen größten Werth $V'+V$ annehmen und man hat sofort die Momentengleichung

$$BV = V'r + ak'(V'+V).$$

Aber V' ist die Kraft für die Drehung des Rades N, folglich ist $V'+Q$ der Druck auf die Axe C, indem man V' und Q sich parallel denkt und somit

$$V'R = bQ + ak'(V'+Q).$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung V' und setzt den erhaltenen Werth in die vorige, so ergibt sich aus letzterer

$$V = \frac{Q(b+ak')(r+ak')}{(B-ak')(R-ak')}.$$

Bei mehren Seilrädern (Fig. 113), von denen, nach der Ordnung, wie sie sich in Bewegung bringen, die Halbmesser r, R, r', R', r'', R'', ... sind, findet man auf dieselbe Art die Kraft an der ersten Welle

$$V = \frac{Q(b+ak')(r+ak')(r'+ak')(r''+ak') \ldots .}{(B-ak')(R-ak')(R'-ak')(R''-ak') \ldots .}.$$

Ohne Reibung oder für $k'=0$, wo V in P übergehen wird, ergibt sich

$$P = Q\,\frac{b.r.r'.r'' \ldots .}{B.R.R'.R'' \ldots .} \quad \text{oder}$$

$$P:Q = b.r.r'.r'' \ldots .: B.R.R'.R'' \ldots . = bx:BX,$$

was mit §. 164 übereinkommt.

Es leisten sonach die Seilräder dasselbe wie die gezähnten von denselben Producten x und X ihrer Halbmesser, nur haben letztere Räder den Nachtheil der Reibung an ihren Zähnen und jene, daß sie zu ihrer Anordnung viel mehr Raum erfordern.

Siebenter Abschnitt.

Die Schraube.

§. 168. Es sei (Fig. 114) ABCD ein Rechteck, bei welchem die zwei gegenüber liegenden Seiten AB und CD in die unter sich gleichen Theile $Da_1 = a_1a_2 = a_2a_3 \ldots = A\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2$ u. s. w. getheilt werden. Denkt man sich den untersten Punct A der einen Seite AB mit dem ersten Theilungspuncte a_1 der andern Seite CD durch die Gerade Aa_1 verbunden und dann aus den nachfolgenden Theilungspuncten zu der Geraden Aa_1 die Parallelen α_1a_2, α_2a_3, u. s. w. gezogen; stellt man sich ferner vor, daß dieses Rechteck auf einem geraden Cylinder aufgewickelt sei, dessen Umfang der Grundfläche genau der Seite AD des Rechteckes gleich ist; so wird der Punct a_1 mit α_1, der Punct a_2 mit α_2, u. s. w. zusammen fallen und die gezogenen Parallelen werden auf der Oberfläche des Cylinders eine ununterbrochene krumme Linie bilden. Daß man auch eben diese Linie erhalten muß, wenn ein Körper nach einem geraden Cylinder von demselben Umfange ausgehöhlt und das Rechteck an die Oberfläche der Aushöhlung herumgelegt wird, ist für sich klar. Man nennt diese Curve die Schraubenlinie und den Cylinder, auf welchem sie entsteht, die Schraubenspindel. Befinden sich endlich auf der Schraubenspindel gleichförmige Hervorragungen, die sich nach der Richtung der Schraubenlinie in der Gestalt drei- oder vierseitiger Prismen (Fig. 115 und 116) herumziehen; so heißt dieser Körper eine Schraube und die gleichförmig fortlaufenden Hervorragungen werden Schraubengänge oder Gewinde genannt; der Abstand eines Gewindes von dem nächsten heißt die Höhe des Gewindes, die Schraube selbst aber, je nachdem die Hervorragungen drei- oder vierseitig sind, nennt man eine Schraube

mit scharfen oder mit flachen Gewinden. Wird die innere Oberfläche eines cylindrisch ausgehöhlten Körpers nach derselben Schraubenlinie so eingeschnitten, daß die Hervorragungen des einen Körpers in die Vertiefungen des andern genau passen und sich dadurch der eine Körper an dem andern bewegen läßt; so wird dieser zweite Körper die Schraubenmutter oder auch Mutterschraube genannt; diese beiden zusammengehörigen Theile sind eigentlich das, was man die Schraube nennen sollte.

Wenn man (Fig. 114) die Seiten AD und BC des Rechteckes ADCB in n gleiche Theile theilt, an jeden zwei correspondirenden Theilungspuncten ein gleiches Rechteck mit anlegt, in welchem die Parallelen eben so wie in dem erstern gezogen sind und dann alle diese Rechtecke um den Cylinder herumwindet, so werden n gleiche Schraubenlinien entstehen. Werden nun nach diesen sowohl an der Schraube als auch in der Mutter die Gewinde gebildet, so erhält man eine Schraube mit $n$fachen Gewinden.

Wenn endlich (Fig. 117) statt der Schraubenmutter die Schraube in ein Zahnrad eingreift, daß bei der Umdrehung derselben die Zähne des Rades fortgeschoben werden; so sind hiezu nur einige Schraubengänge erforderlich, weil die übrigen die Zähne des Rades nicht mehr fassen würden. In diesem Falle wird die Schraube eine Schraube ohne Ende genannt. Damit die Bewegung der Schraube durch das Rad nicht gehemmt werde, muß die Höhe des Schraubenganges der Zwischenweite von der Mitte zweier auf einander folgender Zähne gleich sein.

§. 169. Bei der Schraube können zwei concentrische Cylinder bemerkt werden, der größere wird durch den äußern, der kleinere aber durch den innern Rand der Schraubengänge begrenzt; der Unterschied der Halbmesser von den Grundflächen dieser beiden Cylinder gibt die Breite der Schraubengänge. Man kann sich auch vorstellen, daß die Schraube gebildet werde, wenn der dickere Cylinder bis zur Grenze des dünnern nach der Schraubenlinie gehörig eingeschnitten wird. Dieser dickere Cylinder wird von einigen Schriftstellern die Schraubenspindel genannt. Damit die Schraube und die Schraubenmutter in den Schraubengängen zusammenpassen, müssen bei beiden die Halbmesser der dickern und der dünnern Cylinder gleich sein.

§. 170. Wenn die Last nach der Axe der Schraube wirkt, so wird die Oberfläche aller in der Mutter befindlichen Schraubengänge gleichförmig gedrückt. Nun ist diese eine krumme Fläche, denkt man sie sich aber gegen

die Axe C zu in sehr kleine Stücke DABE (Fig. 118) zerschnitten; so kann jedes solche kleine Flächenelement als ein ebenes Kreisstück angesehen werden, welches von zwei concentrischen Kreisbogen AB, DE und von zwei Halbmessern CA, CB eingeschlossen wird. Ist demnach G der Schwerpunct des gleichförmigen Druckes auf dieses Kreisstück und setzt man $CG = a$, $CA = R$, $CD = r$, wo R und r die beiden Halbmesser der Spindel sind, so hat man (§. 92. VII.)

$$a = \tfrac{2}{3}\,\frac{(R^2 + Rr + r^2)}{R + r}.$$

Nach diesem muß also, wenn die Spindel durch eine Cylinderfläche vom Halbmesser a concentrisch durchschnitten gedacht wird, auf der hiedurch entstehenden Schraubenlinie der ganze Druck gleichförmig vertheilt sein; sofort kann diese Schraubenlinie als eine schiefe Ebene, deren Höhe die eines Schraubenganges und deren Grundlinie dem Umfange des Kreises vom Halbmesser a gleich ist, angesehen werden.

Bezeichnet daher bei flachen Schraubengewinden h die Höhe dieser schiefen Ebene, $b = 2a\pi$ die Grundlinie und φ den Neigungswinkel derselben; ist ferner Q die Last nach der Axe der Schraubenspindel oder senkrecht auf der Grundlinie der schiefen Ebene und p die Kraft am Umfange des Cylinders der Schraubenlinie, also zu jener Grundlinie parallel; so hat man

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{h}{b} = \frac{h}{2a\pi} \text{ und nach §. 132. Gl. (4)}$$

$$p = \frac{Q(\text{tang}\,\varphi \pm k)}{1 \mp k\,\text{tang}\,\varphi} = \frac{Q(h \pm 2ak\pi)}{2a\pi \mp kh} = \frac{Q}{2a\pi}\left[h \pm k\,\frac{h^2 + b^2}{b \mp hk}\right].$$

Für die obern Zeichen erhält man die Kraft, welche, um das Geringste vergrößert, das Drehen der Schraube zum Erheben der Last bewirken wird, während für die untern die Kraft erhalten wird, welche mit Hilfe der Reibung das Sinken der Last verhindert.

Soll im letztern Falle die Last blos durch die Reibung zurückgehalten werden, so ist $p = 0$, sofort

$$\text{tang}\,\varphi = k;$$

d. h. wenn die Tangente der Neigung der Schraubenlinie dem Reibungs-Coefficienten gleich kommt, so wird die Last noch nicht sinken, wohl aber sogleich durch Selbstdrehung der Schraube, wenn diese Neigung nur etwas vergrößert, d. i. $\frac{h}{2a\pi} > k$ wird.

Wirkt die Kraft bei der Schraube nicht in dem Abstande a, sondern in einem größern oder kleinern A von der Spindelaxe und bezeichnet P diese Kraft; so ist für das Gleichgewicht

$$P.A = p\,a, \text{ sofort}$$

$$(1)\quad P = Q.\frac{a}{A}.\frac{\tang\varphi \pm k}{1 \mp k\tang\varphi} = \frac{Q}{2A\pi}\quad [h \pm k.\frac{h^2+b^2}{b \mp hk}].$$

Bei der Schraube mit scharfen Gewinden ist die Kraft in Bezug auf die Reibung auf folgende Art zu bestimmen.

Es sei ABB′ (Fig. 119) der Durchschnitt eines scharfen Gewindes, aBB′a′ der Durchschnitt des zustimmenden flachen Gewindes und G der Schwerpunct des Druckes auf letzterem. Zieht man daher GD parallel zur Axe der Spindel, so ergibt sich dadurch auch der Schwerpunct G′ des Druckes auf dem scharfen Gewinde. Wird nun durch G′D dieser Druck auf die Schraubenlinie oder auf die schiefe Ebene vom Neigungswinkel φ vorgestellt und ist p die Kraft an dieser Ebene parallel zu ihrer Grundlinie, so ist (§. 132. 2)

$$\mathrm{G'D} = p\sin\varphi + Q\cos\varphi.$$

Wären die Gewinde flach, so hätte man die Gleichung

$$p\cos\varphi = Q\sin\varphi \pm k.\mathrm{G'D},$$

woraus sofort p wie vorhin erhalten würde. Allein bei scharfen Gewinden ist nicht G′D der senkrechte Druck auf dieselben, welche die Reibung hervorbringt, sondern G′C senkrecht auf AB, indem man G′D in diesen Druck und in den G′E senkrecht auf die Spindelaxe zerlegt, wobei aber letzterer wegen seiner gleichmäßigen Vertheilung um die Spindel herum diese nirgends anzudrücken, somit auch keine Reibung hervorzubringen vermag.

Für scharfe Gewinde verwandelt sich sonach die letzte Gleichung in die folgende

$$p\cos\varphi = Q\sin\varphi \pm k.\mathrm{G'C}.$$

Es ist aber, wenn man den Winkel $\mathrm{BAN} = \mathrm{B'AN} = \alpha$ setzt;

$$\mathrm{G'C} = \frac{\mathrm{G'D}}{\cos\alpha},$$

also

$$p\cos\varphi = Q\sin\varphi \pm k.\frac{\mathrm{G'D}}{\cos\alpha} = Q\sin\varphi \pm \frac{k(p\sin\varphi + Q\cos\varphi)}{\cos\alpha}$$

und daraus für scharfe Gewinde

$$p = \frac{Q(\cos\alpha.\tang\varphi \pm k)}{\cos\alpha \mp k\tang\varphi}.$$

Ist P' die Kraft an dem Hebelsarme A, so ist, wegen $P'A = pa$.

$$(2)\quad P' = Q.\frac{a}{A}.\frac{\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi \mp k}{\cos\alpha \mp k\,\mathrm{tang}\,\varphi} = \frac{Q}{2A\pi}\left[\, h \mp \frac{k(h^2+b^2)}{b\cos\alpha \mp hk}\,\right],$$

für die obern Zeichen, wenn die Kraft die Last und Reibung überwindet und für die untern wird die Kraft erhalten, welche mit Hilfe der Reibung das Sinken der Last verhindert.

Vergleicht man die Ausdrücke (1) und (2), so findet man

$$P' - P = \mp\frac{k.a(h^2+b^2)\,(1-\cos\alpha).Q}{A(b \mp hk)\,(b\cos\alpha \mp hk)}.$$

Für die obern Zeichen, wo $P' > P$ ist, braucht man also zum Erheben der Last bei den scharfen Gewinden eine größere Kraft als bei den flachen.

Für die obern Zeichen ist also $P' > P$, d. h. zum Erheben der Last erfordern die scharfen Gewinde eine größere Kraft als die flachen. Dagegen ist für die untern Zeichen $P' < P$ oder das Zurückhalten der Last ist leichter bei scharfen als flachen Gewinden. Demnach sind die ersteren Gewinde vorzüglich da anwendbar, wo Körper durch Schrauben fest aneinander gehalten werden sollen, während flache Gewinde ihrer geringern Reibung wegen zur leichtern Bewegung der Last anwendbarer sind.

§. 171. Aus den Formeln (1) und (2) geht noch hervor, daß bei jeder Gattung Gewinde eine um so kleinere Kraft nöthig wird, je geringer die Höhe eines Schraubenganges und je dünner die Schraube ist; auch vermindert sich nach Erfahrungen die Kraft bei Schrauben von mehrfachen Gewinden.

Ohne Reibung, d. i. für $k = 0$ folgt aus (1) und (2) für jede Gattung Gewinde

$$P = \frac{hQ}{2A\pi} \quad \text{oder}$$

$$P : Q = h : 2A\pi,$$

d. h. je kleiner h gegen A ist, um so kleiner wird die Kraft, jedoch wird dafür auch der Weg h der Last bei jedem Umlaufe $2A\pi$ der Kraft klein. (Carteſiſches Geſetz).

Demnach kann man bei Schrauben mit flachen Gewinden, bei welchen die Kraft geringer als bei scharfen ist, für die schnellere Bewegung der Last oder für Schnellpressen die Schraubengänge höher machen.

§. 172. Bei der Schraube ohne Ende (Fig. 117) wird bei jeder Umdrehung ein Zahn ausgelassen und auf der andern Seite ein neuer ergriffen. Gewöhnlich gibt man derselben nur drei Schraubengänge; die Kraft wird, wenn eine Last zu heben oder ein anderes Hinderniß zu überwältigen ist, an einer an die Spindel gesteckten Kurbel angebracht. Da die Höhe a eines Schraubenganges der Zwischenweite von den Mitten zweier auf einander folgender Zähne gleich sein muß; so ist, wenn man den Halbmesser des ergriffenen Rades mit M und die Anzahl der Zähne desselben mit m bezeichnet,

$$a = \frac{2M\pi}{m}.$$

Auch bei der Schraube ohne Ende kann ein mehrfaches Gewinde stattfinden; dabei muß aber die Höhe eines ganzen Schraubenganges der Zwischenweite von n Zähnen gleich sein, wenn die Schraube ohne Ende ein $n$faches Gewinde hat. Durch eine Umdrehung werden zugleich n Zähne, nemlich von jedem Gewinde ein Zahn, fortgeschoben; hier ist also

$$a = \frac{2M\pi}{m}.n.$$

Die Zahl n kann man den Gewindezeiger nennen.

Ist p die Last, welche am Umfange des Stirnrades von der Schraube überwältigt werden soll, und A der Hebelsarm der Kraft an der Kurbel; so ist nach vorigem §.

$$P : p = a : 2A\pi = nM : mA.$$

Diese Last p ist aber zugleich die Kraft für die Last Q, welche an der Axe der Welle zu überwältigen ist. Es sei z. B. die Last mittels eines Seiles zu erheben, indem sich dieses Seil bei der Umdrehung auf der Welle aufwindet, so ist, wenn man den Halbmesser der Welle bis zur Mitte des Seiles mit C bezeichnet,

$$p : Q = C : M; \text{ also auch}$$
$$P : Q = aC : 2A\pi.M = nC : mA.$$

Wenn auf der Welle des Rades die Last sich nicht aufwindet, sondern ein Getriebe angebracht ist, welches wieder in ein anderes Rad eingreift, so hat man eine aus der Schraube ohne Ende und aus dem Räderwerke zusammengesetzte Maschine. Das Verhältniß der zum Gleichgewichte erforderlichen Kraft zur Last, muß dann mittels des im §. 125 aufgestellten Satzes bestimmt werden.

§. 173. Es sei AB (Fig. 120) ein Cylinder, welcher gegen den Horizont beiläufig unter dem Winkel von 45° geneigt ist und unten mit einem Zapfen aufsteht, um welchen er in der schiefen Richtung oben mittels einer Kurbel herumgedreht werden kann; um diesen Cylinder werde eine Röhre schraubenartig herumgewunden; wird nun in die untere Öffnung ein schwerer Körper gelegt, welcher der leichtern Beweglichkeit wegen rund sein mag und der Cylinder so gedreht, daß sich diese Öffnung erhebt; so wird der Körper gegen den tiefsten Punct, nemlich gegen a in der Röhre herabrollen, bei dem fernern Umdrehen erhebt sich aber auch dieser Punct a und der Körper muß nach und nach immer weiter in der Röhre fortrollen, bis er endlich bei der obern Öffnung b herausfällt. Man nennt diese Maschine von ihrem Erfinder die Archimedische Schraube oder auch, weil sie verwendet wird, um das Wasser aus einem Behältnisse herauszuschöpfen, die Wasserschraube.

§. 174. Die Anwendung der Schraube ist im Maschinenwesen sehr ausgebreitet. Durch Schrauben werden zwei Körper entweder an einander gedrückt und in dieser Lage festgehalten, oder es wird durch eine starke Pressung irgend eine Wirkung hervorgebracht, wie z. B. bei den Druckerpressen, Ölpressen, u. s. w.; oft werden die Schrauben zum Heben einer Last verwendet. Bei Instrumenten dienen sie sonst, sehr sanfte und gleichförmige Bewegungen hervorzubringen. In dem letztern Falle müssen ihre Schraubengänge sehr genau ausgearbeitet und scharfe Gewinde gewählt werden, weil man flachen Gewinden keine so geringe Höhe geben kann, wie sie zu diesem Zwecke erfordert wird. Die Schraube ohne Ende wird bei den meisten Rädermaschinen angebracht, welche mit der Hand bewegt werden. Die Schrauben haben überhaupt den Vortheil, daß man in einem kleinen Raume eine sehr große Kraft anbringen kann, jedoch ist ihre Wirkung äußerst langsam; sollen sie eine größere Stärke erhalten, so sind sie sehr kostspielig; sie müssen hinlängliche Festigkeit haben und sehr genau ausgearbeitet werden, weil sonst die Theile durch den ungleichförmigen Druck sehr leicht abspringen.

Bei der gemeinen Schraube können vier Fälle stattfinden. Es kann nemlich die Spindel fest und unbeweglich sein, oder sich die Spindel herumdrehen, ohne ihren Ort zu verändern, oder die Spindel, ohne sich umzudrehen, fortgeschoben werden, oder endlich die Spindel sich herumdrehen und zugleich sich fortbewegen.

In dem ersten Falle ist Kraft und Last an der Mutter angebracht, welche, indem sie herumgedreht wird, sich zugleich an den Schraubengän-

gen der Spindel fortbewegt. Diese Gattung von Schrauben dient vorzüglich zum Andrücken, wie z. B. bei den Buchbinderpressen, bei der Befestigung der Latten an den Rippenhölzern der Bettungen, u. s. w. Die Mutter erhält in diesem Falle die Form eines Griffes, welcher statt eines Hebels dient oder man gibt ihr eine vierseitige prismatische Gestalt, daß sie ein gabelförmig ausgeschnittener Hebel, welchen man den Schraubenschlüssel nennt, fassen kann. Bei diesem Zusammenpressen wird die Reibung in den Schraubengängen nach und nach immer größer; so daß die Mutter nicht zurückgedrückt und ohne eine äußere Kraft in ihrer Lage erhalten wird.

In dem zweiten Falle wirkt die Kraft an der Spindel und die mit der Mutter verbundene Last bewegt sich nach der Länge der Spindel. Zu dieser Classe gehört die Schraube in der Richtmaschine unserer altartigen Mörser, der Schraubensatz der Zimmerleute, welcher von dem stärksten Holze verfertigt sein muß und dazu dient, um ein ganzes Dach zu erheben. Hier werden für jedes Paar Schrauben die Mütter in einem gemeinschaftlichen Klotze eingeschnitten; auf diesen ruhen die hölzernen Säulen, welche das Dach tragen. Auch hier kann man die außerordentliche Vermehrung der Reibung bei einem sehr starken Drucke wahrnehmen, da diese Schrauben durch die so große Last nicht zurückgedreht werden.

In dem dritten Falle dreht die Kraft die Mutter der Schraube herum, ohne daß diese ihren Ort ändert; die Last aber bewegt sich mit der Spindel, indem sich letztere nach ihrer ganzen Länge durch die Mutter fortschiebt, wie bei unserer Cavallerie-Geschütz-Richtmaschine, wo die Mutter durch eine Schraube ohne Ende mittels einer Kurbel gedreht wird.

In dem vierten Falle endlich ist die Mutter in einem Gestelle fest und unbeweglich, die Kraft und die Last wirken an der sich drehenden Spindel, welche sich zugleich nach ihrer ganzen Länge durch die Mutter durchschiebt. Durch diese Schraube werden Lasten gehoben, die entweder unten an der Spindel angehängt werden und sich zugleich mit der Spindel herumdrehen müssen, oder sich an den Kopf der Spindel stemmen und dadurch fortgeschoben werden, wie z. B. bei unsern neuartigen Mörser-Richtmaschinen. Um die Reibung, welche an dem Kopfe der Spindel entsteht, zu vermindern, muß dieser abgerundet werden. Man bedient sich dieser Schrauben auch zum Aneinanderpressen, wie bei den Druckerpressen, Keltern, Prägewerken, u. s. w. Sie werden mittels eines durch den Kopf gesteckten Hebels bewegt, welchen man den Ziehbengel, Preßbengel, Preßbaum nennt. Oft werden auch andere Maschinen mit dieser Schraube verbunden, die sich mit der Spindel zugleich fortbewegen; so z. B. wird

bei den Richtmaschinen unserer Kanonen eine schiefe Ebene (der Richtkeil) zugleich mit der Schraube fortgeschoben.

Die Schrauben ohne Ende findet man bei den Hebzeugen, Kranigen, bei der zusammengesetzten Fuhrmannswinde, überhaupt bei allen Räderwerken, wo eine große Last zu bewegen ist; zu dieser Schraube werden immer flache Gewinde genommen. Da sich bei der Umdrehung derselben immer nur ein Zahn des ergriffenen Rades auslöst, so kann die Last auch nur sehr langsam fortbewegt werden.

Eine Fuhrmanns- oder Wagenwinde (Fig. 121) besteht in einem starken, mit Eisen beschlagenen, hölzernen Gehäuse, welches, um eine feste Stellung auf dem Boden zu erhalten, mit vier eisernen Spitzen versehen ist. In diesem Gehäuse wird eine gezähnte eiserne Stange durch ein Getriebe sammt der Last auf- oder abwärts bewegt. Die Last drückt dabei entweder auf den Kopf **D** der Stange oder auf einen von der Stange unten gebildeten Haken **EF**, der aus einem Schlitze des Gehäuses herausreicht. Dieser Haken wird bei Lasten angewendet, unter welche der Kopf der Stange nicht gebracht werden kann, wie z. B. um Pfähle aus dem Boden zu ziehen.

Erhält das in die Stange eingreifende Getriebe seine Bewegung durch eine Kurbel, so hat man die kleine Winde für nicht gar zu große Lasten. Wird aber an der Axe des Getriebes ein Stirnrad **A** angebracht, welches durch eine Schraube ohne Ende **B** mittels einer Kurbel **K** gedreht wird, so ist dieses die große Wagenwinde. Noch mehr Last wird durch letztere gehoben, wenn an die Stelle der gezähnten Stange eine Schraube **DE** (Fig. 122) tritt, deren Mutter **C**, ohne von ihrer Stelle zu weichen, durch eine Schraube ohne Ende **AB** mittels einer Kurbel gedreht wird. Mit der Einrichtung Fig. 121 kommt die ehemalige, mit der Fig. 122 die neuartige Cavallerie-Geschütz-Richtmaschine überein, nur daß der Kopf der gezähnten Stange bei ersterer ein Brett, der Kopf der Schraube bei letzterer eine Gabel, worauf das Bodenstück ruht, um eine horizontale Axe hebt oder senkt.

Gegen das Sinken der Last bei der Wagenwinde, welches sehr schnell geschehen würde, sofort gefährlich wäre, ist an der Axe der Kurbel ein Sperr-Rad mit einem Sperrkegel angebracht.

Bezeichnet man den Halbmesser des Getriebes durch r, jenen des Rades durch R, den Halbmesser des Zapfens beider Axen durch a, den Halbmesser der Schraube ohne Ende bis an die Schraubenlinie durch a, die Höhe eines Schraubenganges durch h, den Hebelsarm der Kurbel durch A, ferner die Last durch Q, die Kraft durch P und endlich die Kraft am Umfange des Rades durch V; so hat man bei der gezähnten Stange (Fig. 121)

$$VR = Q(1+\tfrac{1}{2}k^2)r + ak(V+Q) \quad \text{und}$$

$$P = \frac{V}{2A\pi}\left[h + \frac{k(h^2+4a^2\pi^2)}{2a\pi - hk}\right].$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen V, so folgt

$$P = \frac{Q[(1+\tfrac{1}{2}k^2)r + ak]}{2A\pi(R-ak)}\left[h + \frac{k(h^2+4a^2\pi^2)}{2a\pi - hk}\right].$$

Für die Winde (Fig. 122) erhält man, wenn a' der Halbmesser bei der Schraube **DE** bis zur Schraubenlinie, h' die Höhe eines Schraubenganges, P' die Kraft an der Kurbel ist, und die übrigen Benennungen wie vorhin bleiben,

$$V = \frac{Q}{2R\pi}\left[h' + \frac{k(h'^2+4a'^2\pi^2)}{2a'\pi - h'k}\right],$$

$$P' = \frac{V}{2A\pi}\left[h + \frac{k(h^2+4a^2\pi^2)}{2a\pi - hk}\right]$$

$$= \frac{Q}{4AR\pi^2}\left[h' + \frac{k(h'^2+4a'^2\pi^2)}{2a'\pi - h'k}\right]\left[h + \frac{k(h^2+4a^2\pi^2)}{2a\pi - hk}\right].$$

Das Verhältniß von P' zu P ist

$$\frac{P'}{P} = \frac{R-ak}{R}\cdot\frac{a'}{2a'\pi - kh'}\cdot\frac{h' + 2a'\pi.k}{(1+\tfrac{1}{2}k^2)r + ak}, \text{ also nahe}$$

$$= \frac{a'k}{r},$$

und da a' sicher kleiner als r, also um so mehr $a'k < r$ ist; so ist offenbar P' viel kleiner als P.

Es hat sonach die Wagenwinde mit der gezähnten Stange eine viel größere Kraft nöthig und zugleich den Nachtheil, daß die Zähne der Stange oft verbogen oder gebrochen werden, während die Hebschraube der andern Wagenwinde nicht leicht beschädigt wird; nur wird dagegen bei dieser die Last langsamer gehoben.

Anmerkung. Das in diesem Hauptstücke über die Statik der Maschinen Vorgetragene erlaubt zwar noch kein vollkommenes Urtheil über die Brauchbarkeit einer Maschine, indem hiezu noch die Widerstände ermittelt sein müssen, welche ihre Theile bei der Bewegung entgegensetzen und wovon erst nach Abhandlung der Dynamik die nöthige Belehrung gegeben werden kann; allein das Bisherige dürfte doch schon in vielen Fällen hinreichen, um zwischen zwei Maschinen, bei

denen Kraft und Last für das Gleichgewicht gleiches Verhältniß haben, zu wählen, wobei die einfachere vorzuziehen ist. Indessen gibt es sehr zusammengesetzte Maschinen, die durch zweckmäßige Anordnung ihrer Theile vollkommener entsprechen als jede einfache Maschine, wie z. B. die Dampfmaschinen.

Wesentlich aber lehrt das Gleichgewicht an den Maschinen die Pressung oder den Druck auf jeden Maschinentheil bestimmen, um darnach die Stärke derselben gegen das Brechen oder Reißen so festsetzen zu können, daß sie die Maschine nicht zu sehr belasten, sofort die Reibung und bei Seilen die Steifigkeit nicht unnöthig vergrößern.

Die auf Erfahrungen gestützten Sätze über die Festigkeit der zu Maschinentheilen anwendbaren Materialien sollen in dem folgenden Abschnitte aufgestellt werden.

Achter Abschnitt.

Über die Festigkeit der Körper.

§. 175. Damit bei festen Körpern der Zusammenhang der Theile oder was dasselbe ist, die Cohäsion derselben an einem bestimmten Orte aufgehoben werde, ist eine Kraft erforderlich, deren kleinstes Maß von der Materie des Körpers, von der Größe der Trennungsflächen, von der Richtung, nach welcher sie wirkt und von den verschiedenen Umständen abhängt, unter welchen die Trennung erfolgt. So heißt der Widerstand des Körpers gegen das Zerreißen seine absolute, gegen das Zerbrechen seine relative oder respective, gegen das Zerdrücken seine rückwirkende und gegen das Verdrehen seine Drehungs- oder Torsions-Festigkeit.

Man könnte auch noch den Widerstand eines Körpers gegen das Spalten, gegen das Verschieben seiner Theile, u. s. w. betrachten.

§. 176. Da alle Körper Elasticität besitzen (§. 20), so erleiden sie vor der Trennung ihrer Theile mehr oder minder eine Formänderung, die, wenn sie nicht zu weit fortgeschritten ist, beim Aufhören der Wirkung der Kraft entweder ganz oder zum Theile wieder durch die Elasticität aufgehoben wird, wodurch der Körper seine ursprüngliche Gestalt wieder vollkommen oder unvollkommen annimmt. So wird der Körper vor dem Zerreißen länger und dünner; vor dem Zerbrechen gebogen, indem er auf der hohlen Seite der Biegung kürzer und auf der convexen länger wird; bei dem Zerdrücken wird derselbe kürzer und dicker, auch biegt er sich bei größerer Länge; endlich werden bei dem Verdrehen seine Theile wie Schraubengewinde gewunden, daher verlängert.

Die größte Kraft, durch welche der Körper eine Formänderung erfährt, die aber nach Beseitigung der Kraft doch noch ganz aufgehoben wird, gibt das Maß seiner Elasticität. Dagegen ist das Maß seiner Festigkeit diejenige Kraft, bei welcher keine weitere Formänderung eintreten kann, ohne daß der Körper zerrissen, zerbrochen oder zerdrückt, u. s. w. wird.

§. 177. Die im §. 175 aufgezählten Widerstände der Körper sind von ihrer Materie, oft auch von zufälligen Umständen abhängig. Sie können sonach blos durch Versuche ermittelt werden, um aus der Festigkeit eines Körpers jene eines andern gleichartigen von anderer Form und Größe bestimmen zu können.

Bei Metallen ist die Festigkeit von der Art, wie sie gewonnen werden, abhängig, also ob sie gegossen, gehämmert, gewalzt, ob sie schnell oder langsam abgekühlt worden sind, ferner von zufälligen Sprüngen, Blasen, u. s. w.; endlich von Legirungen, wodurch ihre Festigkeit verstärkt oder geschwächt werden kann. Bei Holz kommt es auf Klima und Boden an, in welchem es gewachsen ist, auf Standort, Wachsthum, Alter, auf die Jahreszeit des Schlagens, auf die Art des Trocknens und auf den Aufbewahrungsort vor dem Gebrauche; ob das Holz vom Stamme, von den Ästen, von der Wurzel, vom Kerne oder Splint genommen ist, u. s. w. Bei Seilen sind fast dieselben Umstände wie bei Hölzern hinsichtlich des Materials, aus dem sie erzeugt, dann noch ob dieselben viel oder wenig gedreht sind, u. s. w.

Demnach können die Resultate der Versuche über die Festigkeit, bei welchen die Trennung blos durch einen Druck oder Zug ohne Erschütterungen oder Stösse bewirkt wird, nur als Mittelwerthe gebraucht werden. Die meisten bisher erhaltenen Versuchs-Resultate findet man in C. H. A. Kayser's Handbuch der Statik ꝛc. Carlruhe 1836 und in Eitelwein's Handb. d. Statik fest. Körper.

Man nennt einen Körper hinsichtlich seiner Festigkeit **gleichartig**, wenn gleiche Theile desselben, von der Lage der Bruchfläche unabhängig, gleiche Festigkeit darbieten; im Gegentheile wird der Körper **ungleichartig** genannt. Ersteres findet sich gewöhnlich bei Metallen, letzteres beim Holze, weil dieses zur Trennung nach der Richtung der Fasern einen andern Widerstand als nach der darauf senkrechten Richtung leistet; jedoch können nach der einen oder andern Richtung zwei Holzstücke gleiche Festigkeit besitzen.

Die absolute Festigkeit.

§. 178. Wenn auf einen Körper, der an dem einen Ende befestigt ist, eine Kraft nach seiner Länge wirkt, die gerade hinreicht, um ihn abzureißen, so ist diese Kraft das Maß seiner absoluten Festigkeit. Ist dabei der Körper mit seiner ganzen Länge vertical, so muß zu der Kraft noch das Gewicht des abgerissenen Stückes hinzugerechnet werden, welches in der Folge, wenn nichts anders gesagt wird, immer angenommen wird.

Da bei der vorausgesetzten gleichartigen Festigkeit diese mit dem auf der Richtung der Kraft senkrechten Querschnitte des Körpers zunehmen muß; so verhalten sich die absoluten Festigkeiten zweier gleichartiger prismatischer oder cylindrischer Körper wie ihre Querschnitte. Es ist nemlich, wenn q und Q die absoluten Festigkeiten zweier solcher Körper von den Querschnitten f und F bezeichnen,

$$q : Q = f : F \quad \text{oder}$$

$$Q = \frac{q}{f} \cdot F.$$

Wir werden die Gewichte q und Q in Wiener Pfunden und die Flächen f und F in Wiener Quadratzollen ausgedrückt annehmen.

Setzt man den Quotienten $\frac{q}{f} = m$, welchen man den Coefficienten der absoluten Festigkeit nennt; so hat man

$$(1) \qquad Q = mF;$$

d. h. die absolute Festigkeit eines cylindrischen oder prismatischen Körpers ist das Product seines Querschnittes in den Festigkeits-Coefficienten.

Aus dieser Formel ergibt sich $Q = m$ für $F = 1$, also ist m das Gewicht, um ein Prisma von 1 Quadratzoll Querschnitt zu zerreißen.

Damit Körper eine Last mit Sicherheit auf längere Dauer zu tragen vermögen, so bringt man bei Metallen $\frac{1}{2}m$ bis $\frac{1}{4}m$, nemlich bei Eisen $\frac{1}{2}m$ bis $\frac{1}{3}m$, bei Kupfer, Messing und Blei $\frac{1}{3}m$ bis $\frac{1}{4}m$, bei Holz oder Seilen höchstens $\frac{1}{3}m$ in die Rechnung.

Soll der Körper durch sein eigenes Gewicht abgerissen werden und bezeichnet man dieses mit G, so ist

$$(2) \qquad G = mF,$$

oder, wenn γ das Gewicht eines Cubikzolles dieses Körpers und L die Länge des abgerissenen Stückes bezeichnet,

$$LF\gamma = mF$$

und daraus

$$(3) \qquad L\gamma = m, \text{ oder}$$

$$(4) \qquad L = \frac{m}{\gamma}.$$

§. 179. Hat sonach der Körper eine bedeutende Länge, so kann sein eigenes Gewicht so groß werden, daß seine Dicke von unten hinauf zunehmen muß, um allen Querschnitten dieselbe Festigkeit darzubieten.

Zur Auffindung der Gestalt des Körpers für diese Zunahme seiner Querschnitte, sei **ABCDE** (Fig. 123) der an seinem obern Ende befestigte Körper, welcher die Last Q und außer dieser noch sein eigenes Gewicht zu tragen hat. Setzen wir den untersten Querschnitt $\mathbf{BE} = f$ und in der Entfernung $\mathbf{AP} = x$ den Querschnitt $\mathbf{MM'} = y$, endlich das Gewicht von der Cubikeinheit des Körpers $= \gamma$; theilen wir ferner x in n gleiche Theile $= d$, so daß $x = nd$ ist, und führen in den Entfernungen d, $2d$, $3d$, ... die Querschnitte y', y'', y''', . . ; so wird für ein sehr großes n jeder Theil des Körpers zwischen zwei Querschnitten für ein Prisma angenommen werden können. Da in jedem Querschnitte die gleiche Festigkeit mit Rücksicht der auf denselben wirkenden Last sein soll; so hat man nach Formel (1)

$$f = \frac{1}{m} \cdot Q, \quad y' = \frac{1}{m}(Q + df\gamma) = \frac{1}{m} Q(1 + \frac{1}{m} d\gamma),$$

$$y'' = \frac{1}{m}\left[Q(1 + \frac{1}{m} d\gamma) + dy'\gamma\right] = \frac{1}{m} Q(1 + \frac{1}{m} d\gamma)^2,$$

$$y''' = \frac{1}{m}\left[Q(1 + \frac{1}{m} d\gamma)^2 + dy''\gamma\right] = \frac{1}{m} Q(1 + \frac{1}{m} d\gamma)^3,$$

. . . . . .

$$y = \frac{1}{m} Q(1 + \frac{1}{m} d\gamma)^n = \frac{1}{m} Q(1 + \frac{x\gamma}{m.n})^n.$$

Läßt man nun n unendlich groß sein, so ist analog mit dem in §. 129 vorgekommenen Ausdrucke

$$(5) \qquad y = \frac{1}{m} Q.e^{\frac{x\gamma}{m}}, \text{ oder wegen } \frac{1}{m} = \frac{f}{Q}$$

$$(6) \qquad y = f.e^{\frac{xf\gamma}{Q}},$$

welches die Gleichung einer Logistik ist, bei welcher die Längen die Abscissen und die zugehörigen Querschnitte die Ordinaten vorstellen.

§. 180. Betrachtet man die Ausdehnungen der Körper innerhalb der Grenze ihrer Elasticität, so gibt die Erfahrung hierüber den Satz, daß die Ausdehnungen im geraden Verhältnisse mit den ziehenden Gewichten und mit den Längen der Körper, aber im umgekehrten mit ihren Querschnitten sind. Man hat nemlich, wenn f und F die Querschnitte, l und L die Längen zweier prismatischer Körper sind, welche durch die Gewichte q und Q die Ausdehnungen a und A erhalten haben,

$$a : A = \frac{ql}{f} : \frac{QL}{F} \quad \text{oder}$$

$$A = \frac{af}{ql} \cdot \frac{QL}{F}.$$

Für dieselbe Materie ist $\frac{af}{ql}$ ein unveränderlicher Coefficient. Setzt man denselben $= \frac{1}{E}$ für die Ausdehnung, so ist

$$(7) \quad A = \frac{QL}{EF}$$

oder, weil $\frac{Q}{F}$ offenbar das Gewicht vorstellt, womit der Querschnitt $= 1$ gepreßt oder gedrückt wird, so ist, wenn man $\frac{Q}{F} = m'$ setzt,

$$(8) \quad A = m' \cdot \frac{L}{E}.$$

Für die Verkürzung a' durch q sei $\frac{a'f}{ql} = \frac{1}{E'}$ und daher, wenn A' die Verkürzung durch Q für die Länge L und den Querschnitt F vorstellt,

$$(9) \quad A' = \frac{QL}{E'F} = m' \cdot \frac{L}{E'}.$$

Da in (8) A, L Längen sind und m' ein Gewicht vorstellt, so ist auch E ein Gewicht oder eine Spannung und bezeichnet den Modul der Elasticität oder das Maß der Spannkraft des Körpers innerhalb der Elasticitätsgrenze. Dasselbe bedeutet E' für die Verkürzung.

Ist ferner p das durch Versuche ermittelte Gewicht, bei welchem der Körper für die Länge $L = 1$ die gröste Ausdehnung $= d$ noch innerhalb der Elasticitätsgrenze erhält, die also nach Beseitigung dieser Kraft p noch verschwindet; so ist p das gröste Tragvermögen, daher in (8) für $L = 1$, $A = d$ und $m' = p$

$$(10) \quad d = \frac{p}{E}.$$

Führt man endlich in der Formel (1) (§. 178) p statt m ein, so hat man

$$(11) \quad Q = p.F$$

die größtmögliche Tragkraft für den Querschnitt F; auch sieht man, daß $Q = p$ für $F = 1$ wird; also ist p die gröste Tragkraft für den Querschnitt $= 1$.

In der folgenden Tafel sind die aus Versuchen hervorgegangenen Werthe von m, p und E für einige Körper von 1 Wiener Quadratzoll Querschnitt in Wiener Pfunden angegeben und zwar um die großen Zahlen zu vermeiden, im 1000ten Theil, so daß jede Zahl der Tafel mit 1000 multiplicirt, den wahren Werth für m, p, E gibt.

Gattung des Körpers	Absolute Festigkeit m	Tragvermögen p	Elasticitäts-Modul E
Blei (gegossen)	1·59	1·24	62
Eisen (geschmiedet)	47 bis 57	17·59	24782
Eisen (gewalztes Blech)	45 „ 55·8	—	—
Eisen-(Draht)	79 „ 104	22·54	25773
Eisen (gegossen)	16 „ 25	11·15	13630
Kanonengut (Bronze)	23 „ 31	—	—
Kupfer (gegossen)	16·6	—	—
„ (gehämmert)	24·7 bis 32·2	—	—
„ (Draht)	34 „ 68	—	—
Messing (gegossen)	15·6	5·33	7930
„ (Draht)	41 bis 72	—	—
Stahl	97 „ 119	35·93	26020
Stahl-(Drath)	112 „ 149	—	—
Buche	9·9 „ 16	2·17	1239
Eiche	11·2 „ 18·6	3 44	1487
Esche	13 6 „ 17·4	3·37	1301
Fichte	8·7 „ 12·4	3·72	1747
Kiefer (Föhre)	12·4 „ 17·4	—	1487
Lärche	7·4 „ 8·7	1·77	922
Nußbaum	8 6 „ 10·6	—	—
Tanne	9·9 „ 11 2	3·22	1611
Ulme (Ruste)	12·4 „ 13 6	2·79	1152
Hanffeil (trocken)	6·2 „ 7·4	1 55	—
„ (naß)	4·6 „ 5·6	1·02	—
„ (gerheert)	—	1·18	—
Lederriemen (schwarze)	—	3·10	—

Hieraus sieht man, daß jedes Metall als Draht am meisten Festigkeit hat, welches daher kommt, weil bei dem Ziehen der Drähte die unvollkommenen Stellen mehr beseitigt werden und um so mehr, je dünner der Draht ist. Deswegen haben auch mehre dünne Drähte zusammen mehr Tragvermögen als dickere Drähte, deren Querschnitte zusammen jenen der dünnern gleich sind. Ausgeglühter Draht hat nur $\frac{3}{5}$ so viel Festigkeit als unausgeglühter. Hanfseile haben die größte Festigkeit, wenn sie durch die Drehung um $\frac{1}{5}$ kürzer als ihre Lützen sind. Drahtseile haben den Vortheil, daß sie bei derselben absoluten Festigkeit viel dünner, und auch leichter im Gewichte als Hanfseile sind.

Beispiele.

1) Man soll den Querschnitt einer 10 Fuß langen Hängsäule aus Tannenholz angeben, welche auf die Dauer 20000 Pfund Last mit Sicherheit zu halten vermag.

Nach Formel (11) ist $F = \frac{Q}{p} = \frac{20000}{3220} = 6{\cdot}21^{\square''}$, daher bei einem quadratischen Querschnitt die Seite $= \sqrt{6{\cdot}21} = 2\frac{1}{2}''$, wofür man, wenn die Säule jeder Witterung ausgesetzt bleiben soll, $3\frac{1}{2}''$ annehmen kann.

Berücksichtigt man auch das Gewicht der Säule, so ist nach meinem log. Handbuche der Cubikfuß Tannenholz $\gamma = 31$ Pfunden, also für die Länge L in F.

$$Q + \frac{LF\gamma}{144} = pF$$

und daraus $F = \frac{Q}{p - \frac{L\gamma}{144}} = \frac{20000}{3220 - 2{\cdot}1}$ unbedeutend größer als zuvor.

2) Es soll der Durchmesser D des Rundeisens zur Erzeugung einer Kette angegeben werden, welche der Spannung von 2500 Pfunden widersteht.

Hier ist $F = \frac{D^2\pi}{4} = 0{\cdot}7854D^2$ und für Schmiedeeisen $p = 17590$;

also $0{\cdot}7854D^2 = \frac{2500}{17590}$ und daher $D = 0{\cdot}425''$.

3) Eine schmiedeeiserne Stange von 4 Quadratzoll Querschnitt und 6 Fuß Länge wird durch 24000 Pfde gespannt, man soll ihre Längenausdehnung angeben.

Nach Formel (8) ist $A = m'.\frac{L}{E}$, dazu $m' = \frac{Q}{F} = \frac{24000}{4} = 6000$, $E = 24782000$; folglich $A = \frac{6}{24782} \cdot L = \frac{L}{4130} = \frac{1'}{689} = \frac{1}{5}$ Linie.

Die gröste Ausdehnung des Schmiedeeisens nach innerhalb der Elasticitätsgrenze ist aber

$$(10) \quad d = \frac{p}{E} = \frac{17590}{24782000} = \frac{1}{1409}$$

und da jene Ausdehnung $\frac{1}{4130}$ für $L=1$ nur $\frac{1}{3}$ von dieser ist, so könnte die Spannung 3 mal so groß, nemlich 72000 Pf. sein, bevor die Stange von den angegebenen Dimensionen eine bleibende Ausdehnung behalten würde.

4) Soll die Dicke einer Röhre bestimmt werden, die einem von innen nach außen durch Dampf, Wasser oder Pulvergas gleichförmig hervorgebrachten Drucke widersteht; so kann man annehmen, daß die Röhre, falls sie zerreißt, den Riß immer in der Richtung eines Halbmessers von der innern gegen die äußere Oberfläche erhält. Ist sonach r der innere Halbmesser der Röhre und x ihre Dicke, ferner q der Druck auf den Quadratzoll der innern Oberfläche; so ist offenbar $2rq$ die auf jeden innern Durchmesser senkrecht wirkende Kraft, welche die Röhre nach der Richtung dieses Durchmessers auseinander zu reißen strebt und der Erfolg wird derselbe sein, wenn man sich an dem Endpuncte eines jeden der zugehörigen beiden Halbmesser auf demselben senkrecht die Kraft rq wirkend denkt. Geschieht daher nach einem der Halbmesser der Riß, so wächst mit diesem bis zur äußern Oberfläche die reißende Kraft bis $q(r+x)$ und muß da mit der der Röhrendicke x entsprechenden absoluten Festigkeit mx im Gleichgewichte sein. Man hat demnach die Gleichung

$$q(r + x) = mx$$

und daraus die Röhrendicke

$$(11) \quad x = \frac{rq}{m-q}.$$

Wird z. B. bei dem Schuße aus einer Kanone die Spannung des Pulvergases im Bodenstücke $q = 1000$ Atmosphären $= 12500$ Pf., und im Mittel für Kanonengut $m = 27000$ Pf. angenommen; so ist

$$x = \frac{r.125}{270-125} = \frac{r.25}{29},$$

wofür man r bei Batteriekanonen annimmt.

Die relative Festigkeit.

§. 181. Wenn in CF (Fig. 124) ein parallelepipedischer Balken befestigt ist, der in seinem natürlichen Zustande die Richtung AB′ hat und man an dem freien Ende B′ eine Last Q anbringt; so wird der Balken die gebogene Gestalt CGDEG′F annehmen, indem seine obern Fasern ausgedehnt und die untern zusammengedrückt werden. Da die Ausdehnungen von oben nach unten und die Zusammendrückungen von unten nach oben abnehmen, so muß es im Innern des Balkens eine Schichte Fasern geben, die weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird. Ist AMNB diese Schichte, welche man die neutrale Axe nennen kann, obgleich sie die ganze Breite des Balkens einnimmt und betrachtet man davon einen sehr kleinen Theil $MN = s$, zieht in M und N die Normalen MO und NO; so ist GG′H′H ein Theil des Prisma, der vor der Biegung allenthalben die Länge s gehabt hat. Zieht man ferner durch N zu OG die Parallele JJ′, so ist $G'J' = GJ = s$.

Es sei nun b die Breite, $G'G = H'H = h$ die Höhe des Balkens und der Abstand $NH = h'$. Ferner sei KS eine Faserschichte, welche, von MN um $NL = u$ entfernt, die Ausdehnung SL erhalten hat, während eine von MN um g entfernte Faserschichte um a ausgedehnt worden ist; dann wird

$$(a) \quad g : a = u : SL, \text{ also } SL = \frac{au}{g}.$$

Nach Formel (7) (§. 180) findet man aber die Kraft q, welche die Ausdehnung SL bewirkt, aus

$$(b) \quad q = \frac{E.F}{s}.SL = \frac{E.F}{s} \cdot \frac{a}{g} \cdot u$$

und ihr statisches Moment in Bezug auf den unveränderlichen Punct N wird

$$(c) \quad uq = \frac{E.F}{s} \cdot \frac{a}{g} \cdot u^2,$$

wobei F den Querschnitt der Faserschichte vorstellt.

Denkt man sich sofort GMNH in n Faserschichten von unendlich kleiner Höhe oder Dicke δ getheilt, wodurch $h' = n\delta$ und $F = b\delta$ ist, setzt in (b) und (c) für u nach und nach δ, 2δ, 3δ, ... $n\delta$ und addirt die erhaltenen Ausdrücke, so erhält man im ersten Falle die Summe aller zwischen MN und GJ befindlichen ausdehnenden Kräfte und im zweiten die

Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf den Punct N. Man erhält nemlich für die Kräftensumme

$$\frac{E.F}{s} \cdot \frac{a\delta}{g}(1+2+3+\ldots+n) = \frac{E.F}{s} \cdot \frac{an^2\delta}{2g}\ (1+\tfrac{1}{n})$$

oder wegen $F = b\delta$ und $n^2\delta^2 = h'^2$, wenn man $\frac{1}{n}$ als unendlich klein hinwegläßt,

$$\text{(d)} \qquad \frac{E}{s} \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{bh'^2}{2}$$

und für die Summe der Momente dieser Kräfte

$$\frac{EF}{s} \cdot \frac{a}{g}\,\delta^2(1+2^2+3^2+\ldots+n^2) = \frac{Ea}{sg}.b.\frac{\delta^3 n^3}{3}\ (1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2})$$

oder

$$\text{(e)} \qquad \frac{E}{s} \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{bh'^3}{3}.$$

Eben so erhält man, wenn E' den Elasticitäts-Modul für das Zusammendrücken der Fasern unter ANB vorstellt, für die Summe der zusammendrückenden Kräfte

$$\text{(d')} \qquad \frac{E'}{s} \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{b(h-h')^2}{2}$$

und für die Summe ihrer Momente

$$\text{(e')} \qquad \frac{E'}{s} \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{b(h-h')^3}{3}.$$

Da die Kraft Q bei der Biegung sowohl die Ausdehnung als die Zusammendrückung hervorgebracht haben muß, so wird, wenn man ihren Abstand von N, nemlich $NT = x$ setzt, nach geschehener Biegung, also im Zustande des Gleichgewichtes, das Moment von Q der Summe der Momente (e) und (e') zusammen gleich sein. Man hat also

$$Qx = \frac{ab}{3sg}\,[Eh'^3 + E'(h-h')^3].$$

Nun aber darf bei der Ausdehnung und Zusammendrückung der Fasern die neutrale Axe, also auch N keinen Druck erleiden und da dieses nur stattfindet, wenn die Summe (d) der Kräfte oder ANB der Summe (d') der entgegengesetzten Kräfte unter ANB gleich, nemlich

$$Eh'^2 = E'(h-h')^2 \quad \text{oder}$$

$$Eh'^2(h-h') = E'(h-h')^3 \text{ ist; so hat man}$$

$$Qx = \frac{ab}{3sg}\,E[h'^3 + h'^2(h-h')] = \frac{abE}{3sg}\,h'^2h.$$

Endlich müssen sich der neutralen Axe **ANB** wegen die Ausdehnungen oder ihr wie die Verkürzungen unterhalb derselben verhalten; also muß auch in allen auf **ANB** normalen Querschnitten h' zu h ein unveränderliches Verhältniß haben. Setzt man sonach $h' = \varphi h$, wo φ das Verhältniß der Ausdehnsamkeit zur Zusammendrückbarkeit vorstellt, welches bei derselben Materie unveränderlich sein muß; so ist

$$(1) \qquad \frac{s.g}{a}.Q.x = E\varphi^2.\frac{bh^3}{3}.$$

Leicht begreift man, daß bei dem unendlich kleinen Stücke $\mathbf{MN} = s$ die beiden Normalen **OM** und **ON** gleich sind und sonach **MN** einen Kreisbogen vorstellt, der **O** zum Mittelpuncte und **OM** zum Halbmesser hat. Man nennt daher **O** den Krümmungsmittelpunct und **OM** den Krümmungshalbmesser.

Setzt man letzteren $= \rho$ und bemerkt, daß **MON** und **NSL** ähnliche Dreiecke sind, aus denen

$$\mathbf{OM} : \mathbf{MN} = \mathbf{SN} : \mathbf{SL} \quad \text{oder}$$
$$\rho : s = u : \mathbf{SL} = g : a \text{ folgt (Prop. a)},$$

so hat man $\frac{sg}{a} = \rho$, sofort

$$(2) \qquad xQ\rho = E\varphi^2\frac{bh^3}{3}.$$

Betrachtet man die zweiten Theile der Gleichungen (1) und (2), so findet man, daß dieselben für gleiche Parallelepipede unveränderlich sind, indem da die Elasticität, die Biegsamkeit und die Dimensionen des Körpers, wovon er abhängt, dieselben sind. Man nennt deswegen diesen Theil das Elasticitäts-Moment, welches wir hier mit

$$(3) \qquad W = E\varphi^2\frac{bh^3}{3}$$

bezeichnen wollen.

Ist demnach Q die Mittelkraft von mehren, auf den Balken wirkenden Kräften, also Qx die Summe ihrer Momente in Bezug auf einen normalen Querschnitt **H'NH** und setzen wir $Qx = M$; so hat man mit Bezug auf (2) und (3)

$$(4) \qquad \rho M = W;$$

d. h. für jeden normalen Querschnitt eines gebogenen Parallelepipeds ist das Product des Krümmungshalbmessers in das Moment der biegenden Kräfte, auf jenen Querschnitt bezogen, unveränderlich.

§. 182. Wenn man dem Balken eine solche Stärke gibt, daß er durch eine bestimmte Last nur wenig gebogen werden kann, wie es die Anwendung erfordert; so kann der Hebelsarm $NT = x$ von Q mit der Länge $NB = l$ für einerlei gelten. Setzt man daher in Formel (1) (vorig. §.) l statt x und berücksichtigt, daß nach Formel (8) (§. 180) $\frac{s}{a} = \frac{E}{m'}$ ist; so hat man

$$(5) \qquad l.Q = \frac{m'}{gE}.E\varphi^2.\frac{bh^3}{3}$$

oder wegen (3) (vorig. §.)

$$(6) \qquad l.Q = \frac{m'}{gE}.W.$$

Läßt man nun l für die ganze Länge **BNA** des Balkens gelten, so bietet die Formel (6) das Moment des Gewichtes Q, welches das Abbrechen an **CF** bewirkt, oder Q ist die relative Festigkeit des Balkens **FCDE**.

Da der Coefficient m' der absoluten Festigkeit von jenem der relativen, welcher durch wirkliche Brechungsversuche bestimmt wird, meist sehr abweicht; so wollen wir in der Folge statt m' den Brechungscoefficienten μ einführen.

Wird dabei die Ausdehnbarkeit der Zusammendrückbarkeit gleich angenommen; so ist in (5) $\varphi = \frac{1}{2}$ und $g = \frac{1}{2}h$, daher die relative Festigkeit des Parallelepipeds

$$(7) \qquad Q = \tfrac{1}{6}\mu.\frac{bh^2}{l};$$

d. h. es verhalten sich die relativen Festigkeiten parallelepipedischer Körper von derselben Materie wie ihre Breiten, die Quadrate ihrer Höhen und umgekehrt wie ihre Längen.

Ist das Gewicht G des Körpers mit zu beachten, dessen Schwerpunct sofort in seiner halben Länge liegt; so hat man die Momentengleichung

$$l.Q + \tfrac{1}{2}lG = \tfrac{1}{6}\mu bh^2,$$

folglich

$$(8) \qquad Q = \tfrac{1}{6}\mu\frac{bh^2}{l} - \tfrac{1}{2}G.$$

Diese Formel enthält auch den Fall, wenn nebst dem Gewichte Q am Ende des Balkens derselbe noch nach seiner ganzen Länge gleichförmig beschwert ist und diese Beschwerung sammt dem eigenen Gewichte mit G bezeichnet wird.

Anmerkung. Wenn in der Formel (7) b zur Höhe und h zur Breite genommen wird, so hat man für die relative Festigkeit desselben Körpers

$$Q' = \frac{1}{6}\mu\frac{b^2h}{l}, \text{ also } Q : Q' = h : b.$$

Ist daher $h > b$, so ist auch $Q > Q$ oder die relative Festigkeit eines Parallelepipeds wird größer sein, wenn es mit der schmalen Seite aufliegt; jedoch hat dieses seine Grenze für das Verhältniß der Breite b zur Höhe h, wie es die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe. Man soll aus einem kreisrunden Baumstamme vom Durchmesser $CA = D$ (Fig. 125) einen parallelepipedischen Balken aushauen, welcher bei bestimmter Länge die größte relative Festigkeit hat.

Lösung. Ist $AB = x$ die Breite und $AE = y$ die Höhe dieses Balkens, so muß wegen Formel (7) das Product $xy^2 = p$ den größten Werth erhalten.

Wegen $x^2 + y^2 = D^2$ hat man $y^2 = D^2 - x^2$, also

$$p = x(D^2 - x^2).$$

Soll x der Werth sein, wodurch p am größten wird; so muß für $x + e$ und für $x - e$ statt x der Werth für p jedesmal kleiner werden.

Für $x + e$ erhält man $x(D^2 - x^2) - e[3x^2 - D^2 + e(3x + e)]$,

„ $x - e$ „ „ $x(D^2 - x^2) - e[D^2 - 3x^2 + e(3x - e)]$.

Da diese beiden Ausdrücke für die Abnahme von e sich immer mehr nähern, zugleich aber kleiner als der Ausdruck $x(D^2 - x^2)$ bleiben sollen, so kann diesem nur Genüge geschehen, wenn

$$3x^2 - D^2 = 0,$$

$$\text{also } x = \frac{D}{3}\sqrt{3}, \text{ und wegen } y^2 = D^2 - x^2$$

$$y = \frac{D}{3}\sqrt{6}$$

ist. Man hat demnach $x : y = 1 : \sqrt{2}$ oder nahe $= 5 : 7$.

Durch Construction erhält man x und y, wenn man den Durchmesser $AC = D$ in 3 gleiche Theile theilt und in den Theilungspuncten die Senkrechten DE und FB errichtet.

§. 183. Wenn der an einem seiner Enden befestigte Körper ein gerader Cylinder vom Querschnitte AMBM′ (Fig. 126) ist, von welchem die horizontalen Durchmesser AB aller dieser Kreisschnitte in der neutralen Axe liegen und man sich von diesem Cylinder ein sehr kleines Parallelepiped vom Querschnitte Mmm′M′ senkrecht auf AB denkt, indem dieser

Schnitt als ein Rechteck angesehen werden kann; so ist das Elasticitäts-moment dieses schmalen Körpers nach Formel (3) (§. 181) für $\varphi = \frac{1}{2}$

$$w = \frac{E}{4} . \mathrm{Pp} . \frac{\mathrm{MM}'^3}{3} = \tfrac{2}{3} E . \mathrm{Pp} . \mathrm{PM}^3 .$$

Setzt man $\mathrm{CA} = \mathrm{CB} = r$ und $\mathrm{CP} = x$, so ist bekanntlich

$$\mathrm{PM} = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

also

$$w = \tfrac{2}{3} E . \mathrm{Pp} . r^3 \left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{x^2}{r^2} + \tfrac{3}{8}\frac{x^4}{r^4} + \tfrac{1}{16}\frac{x^6}{r^6} + \tfrac{3}{8.16}\frac{x^8}{r^8} + \tfrac{3}{8.32}\frac{x^{10}}{r^{10}} + \ldots\right).$$

Denkt man sich nun CP in n unendlich kleine gleiche Theile $\mathrm{Pp} = \delta$ getheilt, so daß $x = n\delta$ ist, setzt $x = \delta,\ 2\delta,\ 3\delta, \ldots n\delta$ und addirt die erhaltenen Ausdrücke, so erhält man das Elasticitätsmoment W des Körpers vom Querschnitte EMM'D aus

$$W = \tfrac{2}{3} E \delta r^3 \left\{ \begin{array}{l} n - \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{r^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \\ + \frac{3}{8}\frac{\delta^4}{r^4}(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) \\ + \frac{1}{16}\frac{\delta^6}{r^6}(1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Aber es ist bekanntlich für ein unendlich großes n

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1},$$

sofort

$$W = \tfrac{2}{3} E r^3 \left[n\delta - \frac{1}{2}\frac{n^3\delta^3}{r^2} + \frac{3}{8}\frac{n^5\delta^5}{5r^4} + \frac{1}{16}\frac{n^7\delta^7}{7.r^6} + \frac{3}{8.16}\frac{n^9\delta^9}{9.r^8} + \ldots\right]$$

oder wegen $n\delta = x$

$$W = \tfrac{2}{3} E r^3 \left[x - \frac{x^3}{2r^2} + \frac{3x^5}{8.5.r^4} + \frac{x^7}{16.7.r^6} + \frac{3x^9}{8.16.9.r^8} + \ldots\right].$$

Durch Zerlegung der Glieder dieser Reihe erhält man auch

$$W = \tfrac{2}{3} E r^3 x \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{8}\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^4}{2.4.r^4} - \frac{3x^6}{2.4.6.r^6} - \frac{3.5x^8}{2.4.6.8.r^8} - \ldots\right) \\ -\frac{1}{4}\frac{x^2}{r^2}\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^4}{2.4.r^4} - \frac{3x^6}{2.4.6.r^6} - \frac{3.5x^8}{2.4.6.8.r^8} - \ldots\right) \\ +\frac{3}{8}\left(1 + \frac{x^2}{2.3.r^2} + \frac{3x^4}{2.4.5.r^4} + \frac{3.5.x^6}{2.4.6.7.r^6} + \ldots\right) \end{array} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{12} E r^3 x. \left[\left(5 - \frac{2x^2}{r^2}\right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} + \frac{3r}{x} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{r} \right].$$

Für $x = r$, wo $\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{r} = \frac{\pi}{2}$ wird, erhält man das Elasticitäts-Moment des halben Cylinders und wenn dieses gleich doppelt genommen wird, jenes des ganzen Cylinders

$$(9) \qquad W = \tfrac{1}{4} E r^4 \pi.$$

Da hier vermöge §. 182 $g = \frac{1}{2} DE = r$ ist, so wird, wenn man die Länge des Cylinders $= l$ setzt, die relative Festigkeit desselben nach Formel (6) mit Rücksicht, daß μ statt m' gilt,

$$(10) \quad Q = \frac{\mu}{4} \frac{r^3 \pi}{l}.$$

Zur Uebung wollen wir hier einige speciellen Fälle betrachten.

1) Vergleicht man die relative Festigkeit Q des Cylinders mit jener Q' eines parallelepipedischen Balkens von derselben Länge und demselben Volum, also von demselben Inhalte des Querschnittes, wenn letzterer dabei für die größte Festigkeit construirt ist (Aufgabe vorig. §.); so ist nach diesen Voraussetzungen

$$bh = r^2 \pi, \quad \text{und}$$

$$h = b\sqrt{2}, \quad \text{also}$$

$$h^2 = r^2 \pi \sqrt{2}, \; b = \frac{r\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{2}}, \; \text{und} \; bh^2 = r^3 \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{2}, \; \text{sofort}$$

$$Q' = \tfrac{1}{6} \mu \frac{bh^2}{l} = \tfrac{1}{6} \mu \frac{r^3 \pi^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{2}}{l}. \; \text{Man hat daher}$$

$$Q : Q' = 3 : 2\sqrt{\pi}\sqrt{2} = 3 : 4{\cdot}2156 \text{ oder nahe} = 5 : 7;$$

d. h. bei demselben Aufwande an Materie hat der parallelepipedische Balken weit mehr relative Festigkeit als der cylindrische von derselben Länge.

2) Sucht man die relative Festigkeit eines hohlen Cylinders von der Länge l, dessen äußerer Halbmesser R, innerer r ist, so hat man nach Formel (9) das Elasticitäts-Moment

$$W = \tfrac{1}{4} E (R^4 - r^4) \pi]$$

und weil hier $g = R$ ist; so ist nach (6) für $m' = \mu$

$$Q = \frac{\mu}{4} \frac{(R^4 - r^4)\pi}{Rl}.$$

Vergleicht man diese Festigkeit mit der Q_1 eines vollen Cylinders von derselben Länge l und vom Halbmesser ρ, wofür man

$$Q_1 = \frac{\mu}{4}\,\frac{\rho^3\pi}{l} \text{ erhält, so ist}$$

$$Q : Q_1 = (R^4 - r^4) : R\rho^3.$$

Hieraus folgt:

a) für gleiche Cubikinhalte der beiden Cylinder oder für $\rho^2 = R^2 - r^2$

$$Q : Q_1 = (R^2 + r^2) : R\sqrt{R^2 - r^2} = (1 + \frac{r^2}{R^2}) : \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}$$

und somit ist $Q > Q_1$;

b) für gleiche Festigkeit beider Cylinder oder für $R^4 - r^4 = R\rho^3$ ist, wenn V das Volum des hohlen Cylinders und V_1 jenes des vollen ist,

$$V : V_1 = (R^2 - r^2) : \rho^2 = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

nemlich $V < V_1$. Man erkennt daraus die große Festigkeit der Halme, Stängel, Knochen, Röhren, u. s. w. in Vergleich massiver Körper von derselben Materie und Masse.

§. 184. Da bei einem an dem einen Ende befestigten Körper das Moment für das Abbrechen in Bezug auf einen Querschnitt um so größer wird, je entfernter letzterer von dem freien Ende ist; so muß auch, wie schon erwähnt wurde, der Bruch des Körpers von durchaus gleichen Querschnitten immer an seiner Befestigungsfläche geschehen. Soll daher die Gestalt des Körpers bestimmt werden, der in allen seinen Querschnitten gleiche relative Festigkeit darbietet, so müssen diese Querschnitte vom Ende gegen die Befestigung zu immer größer werden. Nehmen wir an, diese Querschnitte seien ähnliche Figuren und bei dem größten derselben, nemlich bei der Befestigungsfläche habe, wenn diese ein Rechteck ist, b, h und wenn sie ein Kreis ist, r die bisherige Bedeutung.

1) Es sei nun CBA (Fig. 127) der bei CB befestigte Körper von der Länge l und vom Ende herein in der Entfernung $AP = x$ sei ein Querschnitt geführt, welcher als Rechteck die Höhe y und Breite z oder als Kreis den Halbmesser y hat; so muß, da an diesem Schnitte dieselbe Festigkeit wie an CB sein soll,

für Rechtecke

$$(a) \qquad \frac{bh^2}{l} = \frac{zy^2}{x}$$

und für Kreise

$$(b) \qquad \frac{r^3}{l} = \frac{y^3}{x}$$

stattfinden.

α) Haben demnach alle Rechtecke gleiche Breite, so ist $z = b$ und aus (a) folgt

$$y^2 = \frac{h^2}{l} \cdot x;$$

d. h. es ist diesfalls jeder verticale Durchschnitt längs des Balkens eine gemeine Parabel, deren Scheitel in A liegt und deren Parameter $\frac{h^2}{l}$ ist.

β) Werden aber die Breiten der Rechtecke im Verhältnisse ihrer Entfernungen von A angenommen, so daß $l : b = x : z$ oder $z = \frac{bx}{l}$ ist; so hat man aus Gleichung (a)

$$y = h,$$

d. h. in diesem Falle hat der Balken durchaus dieselbe Höhe h und bildet sonach einen nach A auslaufenden Keil, dessen Schärfe daselbst vertical ist.

γ) Aus (b) folgt

$$y^3 = \frac{r^3}{l} \cdot x$$

und dieses zeigt, daß für Kreisquerschnitte die Halbmesser derselben eine cubische Parabel bilden.

2) Sind die Querschnitte des Balkens (Fig. 128) von gleicher Breite und ist seine obere ebene Fläche gleichförmig beschwert, dabei die Last auf die Einheit seiner Länge $= q$; so ist für das Abbrechen des Balkens an CB

$$\tfrac{1}{2} ql = \tfrac{1}{6}\mu \cdot \frac{bh^2}{l}$$

und an PM

$$\tfrac{1}{2} qx = \tfrac{1}{6}\mu \cdot \frac{by^2}{x},$$

daher durch Elimination von q aus beiden Gleichungen

$$y = \frac{h}{l} x,$$

d. h. der Balken hat diesfalls die Gestalt eines Keiles, dessen Schärfe in A horizontal ist.

3) Würde man aber annehmen, daß die obere ebene Fläche ein gleichschenkliges Dreieck bildet, ihre Spitze in A hat und beschwert man dieselbe gleichförmig, so daß auf die Einheit der Fläche die Last q drückt; so hat man für das Abbrechen bei CB, wo der Schwerpunct der Last $\frac{1}{3}l$ von C entfernt ist,

$$\tfrac{1}{3}l.\frac{bl}{2}.q = \tfrac{1}{6}\mu.\frac{bh^2}{l} \text{ oder } q = \mu.\frac{h^2}{l^3}$$

und für das Abbrechen bei PM, wo die Breite $= z$ ist,

$$\tfrac{1}{3}x.\frac{xz}{2}.q = \tfrac{1}{6}\mu.\frac{zy^2}{x} \text{ oder } q = \mu.\frac{y^2}{x^3}.$$

Die Vergleichung beider Werthe von q gibt

$$y^2 = \frac{h^2}{l^3}.x^3,$$

wornach also die untere Linie des Balkens eine cubische Parabel BNA bildet.

§. 185. Gehen wir jetzt zu den Fällen über, wo der Balken an beiden Enden unterstützt ist.

Liegt dabei der Balken AB (Fig. 129) frei auf den Unterlagen M und N, und wirkt ein Gewicht Q auf ihn; so ist, wenn man $AC = \lambda$, $BC = \lambda'$ setzt, nach den frühern Bezeichnungen $\lambda + \lambda' = l$.

Durch Q wird nun bekanntlich auf A und B der Druck

$$x = \frac{\lambda'}{l}.Q \text{ und } y = \frac{\lambda}{l}.Q$$

ausgeübt. Denkt man sich sonach in C den Balken gegen aufwärts unterstützt, indem man x und y aufwärts wirkend annimmt; so werden diese beiden Kräfte im Gleichgewichte sein, sofort um C keine Drehung gestatten. Da dann aber entweder die Kraft y mit der Unterstützung in C als die Befestigung des Balkens in diesem Puncte und x als die abbrechende Kraft oder x mit der Unterstützung in C als die Befestigung des Balkens und y als die abbrechende Kraft angesehen werden kann; so hat man entweder

$$x = \frac{\lambda'}{l}.Q = \tfrac{1}{6}\mu.\frac{bh^2}{\lambda}$$

oder

$$y = \frac{\lambda}{l}.Q = \tfrac{1}{6}\mu.\frac{bh^2}{\lambda'}$$

und man findet auch aus beiden Gleichungen denselben Werth

$$(11)\quad Q = \tfrac{1}{6}\mu.\frac{blh^2}{\lambda\lambda'} = \tfrac{1}{6}\mu.\frac{blh^2}{\lambda(l-\lambda)}.$$

Ist **E** die Mitte des Balkens und setzt man $CE=d$, also $\lambda=\frac{1}{2}l-d$; so ist

$$(12)\quad Q = \frac{4}{6}\mu\cdot\frac{blh^2}{l^2-4d^2}.$$

a) Befindet sich das Gewicht Q in der Mitte des Balkens, in welchem Falle $d=0$ ist; so wird der Nenner in (12) am größten, daher

$$(13)\quad Q = \frac{4}{6}\mu\cdot\frac{bh^2}{l}$$

am kleinsten. Noch zeigt sich daraus in Vergleich mit Formel (7) (§. 182), daß die relative Festigkeit eines, an seinen beiden Enden frei aufliegenden und in seiner Mitte beschwerten Balkens 4mal so groß ist, als wenn derselbe Balken an einem Ende befestigt und an dem andern beschwert wäre.

b) Berücksichtigt man noch das Gewicht G des Balkens, von welchem die Längen λ und λ' die Gewichte g und g' haben sollen, so wird $\frac{1}{2}g$ von **A** und $\frac{1}{2}g$ von **C**, ferner $\frac{1}{2}g'$ von **B** und $\frac{1}{2}g'$ von **C** getragen. Es wird aber $\frac{1}{2}g$ in **A** und $\frac{1}{2}g'$ in **B** durch diese Unterlagen aufgehoben, somit wirkt für das Abbrechen in **C** blos $\frac{1}{2}(g+g')=\frac{1}{2}G$ und man hat sonach

$$(14)\quad Q+\tfrac{1}{2}G = \tfrac{4}{6}\mu.\frac{blh^2}{l^2-4d^2}.$$

c) Soll der Balken durch sein eigenes Gewicht G abgebrochen werden können, oder ist eine Last G auf demselben gleichförmig vertheilt; so ist $Q=0$ und $d=0$, sofort

$$(15)\quad G = \tfrac{8}{6}\mu.\frac{bh^2}{l};$$

es kann nemlich in Vergleich von (13) der Balken doppelt so viel gleichförmig vertheilte Last tragen, als wenn dieselbe in seiner Mitte angehängt wäre.

§. 186. Um die Gestalt eines an beiden Enden frei aufliegenden Balkens (Fig. 130) zu bestimmen, der an jedem Puncte demselben Gewichte Q gleich widersteht, wenn seine Querschnitte Rechtecke von derselben Breite b sind; sei **C** die Mitte des Balkens, $CA = CB = \frac{1}{2}l$, $CD = h$ und für irgend einen Querschnitt **PM** setze man $CP = x$, $PM = y$. Nach Formel (12) ist sonach

$$Q = \tfrac{1}{6}\mu.bl.\frac{y^2}{(\frac{1}{2}l)^2-x^2}$$

und daraus

$$y^2 = \frac{6Q}{\mu bl}\left[\left(\tfrac{1}{2}l\right)^2 - x^2\right].$$

Aber für $x = 0$ ist $y = h$, also

$$\frac{h^2}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \frac{6Q}{\mu bl} \text{ und daher}$$

$$y^2 = \frac{h^2}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} \cdot \left[\left(\tfrac{1}{2}l\right)^2 - x^2\right].$$

Es ist sonach die Begrenzung ADB eine Ellipse, deren halbe große Axe $CA = CB = \frac{1}{2}l$ und halbe kleine Axe $CD = h$ ist.

Für $x = \frac{1}{2}l$ ist $y = 0$, wonach sich also der Balken bei A und B in eine Schärfe endigt. Da dieses in der Ausübung nicht sein kann, so gibt man dem Balken an den Enden eine gewisse Höhe $AA' = BB' = c$. Setzt man dieses für y in jene Gleichung der Ellipse, so erhält man daraus

$$x = \frac{\frac{1}{2}l}{h}\sqrt{h^2 - c^2} = C'a = C'b,$$

so daß also der Balken die Form AA'aDbB'B erhält.

§. 187. Ist der Balken mit beiden Enden so fest gehalten, daß vor dem Brechen keine Ausdehnung und keine Zusammendrückung der Fasern eintreten kann; so wird bei hinlänglicher Größe von Q das Brechen an den drei Stellen A, B, C zugleich geschehen (Fig. 129).

Sind q, q', q'' die brechenden Kräfte an diesen drei Stellen, so ist nach den vorigen Bezeichnungen

$$q = \tfrac{1}{6}\mu\frac{bh^2}{\lambda},\ q' = \tfrac{1}{6}\mu\frac{bh^2}{\lambda'},\ q'' = \tfrac{1}{6}\mu\frac{blh^2}{\lambda\lambda'}$$

und da $Q + \frac{1}{2}G$ diese drei Brüche zugleich bewirkt,

$$Q + \tfrac{1}{2}G = q + q' + q'' = \tfrac{1}{6}\mu bh^2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \frac{l}{\lambda\lambda'}\right)$$

oder

$$(16) \qquad Q + \tfrac{1}{2}G = \tfrac{2}{6}\mu\frac{blh}{\lambda\lambda'} = \tfrac{8}{6}\mu\frac{blh^2}{l^2 - 4d^2}.$$

a) Ist der Balken blos in seiner Mitte beschwert, so ist $d = 0$ und

$$(17) \qquad Q + \tfrac{1}{2}G = \tfrac{8}{6}\mu\frac{bh^2}{l}.$$

b) Ist der Balken gleichförmig mit G beschwert, so ist in (17) $Q = 0$, also

$$(18) \qquad G = \tfrac{16}{6}\mu\frac{bh^2}{l}.$$

Vergleicht man (16) mit (14), (17) mit (13), (18) mit (15); so sieht man, daß in diesen Fällen der beiderseits festgehaltene Balken doppelt so viel zu tragen vermag, als wenn seine beiden Enden frei aufliegen.

Anmerkung. Hat der beiderseits befestigte Balken eine Neignng φ gegen den Horizont und zerlegt man Q und $\frac{1}{2}G$ in die beiden Kräfte nach der Länge des Balkens und darauf senkrecht; so werden blos letztere Seitenkräfte $Q\cos\varphi$ und $\frac{1}{2}G\cos\varphi$ das Brechen bewirken und es sind daher in den Formeln von (14) bis (18) diese Größen an die Stelle von Q und $\frac{1}{2}G$ zu setzen.

§. 188. In der folgenden Tafel ist der Brechungs-Coefficient μ für einige Körper aus Versuchen in Wiener Pfunden angegeben, wobei man jede Zahl mit 1000 zu multipliciren hat. Für die Anwendung sind die Dimensionen der Körper in Wiener Zollen ausgedrückt anzunehmen.

Gattung des Körpers	Brechungs-Coefficient μ	Gattung des Körpers	Brechungs-Coefficient μ
Schmiedeeisen	70 bis 90	Esche	9·6 bis 11·8
Gußeisen	22 „ 37	Fichte	6·8 „ 11
Kanonengut	90 „112	Kiefer	5·6 „ 14
Kalkstein	0·62„ 1·48	Lärche	4·3 „ 8·3
Sandstein	0·5 „ 0·74	Tanne	5·8 „ 11·8
Ziegelsteine	0·15„ 0·23	Ulme	4·8 „ 10 5
Buche	7·8 „ 10·4	Eiche	7·6 „ 14·9

Zur großen Sicherheit gegen das Brechen nimmt man anstatt μ bei Hölzern $\frac{1}{10}\mu$, bei Metallen $\frac{1}{2}\mu$ oder $\frac{1}{3}\mu$ und für jene Körper, welche in dieser Tafel nicht vorkommen, kann man zur Sicherheit gegen das Brechen für μ die Werthe von p aus der Tafel §. 180 nehmen.

Die rückwirkende Festigkeit.

§. 189. Bei der rückwirkenden Festigkeit denken wir uns die prismatischen Körper vertical stehend und auf ihr oberes Ende Gewichte gelegt. Ist dabei die Höhe des Körpers geringer oder nicht viel größer als die Seiten seines Querschnittes, so wird bei hinlänglicher Kraft eine Zerdrückung

oder Zerquetschung des Körpers ohne vorhergehende Biegung desselben eintreten. Bei größerer Höhe des Körpers wird aber durch die Kraft zuerst eine Biegung, dann das Zerdrücken des Körpers bewirkt.

Die Kraft für das Zerdrücken kann man der Erfahrung zufolge dem Querschnitte des Körpers proportional annehmen, vorausgesetzt, daß der Querschnitt gleichförmig gedrückt wird. Ist nemlich Q diese Kraft in Wiener Pfunden, F der Querschnitt des Körpers in W. Quadratzollen und μ' der Zerdrückungswiderstand bei 1 Quadratzoll; so hat man

$$(1) \qquad Q = \mu'.F.$$

Die in der folgenden Tafel angegebenen Zahlen geben mit 1000 multiplicirt den Werth von μ' in Wiener Pfunden.

Gattung des Körpers	Zerdrückungs-Widerstand μ'	Gattung des Körpers	Zerdrückungs-Widerstand μ
Basalt	19·8 bis 24·8	Ziegelstein	0·5 bis 2·1
Granit	5 „ 8·7	Eichenholz	4·7 „ 5·7
Kalkstein	1·24 „ 5	Tannenholz	5·7 „ 6·7
Marmor	3·7 „ 9·9	Gußeisen	62 bis 124
Sandstein	1·24 „ 5		

Zur Sicherung gegen das Zerdrücken hat man bei Steinen und Hölzern $\frac{1}{10}\mu'$, bei Gußeisen $\frac{1}{5}\mu'$ statt μ' zu nehmen.

Zudem ist aus Erfahrung die Zerdrückungsfestigkeit größer, je kleiner der Umfang des Querschnittes gegen den Inhalt desselben ist; daher bei gleichem Inhalte des Querschnittes am größten für den Kreis und in Bezug der Höhe zur Querschnittsfläche wird die Festigkeit bedeutender, je mehr der Körper sich dem Würfel nähert.

§. 190. Bei dem Zerdrücken nimmt die neutrale Axe eines Stabes in den meisten Fällen die Biegung **BMA** an (Fig. 131), so daß die Richtung des biegenden Gewichtes Q durch den Befestigungspunct **A** geht.

Durch eine etwas weitläufige Rechnung findet man für die Zerdrückungsfestigkeit des Stabes

$$(2) \qquad Q = \frac{\pi^2.W}{l^2},$$

wobei l die Länge **BA** oder wegen geringer Biegung die **BMA** vorstellt.

Nach dieser Formel findet man:

1) für ein Parallelepiped, bei welchem $W = \frac{E}{12}.bh^3$ ist (§. 181. 3)

für $\varphi = \frac{1}{2}$

$$(3) \qquad Q = \frac{E}{12} \cdot \frac{\pi^2 b h^3}{l^2},$$

wobei h die kleinere Seite des Querschnittes bedeutet.

Es verhalten sich also die Zerdrückungsfestigkeiten von Balken gleicher Materie wie die dritten Potenzen der Dicken (kleinern Seiten), wie die einfachen Breiten und umgekehrt wie die Quadrate der Längen.

2) Für Cylinder, deren Querschnitt ein Kreis ist, hat man

$$W = \tfrac{1}{4} E r^4 \pi$$

(§. 183. Gl. 9), sofort nach Formel (2)

$$(4) \qquad Q = \frac{E}{4} \cdot \frac{\pi^3 r^4}{l^2}.$$

Nach diesem verhalten sich bei Cylindern von derselben Materie die Zerdrückungsfestigkeiten wie die 4ten Potenzen der Halbmesser und umgekehrt wie die Quadrate der Längen.

Zur Bestimmung von dem Gewichte Q, welches die Säule mit Sicherheit zu tragen vermag, nimmt man statt E bei Hölzern $\frac{1}{5}E$ bis $\frac{1}{10}E$, bei Metallen $\frac{1}{4}E$ bis $\frac{1}{6}E$.

Beispiel. Wenn ein vertical stehender Balken aus Eichenholz, dessen Länge $l = 16$ Fuß ist, eine Belastung von 18000 Pfunden mit Sicherheit tragen soll; so findet man nach Formel (3) für die Dimensionen h und b seines Querschnittes

$$bh^3 = \frac{12Ql^2}{\frac{1}{5}E.\pi^2},$$

also nach der Tafel §. 180

$$bh^3 = \frac{12.18000(16.12)^2}{197400.9 \cdot 8696} = 2712 \cdot 79.$$

Da $h \gtreqless b$ ist, so hat man, wenn man $b = h$ nimmt, $b = h = 7 \cdot 22''$ und für die Querschnittsfläche $bh = 52 \cdot 13^{\square''}$.

Nimmt man aber $h = 5''$ an, so ergibt sich $b = 21 \cdot 7''$, also $bh = 108 \cdot 5^{\square''}$ größer als das Doppelte im vorigen Falle, ohne größere Festigkeit.

Anmerkung. Für den Anfänger dürfte es nicht ohne Interesse sein, die Stärke der Stützen bei dem Artillerie-Hebzeuge zu bestimmen, damit sie einer gewissen Last auf längere Dauer zu widerstehen vermögen. Hiezu ist die Last blos in die vier Seitenkräfte nach den Richtungen der Stützen

zu zerlegen, wo jede solche Kraft die rückwirkende Festigkeit der betreffenden Stütze in Anspruch nimmt; nur ist bei den Pfannenstützen auch noch der von Kraft und Last hervorgebrachte Druck der Welle zu berücksichtigen.

Die Drehungsfestigkeit.

§. 191. Wenn ein prismatischer Körper AB (Fig. 132) mit einer seiner Endflächen AA′ festgehalten wird und am andern Ende durch eine Kraft P mittels des Hebelsarmes $cD = R$ eine Verdrehung um die Axe Cc erleidet, indem der Durchmesser BB des äußern Normalschnittes in die Lage B′B′ gebracht wird; so werden die zu BB parallelen Durchmesser aller andern Normalschnitte eine desto geringere Lagenveränderung erfahren, je näher sie der Befestigungsfläche AA′ liegen, während der Durchmesser dieser Fläche seine Lage gar nicht verändert. Man nennt den Winkel BcB′, welchen der Durchmesser der äußersten Fläche beschreibt, den Drehungswinkel.

Ohne uns in weitläufige Untersuchungen über die drehende Festigkeit einzulassen, wollen wir hier blos einige der wichtigsten Resultate anführen.

1) Wird bei einem Cylinder vom Halbmesser r und von der Länge l der Drehungswinkel $= \omega$ und der Coefficient der Verdrehung $= \ell$ gesetzt; so erhält man das Torsionsmoment

$$(1) \qquad PR = \tfrac{1}{2}\ell . \frac{\omega}{l} r^4 \pi .$$

Eben so ist für einen hohlen Cylinder, dessen Halbmesser r_1 und r sind,

$$(2) \qquad PR = \tfrac{1}{2}\ell . \frac{\omega}{l} (r_1^4 - r^4)\pi .$$

Soll nun der hohle Cylinder mit dem massiven vom Halbmesser r gleiche Materie und Masse haben; so ist $r_1^2 - r^2 = r^2$ oder $r_1^2 = 2r^2$, mithin in (2)

$$(3) \qquad PR = \tfrac{1}{2}\ell . \frac{\omega}{l} . \pi . 3r^4 .$$

Der Vergleich der Werthe von ω in (1) und (3) zeigt, daß ein hohler Cylinder, dessen innerer Halbmesser eben so groß ist als der eines gleich langen, massiven Cylinders von derselben Materie und Masse, durch dieselbe Kraft nur $\frac{1}{3}$ mal so viel gedreht wird als letzterer.

2) Bei einem Parallelepipede, dessen Grundfläche ein Quadrat von der Seite a ist, erhält man für das Torsionsmoment

$$(4) \qquad PR = \tfrac{1}{6} t . \frac{\omega}{l} a^4 .$$

Die nachfolgende Tafel enthält die Zahlen, welche mit 1000 multiplicirt die Werthe t in Wiener Pfunden geben, wobei die Dimensionen der Körper in Wiener Zollen und die Torsionswinkel in Sexagesimalgraden zu verstehen sind.

Gattung des Körpers	t. in W. Pfden $(\frac{1}{1000})$	Gattung des Körpers	t in W. Pfden $(\frac{1}{1050})$
Schmiedeisen	129 bis 178	Esche	1·845
Gußeisen	85·7 „ 87·7	Fichte	0·87 bis 1·36
Stahl	147·6 „ 180·9	Kiefer	1·24
Buche	1·932	Lärche	1·722
Eiche	1·09 bis 1 8	Tanne	1·02 bis 1·86
Erle	1·476	Ulme (Ruste)	1·116

Beispiel. Um die Verdrehung einer schmiedeeisernen cylindrischen Welle von $l = 220''$ Länge und $r = 1{\cdot}5''$ Halbmesser zu finden, wenn das eine ihrer Enden ein Rad von $R = 11''$ Halbmesser trägt, an dessen Umfang eine Kraft $P = 110$ Pf. wirkt; so hat man, wenn in Bezug auf die Tafel $t = 161000$ angenommen wird, nach Formel (1)

$$\omega = \frac{2lPR}{t\pi r^4} = 0{\cdot}21 \text{ Graden} = 12\tfrac{1}{2} \text{ Minuten}.$$

Versuchen zufolge soll der Drehwinkel bei hölzernen und eisernen Wellen nicht über 7 Minuten betragen dürfen. Man müßte also in unserm Falle $r > 1{\cdot}5$ annehmen, um das Zerdrehen der Welle zu beseitigen.

§. 192. Wenn bei der Verdrehung die von der Axe entferntesten Fasern nicht mehr nachgeben können, ohne daß die Trennung derselben erfolgt, so ist dieses die völlige Zerdrehung des Körpers.

Bezeichnet für den Augenblick der Zerdrehung des Körpers T den Widerstand auf die Einheit seiner Querschnittsfläche bezogen; so findet man für einen Kreiscylinder vom Halbmesser r

$$(5) \qquad PR = T . \frac{\pi r^3}{2};$$

d. h. bei Cylindern von gleicher Materie sind die statischen Momente der Kräfte, welche die Zerdrehung bewirken, im Verhältnisse der dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

Ist der normale Querschnitt ein Quadrat, dessen Seite a ist; so hat man

$$(6) \qquad PR = T.\frac{a^3}{3\sqrt{2}},$$

welches für zwei Prismen von derselben Materie und quadratischem Querschnitte einen ähnlichen Satz wie bei Cylindern gibt.

Für den Bruch durch Verdrehung hat man folgende Werthe des Coefficienten T in W. Pfunden, bezüglich auf Dimensionen in W. Zollen; nur ist jede Zahl mit 1000 multiplicirt der Werth von T.

Gattung des Körpers	Werth von T $(\frac{1}{1000})$	Gattung des Körpers	Werth von T $(\frac{1}{1000})$
Gußeisen	24·8 bis 55·7	Messing	26·6
Schmiedeeisen	55·6	Kupfer (gegossen)	24·5
Stahl	98·9	Zinn	8·15

Beispiel. Eine vertical stehende, cylindrische gußeiserne Welle trägt an ihrem obern Ende ein Rad vom Halbmesser $R = 26''$, welches einen Widerstand von $P = 1600$ W. Pf. zu überwinden hat; wie groß ist der Halbmesser r der Welle zu nehmen?

Nach Formel (5) ist

$$r = \sqrt[3]{\frac{2PR}{T\pi}}$$

und wenn man der Sicherheit wegen für T blos den 10ten Theil $= 2480$ aus der Tafel nimmt; so hat man

$$r = \sqrt[3]{\frac{2.1600.26}{2480.\frac{22}{7}}} = 2{\cdot}2''.$$

Anmerkung. Ausführlicheres über jede Art Festigkeit kann man in den Werken von Eytelwein, Kayser, Ruhlmann, u. m. a. nachlesen.

Drittes Hauptstück.

Die Dynamik oder die Gesetze der Bewegung fester Körper sammt Anwendung auf Maschinen.

Erster Abschnitt.

Von der Bewegung der Körper im Allgemeinen.

§. 193. Unter der Bewegung eines materiellen Punctes versteht man (§. 6) die Veränderung der Lage desselben in Hinsicht auf ein angenommenes Coordinatensystem. Damit nun eine Bewegung erfolge, muß eine Kraft oder ein System sich nicht Gleichgewicht haltender Kräfte auf den materiellen Punct wirken. Um aber von einem Orte zu einem andern zu gelangen, muß der bewegte materielle Punct alle Zwischenpuncte des Raumes durchschreiten, die zwischen den beiden Örtern in der ununterbrochenen Verbindung zu einer Linie gedacht werden können, d. h. entweder eine gerade oder eine krumme Linie (Bahn) beschreiben, welche man den zurückgelegten Weg desselben nennt und wonach die Bewegung selbst entweder eine gerad- oder krummlinige heißt. Bei ersterer ist die Bahn selbst die Richtung der Bewegung und bei letzterer wird sie in jedem ihrer Puncte durch die zu ihr eben da gezogene Tangente bestimmt.

§. 194. Nebst der Gestalt der Bahn, welche der materielle Punct beschreibt, ist auch die Zeit zu berücksichtigen, während welcher der Punct einen bestimmten Theil der Bahn durchläuft.

Nach allgemeinem Übereinkommen werden die Zeiten der Bewegungen in Secunden mittlerer Sonnenzeit angenommen und die während derselben zurückgelegten Wege in einer bestimmten Längeneinheit, wofür bei uns der Wiener Fuß angenommen wird, ausgedrückt.

§. 195. Eine gerad- oder krummlinige Bewegung wird *gleichförmig* genannt, wenn der bewegte Punct in gleichen Zeittheilen auch gleiche Wege zurücklegt. Wenn daher ein Punct bei dieser Bewegung in einem Zeittheilchen einen bestimmten Weg durchläuft, so wird er in n solchen Zeittheilchen auch den $n$fachen Weg zurücklegen und es *verhalten sich diesfalls die zurückgelegten Wege wie die dazu nöthigen Zeiten.*

Werden bei einer Bewegung für die auf einander folgenden Zeittheile die zurückgelegten Wege immer größer oder kleiner, so ist sie *ungleichförmig* und zwar im ersten Falle *beschleunigt* und im zweiten *verzögert.*

§. 196. Die Fähigkeit oder das Vermögen eines materiellen Punctes, in einer bestimmten Zeit einen gewissen Weg gleichförmig zurückzulegen, nennt man die *Geschwindigkeit* des bewegten Punctes. Legt ein bewegter Punct in derselben Zeit einen größern Weg gleichförmig zurück, als ein anderer; so sagt man, der erste Punct hat eine *größere* Geschwindigkeit als der zweite. Um die Geschwindigkeiten mit einander vergleichen zu können, muß eine bestimmte Zeit zu Grunde gelegt werden und man ist allgemein überein gekommen, die Geschwindigkeiten durch die während einer Secunde mittlerer Sonnenzeit durchlaufenen Wege anzugeben. Bei einer gleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit des bewegten Punctes nicht und man erhält dieselbe, wenn man, von einem beliebigen Puncte seiner Bahn aus, den in einer Secunde zurückgelegten Weg mißt. Bei einer ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit des bewegten Punctes in jedem Puncte seiner Bahn. Hier ist die Geschwindigkeit für einen bestimmten Punct der Bahn die Größe desjenigen Weges, welchen der materielle Punct in einer Secunde zurücklegen müßte, wenn von diesem Puncte an die einwirkende Kraft plötzlich aufhören, also der materielle Punct seines Beharrungsvermögens wegen dann gleichförmig fortschreiten würde.

§. 197. Bei einem Systeme mehrer Puncte wird diejenige bestimmte Bewegung, die alle einzelne Puncte des Systems nach parallelen Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten annehmen, eine *fortschreitende*

(progressive) Bewegung des Systems genannt. Es ist leicht einzusehen, daß die Wege, welche von den einzelnen Puncten des Systems zurückgelegt werden, unter sich gleich sein müssen. Kennt man also die Bewegung eines Punctes, so hat man dadurch die Bewegung des ganzen Systems.

Jeder Körper von einer bestimmten Figur stellt ein System von mehren Puncten dar, in welche die kleinsten materiellen Theilchen des Körpers gesetzt werden können; man darf also, wenn der Körper eine fortschreitende Bewegung annimmt, blos die Bewegung eines Punctes in demselben betrachten, nemlich die Ausdehnung des Körpers beseitigen und ihn als einen Punct nehmen. Bewegt sich aber das System von Puncten (Körper) dergestalt, daß eine gerade Linie desselben in ihrer Lage unverändert bleibt; so hat es eine drehende oder rotirende Bewegung um diese Gerade, welche die Drehungs- oder Rotations-Axe genannt wird. Endlich hat das System eine progressive und rotirende Bewegung zugleich, wenn es bei seinem Fortschreiten gleichzeitig um eine durch den Schwerpunct des Systems gehende Axe rotirt.

§. 198. Nach §. 7 ist die von einer Stoßkraft erzeugte Geschwindigkeit, mit der sich ein materieller Punct gleichförmig bewegt, sowohl von der Intensität der Kraft als von dem Widerstande abhängig, den er vermöge seiner Trägheit der Kraft entgegensetzt, während die durch eine Ziehkraft hervorgebrachte Geschwindigkeit auch noch durch die Dauer der Kraftwirkung auf den materiellen Punct bestimmt wird.

Die Stoß- und Ziehkräfte unterscheiden sich also wesentlich dadurch, daß erstere in einem Augenblicke, d. h. in unwahrnehmbarer Zeit eine endliche Geschwindigkeit, die letztern aber in sehr kleiner Zeit auch nur eine sehr kleine Geschwindigkeit erzeugen.

§. 199. Obgleich wir die eigentliche Natur der Kräfte nicht kennen, so lassen sich doch (§. 8) hinsichtlich ihrer Wirkungen folgende reine Erfahrungssätze aufstellen.

1) Ist jeder materielle Punct oder Körper zufolge seiner Trägheit ohne eine bewegende Kraft unfähig, seinen Zustand der Ruhe oder Bewegung zu ändern (§. 9).

2) Müssen absolute Kräfte, die auf gleiche materielle Puncte oder Körper von gleichen Massen in gleicher Zeit wirken, sich wie die von ihnen hervorgebrachten Geschwindigkeiten verhalten.

§. 200. Wenn ein Körper durch eine Kraft bewegt wird, deren Richtung durch seinen Schwerpunct geht, so wird die Bewegung des Körpers eine fortschreitende sein, so, als wenn die einzelnen Theilchen des Körpers nach parallelen Richtungen von Kräften bewegt würden, die sich zu der durch den Schwerpunct gehenden Kraft verhalten, wie die Massen dieser Theile zu der Masse des ganzen Körpers; und umgekehrt, wenn die Theile eines Körpers nach parallelen Richtungen von Kräften bewegt werden, die ihren Massen proportional sind, so wird der Körper in einer fortschreitenden Bewegung eben so bewegt, als wenn eine einzige Kraft, die der Summe der wirkenden Kräfte gleich ist, in dem Schwerpuncte des Körpers nach paralleler Richtung angebracht würde.

Der Beweis kann leicht geführt werden, liegt aber auch schon in der in §. 84 gegebenen Erklärung, indem hier wie dort auf alle Theilchen ihren Massen proportionale Kräfte wirken.

§. 201. Wenn auf einen Körper eine Kraft wirkt, die nicht durch seinen Schwerpunct geht, so wird sich der Schwerpunct zwar eben so fortbewegen, als wenn die Kraft unmittelbar an demselben angebracht wäre; dabei wird aber der Körper sich um eine Schwerlinie drehen, die auf der durch die Richtung der Kraft gelegten Schwerebene senkrecht steht.

Denn ist C (Fig. 133) der Schwerpunct des Körpers, auf den in A eine Kraft P nach der Richtung AP wirkt und bringt man, CB = CA machend, in B parallel zu AP die gleichen aber gerade entgegengesetzten Kräfte $Q = Q' = \frac{1}{2}P$ an; so sind diese im Gleichgewichte und können sofort die Wirkung der Kraft nicht verändern. Denkt man sich nun P in zwei gleiche Theile in A zerlegt, so gibt die Kraft $\frac{1}{2}P$ in A mit der gleichen parallelen Q in B die Resultirende $R = \frac{1}{2}P + Q = P$, welche wegen CB = CA durch C geht und zu AP parallel ist, weshalb der Körper dieselbe fortschreitende Bewegung erhält, als ob die ursprüngliche Kraft P durch den Schwerpunct ginge, indem die noch übrigen Kräfte $\frac{1}{2}P$ in A und $Q' = \frac{1}{2}P$ in B, als parallel entgegengesetzt und von C gleichweit abstehend, den Körper blos um eine durch diesen Punct gehende, auf der Schwerebene PAC senkrechten Schwerlinie CL herumdrehen können.

Anmerkung. In dem Gesagten liegt zugleich der Grund, daß die aus einem Rohre geschossene Hohl- oder Vollkugel, selbst wenn sie vollkommen concentrisch ist, nebst der progressiven Bewegung auch eine rotirende erhalten kann. Denn durch die häufige Berührung des Projectils mit den Bohrungswänden wird dasselbe an dem jedesmaligen Berührungspuncte gegen ihre übrigen Puncte verzögert; da aber alle Puncte der Kugel eine gleiche fortschreitende Bewegung haben müssen; so kann diese Ausgleichung nur dadurch möglich werden, daß der Körper im Rohre eine rollende Bewegung nach vorwärts, d. h. mit dem vordersten Puncte gegen den Berührungspunct zu um eine Axe annimmt, die zur Berührungsebene parallel und zugleich auf der Seellinie senkrecht ist. Da nun dieses Rotiren immer in demselben Sinne geschieht, so lange die Kugel an derselben Bohrungswand bleibt, bei ihrem Überspringen an die entgegengesetzte Wand aber auch entgegengesetzt angeregt, mithin das Rotiren im früheren Sinne ganz aufgehoben werden muß; so wird das Projectil aus der Mündung schneller oder langsamer rotirend heraustreten müssen, je nachdem es bis dahin eine gerade oder ungerade Anzahl solcher Sprünge im Rohre gemacht hat.

Zweiter Abschnitt.

Von der gleichförmigen Bewegung.

§. 202. Wenn in Folge von §. 195, nach welchem bei der gleichförmigen Bewegung eines materiellen Punctes sich die zurückgelegten Wege wie die zugehörigen Dauerzeiten verhalten, s den zurückgelegten Weg in der Zeit t und S den Weg in der Zeit T vorstellt; so ist

$$(1) \quad s:S = t:T.$$

Ist c die Geschwindigkeit dieser Bewegung, so wird für $T=1$ (Secunde) vermöge §. 196 $S=c$, sofort aus (1)

$$(2) \quad s = ct,$$

$$(3) \quad c = \frac{s}{t},$$

$$(4) \quad t = \frac{s}{c}.$$

Demnach ist bei einer gleichförmigen Bewegung der durchlaufene Weg das Product der Zeit in die Geschwindigkeit, die Geschwindigkeit der Quotient der Zeit in den Weg, und die Zeit der Quotient der Geschwindigkeit in den Weg.

Legt ein anderer materieller Punct mit der Geschwindigkeit c' den Weg s' in der Zeit t' gleichförmig zurück; so ist wegen $s'=c't'$ im Vergleich mit (2)

$$s:s' = ct:c't';$$

d. h. bei zwei, mit verschiedenen Geschwindigkeiten gleichförmig bewegten Puncten verhalten sich die Wege wie

die Producte der Geschwindigkeiten in die zugehörigen Zeiten. Speciell hat man

$$c : c' = t' : t \qquad \text{für } s = s',$$
$$s : s' = t : t' \qquad \text{„ } c = c' \text{ und}$$
$$s : s' = c : c' \qquad \text{„ } t = t',$$

wo jede Proportion einen leicht in Worte zu fassenden Satz ausdrückt.

§. 203. Die Gleichung (2) des vorigen §. läßt sich allgemeiner darstellen. Denn ist AC (Fig. 134) die gerade Linie, nach der sich der materielle Punct mit der Geschwindigkeit c bewegt, B der Anfangspunct der Bewegung und C der Ort, wo sich der Punct in der Zeit t befindet, also $BC = ct$; so ist für $AB = a$, $AC = s$ nothwendig $s - a = ct$, mithin

$$(5) \qquad s = a + ct.$$

Für einen andern, in derselben Geraden von B′ aus mit der Geschwindigkeit c' gleichförmig bewegten Punct, der sich in der Zeit t' in C′ befindet, wenn $B'C' = s'$ und $AB' = a'$ gesetzt wird, hat man eben so

$$(5') \qquad s' = a' + c't'.$$

Wird c positiv angenommen, so ist c' positiv oder negativ, je nachdem die Bewegung mit letzterer Geschwindigkeit gegen C oder entgegengesetzt stattfindet; desgleichen ist a oder a' positiv, wenn es von A nach C und negativ, wenn es entgegengesetzt zu zählen ist.

Durch die Verbindung der beiden Gleichungen (5) und (5′) lassen sich mehre Fragen beantworten.

Soll z. B. der Punct D angegeben werden, wo die beiden Puncte zusammentreffen, wenn die Bewegung des einen von B aus um die Zeit T früher anfängt, als die des andern von B′ aus; so hat man, da diesfalls $AD = s = s'$ ist,

$$a + ct = a' + c't',$$

oder wegen $t = t' + T$

$$a + ct' + cT = a' + c't',$$

sofort daraus

$$t' = \frac{a' - a - cT}{c - c'}, \quad t = \frac{a' - a - c'T}{c - c'},$$

$$AD = s = s' = \frac{a'c - ac' - cc'T}{c - c'}.$$

Für den gleichzeitigen Anfang der Bewegungen aus B und B oder für $T = 0$ ist

$$t = t' = \frac{a' - a}{c - c'} \text{ und}$$

$$s = s' = \frac{a'c - ac'}{c - c'}.$$

Geschieht die Bewegung der beiden materiellen Puncte nach einerlei Richtung, so nennt man $c - c'$ ihre relative Geschwindigkeit, indem sie sich um diesen Weg in der Zeiteinheit einander nähern; sind aber die beiden Bewegungen einander entgegengesetzt, so ist $c + c'$ die relative Geschwindigkeit.

§. 204. Wenn ein materieller Punct C (Fig. 16) durch eine Kraft P die Geschwindigkeit c nach der Richtung CA, durch eine andere gleichartige Kraft Q die Geschwindigkeit v nach der Richtung CB, welche mit ersterer den Winkel λ einschließt, erhält und diese beiden Kräfte gleichzeitig nach ihren respectiven Richtungen auf den materiellen Punct wirken; so wird sich derselbe in der Richtung der Diagonale des über diese beiden Geschwindigkeiten verzeichneten Parallelogramms mit einer, durch die Größe dieser Diagonale dargestellten Geschwindigkeit bewegen.

Denn vermöge der gleichzeitigen Wirkung beider Kräfte P und Q bewegt sich der materielle Punct C nach der Richtung CD ihrer Resultirenden mit einer Geschwindigkeit x.

Nun ist, wenn R diese Resultirende bezeichnet, bekanntlich

$$CD : CA : CB = R : P : Q$$

und da vermöge §. 199. 2) auch

$$R : P : Q = x : c : v$$

stattfindet; so ergibt sich daraus

$$CD : CA : CB = x : c : v;$$

d. h. wenn CA und CB im Verhältnisse von c zu v abgeschnitten sind, so ist die Diagonale CD des über CA und CB verzeichneten Parallelogramms nicht allein die Richtung, sondern auch die Größe der Geschwindigkeit des bewegten Punctes.

Der Ausdruck für diese Geschwindigkeit ist sonach

$$x^2 = c^2 + v^2 + 2cv \cos \lambda$$

und zur Bestimmung ihrer Richtung hat man, wenn der Winkel $DCA = \alpha$ ist,

$$(c + v) : (c - v) = \text{tang} \tfrac{1}{2}\lambda : \text{tang}(\tfrac{1}{2}\lambda - \alpha).$$

Beides erhält man auch aus

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\lambda \quad \text{und}$$

$$(P+Q):(P-Q) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\lambda : \text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\lambda - \alpha)$$

$$\text{für} \quad P = \frac{c}{x}\cdot R \text{ und } Q = \frac{v}{x}\cdot R$$

nach der vorhin aufgestellten zweiten Proportion.

§. 205. Aus dem vorigen §. geht klar hervor, daß Geschwindigkeiten eben so zusammengesetzt und zerlegt werden dürfen, wie es bei Kräften gelehrt worden ist. Einige Anwendungen davon sollen hier gezeigt werden.

I. Ein materieller Punct bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit c in der Richtung **AB** (Fig. 135) gegen ein festes Hinderniß **BC**, welches ihn in **B** nöthigt, von seiner Bahn in jene **BC** zu übergehen. Man soll seine Geschwindigkeit nach der neuen Richtung angeben.

Denkt man sich in der Verlängerung von **AB** die Gerade $\mathbf{BD} = c$ abgeschnitten und zerlegt diese Geschwindigkeit in die beiden auf einander senkrechten Seitengeschwindigkeiten **BE** und **BF**; so wird die Geschwindigkeit **BF** durch die Festigkeit von **BC** ganz aufgehoben und es ist $\mathbf{BE} = c\cos m$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich der materielle Punct in der Richtung **BC** bewegen wird.

Der Verlust an Geschwindigkeit bei dem Übergange von **AB** nach **BC** ist $c - c\cos m = c\sin\text{v}\, m$.

II. Ist ferner **AB** (Fig. 136) die Tangente einer festen krummen Linie **BC**, daher der Winkel, welchen dieselbe mit letzterer im Berührungspuncte **B** einschließt, unendlich klein; so hat man bei dem Übertritt der Bewegung von der Tangente in die Curve die Geschwindigkeit $c\cos 0 = c$ unveränderlich, also auch der Verlust an Geschwindigkeit bei diesem Übergange $= c\sin\text{v}\, 0 = 0$.

Da nun aber während der Bewegung in der Curve von irgend einem Puncte zu einem unendlich nahe liegenden diese Bewegung so betrachtet werden kann, als ob der Übertritt von der Tangente des erstern Punctes in die Curve geschehe, wobei sich also die Geschwindigkeit nicht ändert; so folgt daraus, daß der materielle Punct die Geschwindigkeit, welche er bei seinem Eintritte in die Curve hatte, während seiner Bewegung in derselben unverändert beibehält.

§. 206. Bewegt sich sonach ein materieller Punct in einer Curve gleichförmig, so ist die Länge eines, während einer Secunde durchlaufenen Bogenstückes seine Geschwindigkeit in der Curve und diese Länge ist jener gleich, welche derselbe Punct in einer Secunde durchlaufen würde, wenn derselbe aus der Curve in die Richtung ihrer Tangente überginge.

Für den besondern Fall, daß ein Punct sich mit der Geschwindigkeit c gleichförmig im Umfange eines Kreises vom Halbmesser r bewegt und in t Secunden die Kreisperipherie n mal durchläuft, hat man

$$2r\pi.n = ct.$$

Eine Gleichung, mit deren Hilfe die Gesetze der Bewegung eines Räderwerkes aufgestellt werden könnten, wenn man nicht durch andere Gesetze auf folgendem Wege kürzer zum Ziele gelangen würde.

§. 207. Es sei bei einem Räderwerke P die Kraft, Q die Last, B der Hebelsarm der erstern, b jener der letztern, x das Product der Triebstecken aller Getriebe, X das der Zähne aller Räder, endlich bezüglich des Angriffspunctes S der zurückgelegte Weg der Kraft und s der gleichzeitige der Last; so ist nach §. 164

$$P = \frac{x}{X} \cdot \frac{b}{B} \cdot Q. \quad \text{und}$$

$$P:Q = s:S.$$

1) Geschieht nun die Bewegung während der Zeit t gleichförmig, wobei c die Geschwindigkeit der Kraft, v jene der Last ist; so ist wegen

$$s = vt \quad \text{und} \quad S = ct$$

$$s:S = v:c; \text{ also auch}$$

$$P:Q = v:c = \frac{x}{X} \cdot \frac{b}{B} : 1$$

und daraus

$$(1) \qquad v = \frac{x}{X} \cdot \frac{b}{B} \cdot c;$$

d. h. die Geschwindigkeit der Last ist gleich jener der Kraft multiplicirt mit dem Producte aller Triebstecken in den Hebelsarm der Last und dividirt durch das Product aller Zähne in den Hebelsarm der Kraft.

Außerdem gibt die Proportion

$$P:Q = v:c$$

zu erkennen, daß die Geschwindigkeit v der Last abnimmt, je kleiner die Kraft P gegen Q wird.

2) Macht das erste Getriebe m Umdrehungen in der Zeit t und das letzte Rad deren M in der Zeit T; so hat man, da die Kraft sich um die Axe des ersten Getriebes und die Last um die des letzten Rades bewegt,

$$2b\pi.M = vT \text{ und } 2B\pi.m = ct,$$

also

$$\frac{bM}{Bm} = \frac{vT}{ct}$$

oder wegen

$$\frac{v}{c} = \frac{x}{X} \cdot \frac{b}{B}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{x}{X} \cdot \frac{T}{t}. \tag{2}$$

a) Für $M = m$ oder $M = m = 1$ ist

$$\frac{X}{x} = \frac{T}{t}; \tag{3}$$

d. h. bei einem Räderwerke verhält sich die Umlaufszeit t des ersten Getriebes zu jener T des letzten Rades wie das Product aller Triebstecken zum Producte aller Zähne.

b) Für $T = t$ oder $T = t = 1$ ergibt sich aus (2)

$$\frac{M}{m} = \frac{x}{X}; \tag{4}$$

d. h. die Anzahl der gleichzeitigen Umdrehungen des ersten Getriebes und letzten Rades verhalten sich umgekehrt wie das Product X aller Zähne zu dem Producte x aller Triebstecken.

Für $m = 1$ ist $M = \frac{x}{X}$; wird aber $M = 1$, so ist $m = \frac{X}{x}$.

§. 208. Zwei Räder greifen außer- oder innerhalb in einander, je nachdem die Axe des kleinern Rades außer- oder innerhalb des Umfanges des größern fällt.

Damit zwei Sternräder innerhalb in einander eingreifen können, müssen die Zähne des größern Rades am innern Rande eingeschnitten werden, so daß die Zähne gegen die Axe gerichtet sind. Diese Einrichtung wird jedoch selten angewendet.

Vortheilhafter ist es, wegen der Verbindung des Rades mit der Axe, in diesem Falle ein Kronrad und ein Sternrad zu nehmen und beide über

einander zu stellen, damit die Zähne des einen die Kämme des andern oder umgekehrt ergreifen.

Bei der Verbindung des Räderwerkes haben je zwei auf einander folgende Axen eine entgegengesetzte Umdrehung, wenn die Räder außerhalb in einander greifen; folglich wird in diesem Falle die letzte mit der ersten Axe eine gleichartige oder eine ungleichartige Umdrehung haben, je nachdem die Anzahl der sich umdrehenden Axen ungerad oder gerad ist. Greifen aber zwei Räder innerhalb in einander, so drehen sich ihre Axen nach derselben Seite zu herum, d. h. sie haben eine gleichartige Umdrehung. Soll nun die Umdrehung irgend eines Rades geändert werden, so darf man nur entweder ein innerhalb eingreifendes Kronrad oder auch dazwischen eine Axe mehr anbringen, was durch ein Wechselrad geschieht.

Ein Wechselrad wird jenes genannt, an dessen Axe sich kein Getriebe befindet, so daß daher zwei Räder in dasselbe eingreifen müssen oder jenes, bei dem das Getriebe an derselben Axe mit dem Rade eine gleiche Anzahl Zähne hat. In beiden Fällen wird wegen §. 164 und 207 weder die bewegende Kraft noch die Dauerzeit der Umdrehung geändert.

§. 209. Das gezähnte Räderwerk ist ein sehr nützlicher Bestandtheil der Maschinen. Ohne einen großen Raum nöthig zu haben, kann entweder die Kraft ansehnlich verstärkt werden oder bei einem Überschusse von Kraft die Umdrehung der Welle sehr schnell geschehen; im ersten Falle müssen die Getriebe in die Räder, im zweiten die Räder in die Getriebe eingreifen. Zur Verbindung horizontaler Wellen mit verticalen muß ein Kammrad oder Kronrad genommen werden. Die so häufige Anwendung der Räderwerke kann füglich unter zwei Hauptabtheilungen gebracht werden; zur ersten gehören alle, die eine bestimmte Wirkung zum Vortheile der Kraft oder Geschwindigkeit leisten sollen; während man zur zweiten alle mit Rädern versehenen Maschinen zählt, die zum Zeitmaße dienen und Uhren heißen.

Die erste Abtheilung umfaßt vorzüglich die meisten Gattungen von je nach dem nöthigen Effecte verschiedenartig eingerichteten Mühlen als Maschinen, die durch eine umdrehende Bewegung verschiedene Naturproducte zu gewissen Zwecken zubereiten. Die gewöhnliche Mahlmühle wird durch ein verticales Wasserrad getrieben, an deren Welle es ein Kammrad hat, das in einem Trilling eingreift; an diesem befindet sich das Mühleisen, welches mit dem obern Mühlsteine, dem Laufer, so verbunden ist, daß er sich mit dem Eisen, also auch mit dem Trilling zugleich herumdrehen

muß. Zur Vergrößerung des Effectes muß der Trilling eine geringe Anzahl Triebstecken und das Kammrad beträchtlich viele Kämme erhalten.

Das gezähnte Räderwerk ist auch bei vielen Maschinen, die durch die Kurbel bewegt werden, bei allen Bohrmaschinen, bei mehren Gattungen von Hebzeugen und Kranigen, bei den Theilmaschinen, u. s. w. im Gebrauche. Bei Hebzeugen gewinnt man wohl an Kraft, verliert aber an Geschwindigkeit, weshalb es besser ist, das Räderwerk nicht anzuwenden, wenn man die zum Heben der Last nöthige Kraft durch das Wellrad, u. s. w. gewinnen kann.

Der Gang der Uhren als Zeitmesser muß sehr gleichförmig sein. Bei allen muß (Fig. 137) ein Rad A angebracht werden, das sich in einer Stunde genau einmal herumdreht und das Minutenrad heißt, weil auf der Axe desselben der Minutenzeiger mittels einer Hilse angesteckt wird. Da das Stundenrad sich in 12 Stunden einmal herumdrehen soll, so ist

$$\frac{t}{T} = \frac{x}{X} = \frac{1}{12} = \frac{10}{40} \cdot \frac{12}{36}.$$

Befestigt man also an der Axe des Minutenrades (nemlich an der Hilse des Minutenzeigers) ein Getriebe von 10 Triebstecken, läßt dies in ein Rad von 40 Zähnen eingreifen, nimmt an der Axe des letztern ein Getriebe von 12 Triebstecken und steckt mittels einer Hilse, welche über die des Minutenrades geschoben wird, ein Rad von 36 Zähnen an; so hat man das Stundenrad. Man könnte zwar die Umlaufszeit von 12 Stunden auch durch ein einziges Rad erhalten, dann müßten aber beide Zeiger an zwei verschiedenen Axen angesteckt werden und sich entgegengesetzt herumdrehen. Damit nun der Stundenzeiger auf die Axe des Minutenzeigers komme und dabei beide nach einer Seite sich bewegen, ist das Rad von 40 Zähnen nothwendig, welches deshalb auch das Wechselrad heißt. Dieses und das Stundenrad sind mit ihren Getrieben zwischen dem Zifferblatte und dem vordern Uhrboden angebracht. Diese bei den meisten Uhren stattfindende Einrichtung wird das Zeigerwerk genannt.

Bei Secundenuhren hat man für das Secundenrad, wenn man die Anordnung vom Minutenrade rechnet,

$$\frac{X}{x} = 60 = \frac{90}{12} \cdot \frac{80}{10}.$$

Man kann daher dem Minutenrade A 90 Zähne geben, selbes in ein Getriebe von 12 Triebstecken eingreifen lassen, an der Axe des letztern ein Rad D von 80 Zähnen — das Mittelrad oder kleine Bodenrad

genannt — anbringen und dieses mit einem Getriebe von 10 Triebstecken an der Axe des Secundenrades **E** verbinden.

Bei den astronomischen Pendeluhren ist die bewegende Kraft ein angehängtes Gewicht. Eine Walze von beiläufig $1\frac{3}{4}$ Zoll Durchmesser erhält an der Oberfläche 16 schraubenförmige Umgänge, um die eine Darmsaite herumgewunden wird. Das eine Ende derselben ist an der Walze, das andere an dem Uhrboden befestigt. Die Saite trägt mittels einer Zugrolle ein Gewicht von 15 bis 20 Pfunden, das die Walze herumzudrehen strebt und dadurch mit unveränderlicher Stärke auf das damit verbundene Räderwerk drückt. Würde das Gewicht an dem einen Ende der Saite herabhängen, so müßte es beim festgesetzten Gange der Uhr noch einmal so tief herabkommen wie bei der Zugrolle. An der Axe der Walze befindet sich das Walzenrad **F**, das sich mit der Walze zugleich auf die Seite des ziehenden Gewichtes zu herumbewegt; wird aber mittels eines angesteckten Uhrschlüssels oder durch Anziehen der Schnur die Axe mit der Walze auf der entgegengesetzten Seite herumgedreht, wodurch die Schnur sich wieder aufwindet; so darf sich das Walzenrad nicht mit bewegen, welches Umdrehen durch ein Sperr-Rad mit einem Sperrkegel verhindert wird. Soll die Uhr in einem Monate einmal aufgezogen werden, so muß das Walzenrad in 48 Stunden einmal sich herumdrehen; verbindet man es nun mit dem Minutenrade, so ist

$$\frac{x}{X} = \frac{1}{48} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{96} \cdot \frac{16}{96}.$$

Man hat also zwischen den beiden Uhrböden an der Axe des Minutenrades ein Getriebe von 12 Triebstecken zu befestigen, das in ein Zusatzrad **G** von 96 Zähnen eingreift und an der Axe des letztern ein Getriebe von 16 Triebstecken anzubringen, welches durch das Walzenrad **F** von 96 Zähnen bewegt wird.

Da das Gewicht mit unveränderter Stärke auf das Räderwerk wirkt, so ist seine Bewegung eine beschleunigte; damit nun die Uhr einen gleichförmigen Gang erhalte und insbesondere das Minutenrad **A** in einer Stunde, folglich das Secundenrad **E** in einer Minute sich einmal herumdrehe; gibt man dem Secundenrade 30 Zähne, welche von einem Anker **I**, der sich mit der Axe **ab** frei herumdrehen kann, wechselweise ergriffen und wieder ausgelassen werden. Mit der Axe **ab** ist zugleich ein Pendel verbunden, an dessen Stange sich ein Gewicht von 15 bis 20 Pfunden (Linse) mittels einer Schraube auf- und abwärts bewegen läßt. Die Länge der Stange bis zum Mittelpuncte der Linse beträgt beinahe 3 Schuh 2 Zoll und das Gewicht der Linse ist so beträchtlich, damit das Aufziehgewicht der Uhr auf den Gang

des Pendels keinen andern Einfluß haben könne, als daß es nicht stehen bleibe. Mit dem Pendel dreht sich zugleich die Axe ab, sofort auch der Anker, wodurch auf der einen Seite ein Zahn des Steigrades losgelassen, auf der andern aber ein neuer gefangen wird; mithin geschehen während der Umdrehung des Steigrades 60 Pendelschläge, da jeder Zahn zweimal gefangen wird. Wird die Linse weiter hinaufgeschoben, so geht die Uhr geschwinder und man kann sie auf diese Weise so lange berichtigen, bis sie für einen gewählten Fixstern von einer Culmination zur andern 23 Stunden 56 Minuten 4·1 Secunden zeigt.

Damit die Uhr beim Aufziehen des Gewichtes in ihrem Gange nicht geändert werde, muß die Walze, die sich blos mit dem Walzenrade bewegen kann, eine einzige Vertiefung erhalten, um welche eine Schnur ohne Ende gelegt wird. Diese trägt mittels einer Zugrolle a (Fig. 138) das Gewicht P, das durch die Umdrehung der Walze die Bewegung der Uhr verursacht.

Die Schnur ist dann noch um eine an dem festen Bolzen angesteckte Rolle c gelegt, die sich zwar beim Aufziehen gegen m drehen kann, durch einen Sperrhaken aber verhindert wird, sich gegen n umzudrehen. Überdies sind auch Stifte schief so angebracht, daß sich die Schnur nicht von m gegen n ziehen läßt, die Bewegung von n gegen m aber gar nicht gehindert wird. Damit die Schnur auf der andern Seite gehörig gespannt bleibe, ist ein kleines Gegengewicht Q mittels einer zweiten Zugrolle b angebracht. Bei der Umdrehung der Walze C wird der Theil fa der Schnur länger, der andere fb kürzer, wodurch das Gewicht P sinkt und jenes Q zugleich steigt. Zieht man nun bei m die Schnur an, so wird der Theil na kürzer, also P wieder gehoben und wirkt dabei unverändert auf die Walze, weshalb der Gang der Uhr durch das Aufziehen nicht gestört werden kann.

Soll die Uhr noch andere Zeiten, z. B. den vollendeten Umlauf des Mondes um die Erde, anzeigen, so muß mit einem der besprochenen Räder noch ein anderes Räderwerk verbunden werden. Wenn die verlangten Umlaufszeiten aber keine schicklichen Factoren zur Zerlegung darbieten, so lassen sie sich durch das Rädersystem nicht ganz genau angeben, wo man dann durch eine gut gewählte Annäherung ein Räderwerk zu erhalten sucht, bei dem die Abweichung unbedeutend ist, wie folgendes Beispiel zeigt.

Will man in der Uhr ein Mondrad anbringen, damit ein an seiner Axe angebrachter Zeiger den Lauf des Mondes angebe, dessen Jahr 354 Tage 8 Stunden 48 Minuten 33·94 Secunden beträgt; so ist die Umlaufszeit dieses Rades = 29 Tag. 12 Stund. 44 Min. 3 Sec. = 2551443 Sec. und man hat daher, wenn man es mit dem Stundenrade, dessen Umlauf in

12 Stund. = 43200 Sec. vollendet ist, verbindet, nach §. 207

$$\frac{x}{X} = \frac{t}{T} = \frac{43200}{2551443} = \frac{14400}{850481},$$

welcher Bruch als successive Annäherungsbrüche

$$\frac{1}{59}, \frac{16}{945}, \frac{33}{1949}, \frac{49}{2894}, \frac{425}{25101}, \frac{474}{27995}, \text{ u. s. w.}$$

hat. Setzt man nun

$$X = \frac{2894x+m}{49} = 59x + \frac{3x+m}{49},$$

wobei m eine positive oder negative ganze Zahl sein kann, so wird, wenn man

$$3x+m = 49A \text{ und } A-m = 3M$$

macht,

$$x = 49M+16m \text{ und } X = 2894M+945m, \text{ daher}$$

$$\frac{x}{X} = \frac{49M+16m}{2894M+945m}.$$

$$\text{Für } M = 0 \text{ wird } \frac{x}{X} = \frac{16}{945} = \frac{8}{60} \cdot \frac{8}{63};$$

d. h. man hat an der Axe des Stundenrades ein Getriebe von 8 Triebstecken zu befestigen, das in ein Rad von 60 Zähnen eingreift und an der Axe des letztern wieder ein Getriebe von 8 Triebstecken anzubringen, das ein Rad von 63 Zähnen herumdreht, um das letzte als Mondrad zu erhalten, welches in $T = \frac{945}{16}$. 12 Stunden = 29 Tag. 12 Stund. 45 Minuten, also bei 57 Secunden Abweichung, sich einmal herumdreht.

$$\text{Für } M = -1 \text{ und } m = 7 \text{ wird } \frac{x}{X} = \frac{63}{3721} = \frac{7}{61} \cdot \frac{9}{61},$$

bei welcher Anordnung die Abweichung 1 Minute und 40 Sec. betragen würde.

Bei den Taschenuhren wird die bewegende Kraft durch eine zusammengerollte Stahlfeder erhalten. Das eine ihrer Ende ist an einer unbeweglichen Axe befestigt, über welche ein beweglicher Cylinder (das Federhaus) gesteckt wird. Die einigemal um die Axe herumgewundene Feder wird mit ihrem andern Ende an die innere Oberfläche des Federhauses angeheftet und an der äußern eine Kette befestigt, die einigemal herumgewickelt und mit dem andern Ende angemacht wird. Diese wird beim

Aufziehen herumgedreht, wodurch die Kette sich auf ihr aufwindet, daher das Federhaus sich herumdrehen und somit die Feder noch mehr gespannt werden muß.

Diese drückt dann nach entgegengesetzter Richtung an das Federhaus, wodurch die Kette von der Schnecke allmälig wieder abgewunden und das Räderwerk in Bewegung gesetzt wird. Da die Feder immer mehr abgespannt, also die Schnecke mit einer verminderten Kraft durch die Kette angezogen wird; so muß letztere mit einem immer größern Hebelsarme auf die Schnecke wirken. Mit dieser ist ein Rad verbunden, welches in das Getriebe des Minutenrades eingreift und durch einen Sperr-Kegel und ein Sperr-Rad zurückgehalten wird, wenn sich die Schnecke während des Aufziehens auf der entgegengesetzten Seite herumdreht. Das Minutenrad ist mit dem Mittelrade, dies mit dem Kronrade und letzteres mit dem Steigrade durch Getriebe verbunden. Das Steigrad hat schräge Zähne in Gestalt eines Kronrades, dessen Bewegung von der Lappenspindel, wie bei Pendeluhren durch den Anker, wechselweise aufgehalten und dann wieder zugelassen wird. An dieser Spindel ist die Unruhe als Schwungrad befestigt und unter ihr die Spiralfeder statt des Pendels angebracht, welche die Uhr in gleichförmiger Bewegung erhält. Der vibrirende Theil derselben kann durch eine besondere unter der Stell- oder Richtscheibe angebrachte Vorrichtung kürzer oder länger gemacht werden, wenn die Uhr geschwinder oder langsamer gehen soll.

Da in das Steigrad oben und unten eine Lappe eingreift, so muß es eine ungerade Anzahl Zähne erhalten, damit sich bei der einen Lappe ein Zahn auslöse, wenn bei der andern sich ein Zahn fängt; und da das Steigrad vertical ist, so muß auf dasselbe ein Kammrad folgen, damit die übrigen Räder wieder eine horizontale Lage erhalten können.

Gewöhnlich gibt man dem Steigrade 15 Zähne und da jeder oben und unten aufgefangen wird, so macht die Uhr während einer Umdrehung des Steigrades 30 Spindelstreiche. Soll die Uhr in einer Secunde 4 Spindelstreiche machen, so macht das Steigrad in einer Stunde 480 Umdrehungen und man hat, da die Umlaufszeit des Minutenrades festgesetzt ist;

$$\frac{x}{X} = \frac{1}{480} = \frac{6}{48} \cdot \frac{6}{48} \cdot \frac{8}{60}.$$

Die Getriebe am Steig-, Kron- und Mittelrade können also 6,6,8 Triebstecken, das Kron-, Mittel- und Minutenrad aber 48,48,60 Zähne erhalten. Soll aber die Uhr in 5 Secunden 24 Spindelstreiche machen, so muß das Steigrad sich in einer Stunde 576 mal herumdrehen und man hat

$$\frac{x}{X} = \frac{1}{576} = \frac{6}{48} \cdot \frac{6}{48} \cdot \frac{6}{54}.$$

Gibt man dem Getriebe am Minutenrade 8 Triebstecken und dem Schneckenrade 48 Zähne, so macht letzteres in 6 Stunden eine Umdrehung und es wird also die Uhr, wenn die Schnecke 5 Gänge hat, in 30 Stunden abgelaufen sein.

Dritter Abschnitt.

Die gleichförmig veränderliche Bewegung, der freie Fall und die Wurfbewegung.

I. Die gleichförmig veränderliche Bewegung.

§. 210. Vermöge §. 7 bis 9 kann ein materieller Punct in einer gewissen Zeit nur eine fortwährend veränderliche Bewegung durch eine, in dieser Zeit auf ihn ununterbrochen wirkende Kraft erhalten und dabei wird diese Bewegung beschleunigt oder verzögert sein, je nachdem die Wirkung der Kraft nach der Richtung der Bewegung oder dieser gerade entgegengesetzt ist. Denn würde in irgend einem Augenblicke der Bewegung, wo der materielle Punct eine Geschwindigkeit c hat, auf ihn ferner keine Kraft wirken; so müßte derselbe der Trägheit wegen mit dieser Geschwindigkeit sich gleichförmig weiter bewegen. Wirkt aber während einer folgenden Zeit eine Kraft ununterbrochen auf den materiellen Punct, welche in dieser Zeit die Geschwindigkeit um v zu ändern vermag; so wird die Geschwindigkeit der betrachteten Bewegung, zu Ende derselben Zeit, $c+v$ oder $c-v$ sein, je nachdem die Kraft der frühern Bewegung förderlich war oder ihr hindernd entgegenwirkte.

Die Geschwindigkeit zu Ende einer jeden Zeit besteht nemlich aus zwei Theilen, wovon der eine Theil die Geschwindigkeit am Anfange dieser Zeit und der andere Theil die durch die unmittelbare Einwirkung der Kraft während derselben Zeit erzeugte Geschwindigkeit ist.

§. 211. Untersuchen wir nun die Bewegung eines materiellen Punctes durch eine absolute Kraft, welche nach §. 7 in jedem Augenblicke dieselbe Wirkung auf diesen Punct hervorbringt, also in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten erzeugt, die Bewegung mag schnell oder langsam geschehen.

Nehmen wir dabei an, der materielle Punct werde aus der Ruhe zur Bewegung gebracht und es erzeuge die auf ihn ununterbrochen wirkende Kraft während eines jeden Zeittheils τ die Geschwindigkeit γ, die also auch die Geschwindigkeit des materiellen Punctes zu Ende des ersten Zeittheiles ist; so ist zu Ende des zweiten oder zu Ende der Zeit 2τ vermöge vorigen §. die Geschwindigkeit $\gamma+\gamma=2\gamma$, zu Ende der Zeit 3τ die Geschwindigkeit $2\gamma+\gamma=3\gamma$, u. s. w., also zu Ende der Zeit $n\tau$ die Geschwindigkeit $n\gamma$, vorausgesetzt jedoch, daß die Kraft während der Zeit $n\tau$ ununterbrochen wirkte.

Setzt man daher $n\gamma=v$ und $n\tau=t$; so gibt die Verbindung dieser beiden Gleichungen

$$\tau:t=\gamma:v;$$

d. h. die Dauerzeiten verhalten sich wie die während derselben durch dieselbe Kraft erzeugten Geschwindigkeiten.

Wird $\gamma=G$ für $\tau=1$ gesetzt, so erhält man aus obiger Proportion

$$(1) \qquad v = Gt,$$

wo also G die von der Kraft in jeder Secunde erzeugte Geschwindigkeit, oder die Geschwindigkeit zu Ende der ersten Secunde vorstellt. Man nennt daher G die Beschleunigung der Kraft.

Um den zurückgelegten Weg s in der Zeit t für diese Bewegung zu finden, theile man diese Zeit in n gleiche Theile $\frac{t}{n}=\theta$, und bestimme die Geschwindigkeiten am Anfange und am Ende eines jeden dieser Zeittheile, so hat man nach Gl. (1) am Anfange die Geschwindigkeiten

$$0, \quad G\theta, \quad 2G\theta, \ldots. \ (n-1)\,G\theta,$$

am Ende die Geschwindigkeiten

$$G\theta, \quad 2G\theta, \quad 3G\theta, \ldots\ldots nG\theta.$$

Denkt man sich, der materielle Punct werde in jedem Zeittheile mit der am Anfange desselben stattgefundenen Geschwindigkeit gleichförmig bewegt, so hat man (§. 202) die zurückgelegten Wege

$$0, \quad G\theta^2, \quad 2G\theta^2, \ldots \ (n-1)\,G\theta^2,$$

welche aber kleiner als die wirklich zurückgelegten Wege sind, weil bei letzteren die Geschwindigkeit während eines Zeittheiles größer als zu Anfang desselben ist. Es muß sonach s größer als die Summe der angegebenen Wege sein.

Denkt man sich ferner den materiellen Punct während eines Zeittheiles θ mit der zu Ende dieses Zeittheiles erhaltenen Geschwindigkeit gleichförmig bewegt; so sind die zurückgelegten Wege

$$G\theta^2, \quad 2G\theta^2, \quad 3G\theta^2, \ldots\ldots nG\theta^2$$

alle größer als die wirklichen Wege, daher auch s kleiner als ihre Summe.

Nun ist die erste Summe $G\theta^2[0+1+2+\ldots+(n-1)]=G\theta^2\frac{n^2-n}{2}$,

„ zweite „ $G\theta^2(1+2+3+\ldots\ldots+n)=G\theta^2\frac{n^2+n}{2}$,

sofort wegen $n\theta=t$

$$s>\frac{Gt^2}{2}-\frac{Gt^2}{2n} \text{ und } s<\frac{Gt^2}{2}+\frac{Gt^2}{2n}.$$

Da das von n abhängige Glied in diesen beiden Ungleichungen um so kleiner wird, je größer n ist, d. h. je mehr die Kraft ununterbrochen wirkt und der Voraussetzung nach die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist; so ist für ein unendlich großes n der zurückgelegte Weg der gleichförmig beschleunigten Bewegung

$$(2) \qquad s=\frac{Gt^2}{2}. \ *$$

Aus den Formeln (1) und (2) erhält man noch

$$(3) \qquad s=\frac{vt}{2}, \qquad (4) \qquad v^2=2Gs,$$

$$(5) \qquad s=\frac{v^2}{2G}, \qquad (6) \qquad t=\sqrt{\frac{2s}{G}}=\frac{v}{G}.$$

Ist endlich s' der in der Zeit $t-1$ zurückgelegte Weg; so ergibt sich aus (2)

$$s'=\frac{G(t-1)^2}{2},$$

sofort

$$(7) \qquad s-s'=\frac{G(2t-1)}{2}.$$

Die vorstehenden Formeln sprechen folgende Sätze aus.

Nach Formel (1) verhalten sich die in verschiedenen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten wie die Zeiten.

---

*) In andern ältern Lehrbüchern findet man $v=2Gt$ und $s=Gt^2$, wo also G den in der ersten Secunde zurückgelegten Weg vorstellt. Doch bei der hier angenommenen neuern Bedeutung ist G nicht allein die Geschwindigkeit zu Ende der ersten Secunde, sondern auch die in jeder folgenden Secunde durch die absolute Kraft erzeugte Geschwindigkeit; folglich zugleich das Maß dieser absoluten Kraft.

Nach Formel (2) verhalten sich die zurückgelegten Wege wie die Quadrate der zugehörigen Dauerzeiten.

Die Formel (3) zeigt, daß der durch die beschleunigte Bewegung zurückgelegte Weg nur die Hälfte desjenigen ist, der mit der Endgeschwindigkeit v in derselben Zeit gleichförmig zurückgelegt wird.

Ferner nach Formel (4) und (5) sind die zurückgelegten Wege den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional.

Endlich gibt die Formel (7) zu erkennen, daß die in den auf einander folgenden gleichen Zeiten zurückgelegten Wege sich wie die zugehörigen ungeraden Zahlen verhalten, d. i. die zurückgelegten Wege in der 1ten, 2ten, 3ten, . . . $t$ten Secunde verhalten sich wie die ungeraden Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots . 2t-1.$$

§. 212. Hat der materielle Punct vor der Einwirkung der absoluten Kraft schon die Geschwindigkeit c, die man die anfängliche Geschwindigkeit nennt und ist G die Beschleunigung der Kraft; so wird die Geschwindigkeit nach der Zeit t

$$(1) \qquad v = c \pm Gt$$

sein, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Kraft in der Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit oder dieser entgegenwirkt. Im ersten Falle ist die Bewegung eine beschleunigte, im zweiten eine verzögerte.

Denken wir uns hinsichtlich des zurückgelegten Weges die Zeit t in die Theile $\frac{t}{n} = \theta$ zertheilt, so hat man zu Ende des

1ten, 2ten, 3ten, ... $n$ten solchen Zeittheiles nach der so eben aufgestellten Formel die Geschwindigkeit

$$c \pm G\theta, \quad c \pm 2G\theta, \quad c \pm 3G\theta, \ldots \quad c \pm nG\theta$$

und für die, mit diesen Geschwindigkeiten in jedem respectiven Zeittheile gleichförmig durchlaufenen Wege des materiellen Punctes

$$c\theta \pm G\theta^2, \quad c\theta \pm 2G\theta^2, \quad c\theta \pm 3G\theta^2, \ldots \quad c\theta \pm nG\theta^2,$$

deren Summe

$$cn\theta \pm G\theta^2 \frac{n^2+n}{2} = ct \pm \frac{Gt^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ ist;}$$

woraus für ein unendlich großes n

$$(2) \qquad s = ct \pm \frac{Gt^2}{2} \text{ folgt.}$$

Dieser zurückgelegte Weg besteht also aus dem Theile ct, welchen der materielle Punct ohne Einwirkung der Kraft in der Zeit t gleichförmig durchläuft und aus dem Theile $\frac{Gt^2}{2}$, den derselbe aus der Ruhe blos durch die Wirkung der continuirlichen Kraft durchlaufen würde. Dasselbe kann man auch bei der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung von irgend einer Zeit an nachweisen.

Die Elimination von t aus (1) und (2) gibt noch

$$(3) \qquad v^2 = c^2 \pm 2Gs.$$

Man pflegt diese veränderliche Bewegung, bei welcher vor Einwirkung der absoluten Kraft schon eine Geschwindigkeit vorhanden ist, eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte, dagegen die Bewegung aus der Ruhe (vorig. §.) eine rein gleichförmig beschleunigte Bewegung zu nennen.

§. 213. Aus den Formeln für die gleichförmig verzögerte Bewegung

$$v = c - Gt, \quad s = ct - \frac{Gt^2}{2}, \quad v^2 = c^2 - 2Gs$$

sieht man, daß die Geschwindigkeit bis zu Null abnimmt und daß dann durch die fernere Einwirkung der unveränderlichen Kraft der materielle Punct in rein gleichförmig beschleunigter Bewegung wieder zurückkehrt.

Die Zeit, wann dies erfolgt und die Größe des Weges, den der Körper bis zu seinem Rückkehren zurücklegt, kann auf folgende Art bestimmt werden.

Für $v = 0$ folgt aus $v = c - Gt$

$$t = \frac{c}{G},$$

welcher Werth in $s = ct - \frac{Gt^2}{2}$ substituirt

$$s = \frac{c^2}{2G} \text{ gibt.}$$

Wird aber dieser Werth in $s = \frac{Gt^2}{2}$ substituirt, so hat man

$$t = \frac{c}{G}$$

und wenn man die Geschwindigkeit für diese Zeit aus $v = Gt$ bestimmt, so wird $v = c$;

d. h. bei der gleichförmig verzögerten Bewegung braucht der Körper gerade so viel Zeit, um zu dem Puncte, in welchem die unveränderliche Kraft zu wirken anfängt, wieder zurückzukehren, als zu der Bewegung von diesem Puncte zum Rückkehrpuncte nöthig ist und langt mit derselben Geschwindigkeit wieder an, mit der er den Punct verlassen hatte.

Daß die Bewegungen von der Wirkung der verzögernden Kraft angefangen, vor- und rückwärts gleich und ähnlich sind, zeigt folgendes.

Betrachtet man die verzögerte Bewegung in einer Zeit $\frac{c}{G} - t'$, also bis t' vor dem Umkehren des bewegten Punctes; so hat man aus

$v = c - Gt$ und $s = ct - \frac{Gt^2}{2}$

$$v' = c - G(\frac{c}{G} - t') = Gt' \quad \text{und}$$

$$s' = c\,(\frac{c}{G} - t') - \frac{G}{2}\,(\frac{c}{G} - t')^2 = \frac{c^2}{2G} - \tfrac{1}{2}Gt'^2.$$

Ferner hat man für die rein gleichförmig beschleunigte Bewegung nach Verlauf der Zeit t' vom Umkehren an

$$v'' = Gt', \; s'' = \frac{G}{2}\,t'^2.$$

Es ist sonach $v'' = v'$ und zugleich nach der Zeit t' der zurückbewegte Punct ebenfalls vom Anfangspunct der verzögerten Bewegung um

$$\frac{c^2}{2G} - s'' = \frac{c^2}{2G} - \frac{Gt'^2}{2}$$

wie vorhin entfernt.

Überhaupt erhält man aus jenen Formeln der verzögerten Bewegung für $t = \frac{c}{G}$ gleiche Resultate in Bezug auf den Punct, wo die Kraft zu wirken angefangen hatte.

II. Der freie Fall.

§. 214. Unzählige Versuche haben dargethan, daß der freie Fall der Körper im luftleeren Raume eine, von der Materie und Masse der Körper unabhängige, gleichförmig beschleunigte Bewegung ist, so daß mithin dieser Unabhängigkeit wegen der freie Fall eines Körpers mit jenem eines materiellen Punctes ganz übereinkommt.

Daß diese Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, geht schon aus den in §. 19 aufgestellten Erfahrungssätzen hervor, denen zufolge die

Schwerkraft bis zu bedeutenden Höhen über der Erdoberfläche als unveränderlich angesehen werden kann.

Zur Unterscheidung der beschleunigten Bewegung des freien Falles von andern beschleunigten Bewegungen wollen wir die Beschleunigung der Schwerkraft immer durch g bezeichnen und nur bemerken, daß dieselbe zwar wegen der täglichen Rotation der Erde mit der geographischen Breite der Orte etwas zunimmt, jedoch für gewöhnliche Anwendungen allenthalben $g = 31$ Wien. F. angenommen werden kann *).

§. 215. Wenn man sonach in den Gleichungen der §. 211 bis 213 g statt G setzt; so hat man für den freien Fall

$$(1) \qquad v = gt = \sqrt{2gs},$$

$$(2) \qquad s = \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}vt = \frac{v^2}{2g}$$

und wenn der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c vertical auf- oder abwärts geworfen wird,

$$(3) \qquad v = c \pm gt,$$

$$(4) \qquad s = ct \pm \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Aus §. 213 folgt offenbar, daß ein gerade aufwärts geworfener Körper eben so viel Zeit zum Steigen als zum Fallen braucht und daß er mit derselben Geschwindigkeit wieder zurückkehrt, mit der er gerade aufwärts geworfen wurde. Die Höhe

$$s = \frac{v^2}{2g},$$

von welcher ein Körper frei herabfallen muß, um eine bestimmte Geschwindigkeit v zu erhalten, heißt die dieser Geschwindigkeit entsprechende Höhe oder kurz die Geschwindigkeitshöhe.

Wenn Körper von einer Höhe in der Luft herabfallen, so werden die Resultate der Erfahrung mit den hier aufgestellten Gesetzen des freien Falles nur dann übereinstimmen, wenn die Körper eine beträchtlich große

*) Genau genommen ist für die geographische Breite φ

$$g = 31{\cdot}0204\ (1 - 0{\cdot}002837 \cos 2\varphi) \text{ Wien. F.},$$

also für $\varphi = 0$ oder am Äquator $g = 30{\cdot}9324$ W. F. am kleinsten, für $\varphi = 90°$ oder an den Polen $g = 31{\cdot}1084$ W. F. am größten, woraus 0·176 W. F. als Unterschied folgt. Für Wien ist

$$g = 31{\cdot}0302 \text{ W. F.}$$

relative Dichtigkeit besitzen und die Dauer der Bewegung sehr kurz ist, damit sie keine große Geschwindigkeit erhalten. Fällt der Körper von einer großen Höhe, so daß er sich während einer bedeutenden Zeit fortbewegen muß; so wächst mit der Geschwindigkeit unverhältnißmäßig auch der Widerstand der Luft, wodurch die Bewegung sehr gehindert wird.

Im Jahre 1807 wurden auf der Simmeringer Heide Versuche gemacht, um die Wirkung der Feuergewehre mit einander zu vergleichen. Die Läufe wurden in einer Maschine eingespannt und ihnen dadurch eine möglichst genaue verticale Richtung gegeben. Eine mit $31\frac{1}{2}$ Gran Pulver abgeschossene Kugel drang bei ihrem Falle $1\frac{1}{2}$ Zoll in die Erde, welche Tiefe die Kugel auch erreichte, als sie nur mit 4 Gran Pulver aus demselben Laufe gerade gegen die Erde abgeschossen wurde. Daraus folgt, daß bei dem Aufwärtsschießen $\frac{27{\cdot}5}{31{\cdot}5}$ Theile der Ladung dazu gehörten, den Widerstand der Luft während der Bewegung der Kugel zu heben und nur $\frac{4}{31{\cdot}5}$ Theile der Ladung ganz allein auf die Kugel wirkten.

Anmerkung. Um den Gebrauch der Formeln sich geläufig zu machen, können Anfänger versuchen, folgende Aufgaben über den freien Fall der Körper zu lösen.

1. Ein Körper ist von einer Höhe von 320 W. F. frei herabgefallen; welche Geschwindigkeit hat er erhalten und wie groß ist die Dauerzeit seines Falles?

2. Von welcher Höhe muß ein Körper frei herabfallen, um die Geschwindigkeit von 1560 W. F. zu erhalten und wie groß ist die Dauerzeit seiner Bewegung?

3. Welche Geschwindigkeit erhält ein Körper, wenn er durch die Zeit von $7\frac{1}{2}$ Secunden frei fällt und wie groß ist der in dieser Zeit zurückgelegte Weg?

4. Eine Kanonenkugel wird vertical aufwärts abgeschossen und kehrt nach 36 Secunden wieder zurück; wie groß war die erreichte Höhe und mit welcher Geschwindigkeit hat sie das Rohr verlassen, wenn man annimmt, daß der Widerstand der Luft keinen Einfluß auf die Bewegung der Kugel gehabt habe?

III. Die Wurfbewegung.

§. 216. Wir wollen in den folgenden §. die Bewegung geworfener schwerer Körper betrachten, dabei aber den Widerstand, welchen die Luft ihnen entgegensetzt, außer Acht lassen, mithin voraussetzen, daß die Bewegung im luftleeren Raume erfolge und dann zeigen, in wie fern die erhaltenen Resultate auf die Wurfgeschoße der Artillerie angewendet werden können.

Zu diesem Zwecke betrachten wir einen schweren materiellen Punct (Körper), welcher von irgend einer Kraft mit der Geschwindigkeit c von A aus in der Richtung AN bewegt wird. Da außer jener Kraft auch noch die Schwere auf den Punct wirkt; so kann die Bewegung desselben offenbar nur in der durch AN gedachten verticalen Ebene erfolgen. Um nun die ebene Curve, welche er beschreibt, zu bestimmen, wählen wir in dieser verticalen Ebene die horizontale Gerade AX zur Axe der x und die verticale AY zu jener der y, indem wir dabei den Winkel $NAX = \varphi$, welchen die Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit mit der erstern Axe einschließt, den Elevations-Winkel und sein Complement $NAY = m$ den Richtwinkel nennen.

Würde die Schwere auf den bewegten Punct nicht wirken, so müßte er nach der Richtung AN in der Zeit t gleichförmig einen gewissen Weg $AC = ct$ zurücklegen, mithin von AY um $DC = AP = AC\cos\varphi = ct\cos\varphi$ und von AX um $AD = PC = AC\sin\varphi = ct\sin\varphi$ entfernt sein.

Würde aber blos die Schwere wirken, also der Punct von A aus frei fallen; so würde er nach verticaler Richtung in derselben Zeit t einen gewissen Weg $AQ = \frac{1}{2}gt^2$ zurücklegen und er muß sonach wegen der gleichzeitigen Wirkung beider Kräfte vermöge §. 215 Gleich. (4), wenn man MQ parallel zu AN zieht, von der Axe der x um

$$CP - AQ = CP - CM = PM = ct\sin\varphi - \tfrac{1}{2}gt^2$$

entfernt sein, also in irgend einem Puncte M unterhalb C sich befinden, während er offenbar von der Axe der y die Entfernung AP behält.

Setzt man nun $AP = x$, $PM = y$; so wird

$$(1) \qquad x = ct\cos\varphi,$$

$$(2) \qquad y = ct\sin\varphi - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

aus welchen Gleichungen durch Elimination von t

$$(3) \qquad y = x\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\varphi} = x\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1 - \frac{gx}{c^2\sin 2\varphi})$$

als Gleichung der Bahn des geworfenen schweren materiellen Punctes sich ergibt und wobei die anfängliche Richtung AN eine Tangente derselben für den Coordinatenursprung A ist.

Da MQ parallel zu AN ist, so hat man

$$AQ = CM = CP - PM = x\,\mathrm{tang}\,\varphi - y = \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\varphi} \text{ und}$$

$$QM = AC = \frac{x}{\cos\varphi}, \text{ mithin}$$

$$AQ = \frac{g}{2c^2} \cdot QM^2 \text{ oder}$$

$$QM^2 = \frac{2c^2}{g} \cdot AQ,$$

welcher Gleichung zufolge sonach die Wurfbahn als eine Parabel sich ergibt, bei der AQ ein Durchmesser ist und die Ordinaten, wie MQ, zu der an den Scheitel A des Durchmessers gezogenen Tangente AN parallel sind.

Da c die Anfangs-Geschwindigkeit ist, so ist $c\cos\varphi$ die nach der Axe der x und wegen der Mitwirkung der Schwere $c\sin\varphi - gt$ jene nach der Axe der y in dem Puncte M, wonach also für die Geschwindigkeit v in diesem Puncte nach der Richtung der Tangente

$$(4) \qquad v = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + (c\sin\varphi - gt)^2} = \sqrt{c^2 - 2gy}$$

sich ergibt.

Setzt man in der Gleichung (3) $y = 0$, so wird

$$\text{entweder } x = 0 \text{ oder } x = \frac{c^2}{g}\sin 2\varphi = AB,$$

wovon der erste Werth den Anfangspunct A der Bewegung und der zweite den Punct B gibt, wo der Körper den Horizont erreicht. Man nennt die Entfernung AB dieser zwei Puncte die horizontale Wurf- oder Schußweite. Bezeichnet man sie durch w, so hat man

$$(5) \qquad w = \frac{c^2}{g}\sin 2\varphi = \frac{c^2}{g}\sin 2m.$$

Um die zur Vollendung dieser Bewegung von A bis B nöthige Zeit zu erhalten, setze man in Gl. (1) $x = w$, wodurch man

$$(6) \qquad t = \frac{w}{c\cos\varphi} \quad \text{und wegen}$$

$$t^2 = w \cdot \frac{w}{c^2\cos^2\varphi} = w \cdot \frac{2\sin\varphi.\cos\varphi}{g\cos^2\varphi}$$

$$(7) \qquad t^2 = \frac{2w}{g}\operatorname{tang}\varphi$$

findet.

§. 217. Die bisher aufgestellten Gleichungen liefern folgende Resultate.

1. Wenn die Anfangs-Geschwindigkeit ungeändert bleibt, so wächst die horizontale Wurfweite mit dem Wachsen des Elevations- oder Richtwinkels bis zu 45°, wie man aus der Gleichung (5)

$$w = \frac{c^2}{g} \sin 2\varphi = \frac{c^2}{g} \sin 2m$$

erkennt.

2. Unter derselben Voraussetzung sind auch zwei Wurfweiten, deren Elevations- oder Richtwinkel sich auf 90° ergänzen, oder gleichweit von 45° abstehen, einander gleich; denn es ist

$$\sin 2(45° + \varphi) = \sin 2(45° - \varphi) \quad \text{und}$$

$$\sin 2(45° + m) = \sin 2(45° - m).$$

3. Bei derselben Anfangs-Geschwindigkeit ist von allen Wurfweiten diejenige, welche unter dem Winkel von 45° erreicht wird, die grösste, weil diesfalls

$$\sin 2\varphi = \sin 2m = \sin 90° = 1$$

am grösten ist.

Benennt man diese grösste Wurfweite mit a, so wird

$$a = \frac{c^2}{g}, \text{ woraus}$$

$$c^2 = ag$$

folgt. Der Einfachheit wegen kann man die unter 45° erreichte Wurfweite zum Maßstabe der Anfangs-Geschwindigkeiten nehmen und durch dieselbe die bisher entwickelten Größen ausdrücken.

So erhält man

$$(3') \qquad y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{2a \cos^2 \varphi} = x \operatorname{tang} \varphi \left(1 - \frac{x}{a \sin 2\varphi}\right),$$

$$(5') \qquad w = a \sin 2\varphi = a \sin 2m,$$

$$(7') \qquad t^2 = \frac{4a}{g} \sin^2 \varphi.$$

4. Die Wurfweite unter dem Elevations- oder Richtwinkel von 15° ist die Hälfte der grösten Wurfweite, da aus (5') diesfalls

$$w = \tfrac{1}{2} a$$

wegen $\sin 2\varphi = \sin 2m = \frac{1}{2}$ folgt.

5. Der Abstand des Wurfortes von dem Brennpuncte der Bahn ist die Hälfte der grösten Wurfweite.

Denn für den Brennpunct f ist der Winkel

$$fAT = TAY = 90° - \varphi, \text{ mithin}$$

$$YAf = AfU = 180° - 2\varphi,$$

sofort im Dreiecke AfU

$$Af = \frac{AU}{\sin(180° - 2\varphi)} = \frac{\frac{1}{2}w}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{2}a.$$

6. Die größte Erhöhung US des geworfenen Körpers über den Horizont findet man aus der Gleichung (2), wenn man daselbst, indem in S die verticale Geschwindigkeit

$$c \sin \varphi - gt = 0$$

ist, den hieraus folgenden Werthen von t

$$t = \frac{c}{g} \sin \varphi$$

substituirt; denn dadurch wird

$$y = US = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} w \operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{2} a \sin^2 \varphi.$$

Übrigens folgt auch aus

$$US = \tfrac{1}{2}UT \text{ wegen}$$

$$UT = \tfrac{1}{2} w \operatorname{tang} \varphi$$

derselbe Werth für US.

Wird $\varphi = 90°$, so erhält man $\sin^2 \varphi = 1$; d. h. wenn ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit vertical aufwärts geworfen wird; so steigt er auf eine Höhe, welche die Hälfte der größten Wurfweite ist, die er mit derselben Anfangs-Geschwindigkeit erreichen kann.

7. Bei derselben Anfangs-Geschwindigkeit verhalten sich die Wurfweiten wie die Sinus der doppelten Elevations- oder Richtwinkel; denn gehören zu den Wurfweiten w, w_1 die Elevationswinkel φ, φ_1 und die Richtwinkel m, m_1; so hat man nach Gleichung (5)

$$w = \frac{c^2}{g} \sin 2\varphi = \frac{c^2}{g} \sin 2m \quad \text{und}$$

$$w_1 = \frac{c^2}{g} \sin 2\varphi_1 = \frac{c^2}{g} \sin 2m_1, \text{ folglich}$$

$$w : w_1 = \sin 2\varphi : \sin 2\varphi_1 = \sin 2m : \sin 2m_1.$$

8. Bei derselben Elevation verhalten sich die Wurfweiten wie die Quadrate der Anfangs-Geschwindigkeiten, was man aus der Gleich. (5)

$$w = \frac{c^2}{g} \sin 2\varphi = \frac{c^2}{g} \sin 2m$$

erkennt.

9. Die Quadrate der Dauerzeiten der Bewegung verhalten sich wie die Producte aus den Wurfweiten in die Tangenten der Elevationswinkel; denn sind t, t_1 die zur Erreichung der Wurfweiten w, w_1 nöthigen Dauerzeiten und φ, φ_1 die zugehörigen Elevationswinkel; so hat man vermöge Gleich. (7)

$$(8) \qquad t^2 : t_1^2 = w \operatorname{tang} \varphi : w_1 \operatorname{tang} \varphi_1 ;$$

für $w = w_1$ wird

$$t^2 : t_1^2 = \operatorname{tang} \varphi : \operatorname{tang} \varphi_1 \quad \text{und}$$

für $\varphi = \varphi_1$ hat man

$$t^2 : t_1^2 = w : w_1 ;$$

ist $w \operatorname{tang} \varphi = w_1 \operatorname{tang} \varphi_1$, so muß auch $t = t_1$ sein; Sätze, die sich leicht in Worte fassen lassen.

10. Die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers nimmt mit dem Wachsen der Erhöhung über den Horizont ab, daher sie in dem höchsten Puncte S ihr Minimum, welches der Geschwindigkeit nach der Axe der x gleich ist, erreicht; dies erkennt man aus der Gleichung

$$(4) \qquad v = \sqrt{c^2 - 2gy},$$

aus welcher zugleich für

$$y = \tfrac{1}{2} a \sin^2 \varphi = \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{g} \sin^2 \varphi \text{ sich}$$

$$v = \sqrt{c^2 - c^2 \sin^2 \varphi} = c \cos \varphi$$

ergibt. Von S an nimmt die Geschwindigkeit auf gleiche Weise zu, als sie früher abnahm, so daß der geworfene Körper in je zwei Puncten, deren Projectionen auf AX respective von A und B gleichweit abstehen, immer dieselbe Geschwindigkeit hat, weshalb er auch in B mit der Anfangs-Geschwindigkeit c den Horizont erreicht. Für Puncte E′ unter dem Horizonte wächst die Geschwindigkeit bis ins Unendliche, wie obige Gleichung zeigt.

§. 218. Die hier aufgestellte Theorie der geworfenen schweren Körper nennt man die parabolische; sie findet, wie bereits oben erwähnt, nur unter der Voraussetzung statt, daß die Bewegung im luftleeren Raume erfolge.

Da aber die Wurfgeschoße der Artillerie noch den Widerstand der Luft zu überwinden haben, welcher in weit größerem Verhältnisse als die Geschwindigkeit zunimmt und überdies noch mit der Abnahme der Dichtigkeit der Projectile wächst; so weichen die Flugbahnen zu sehr von der Parabel ab, als daß die parabolische Theorie auf das Schießen der Geschütz- und Gewehrkugeln, welche mit großer Geschwindigkeit bewegt werden, angewendet werden könnte.

Selbst für das Bombenwerfen und Ricochetiren, wo die Geschwindigkeiten viel geringer sind, kann diese Theorie nur als ein Einschaltungsmittel zwischen den aus der Erfahrung bekannten Wurf- und Schußweiten gelten, wenn die Geschützladungen nicht zu weit von einander liegen und beim Bombenwerfen die Unterschiede der Richtwinkel nicht über 15 Grade betragen. Jedoch geben dann anderseits die zwischen solchen Erfahrungsgrenzen nach der parabolischen Theorie berechneten Resultate meist geringere Abweichungen, als die sind, welche unter einerlei Umständen durch zufällige Ursachen, die man entweder gar nicht oder nur höchst unvollkommen in Rechnung ziehen kann, hervorgebracht werden. Dahin gehört die verschiedene Lagerung des Pulvers ohne Patrone, die verschiedene Festigkeit der Patronen, das mehr oder weniger häufige Anschlagen der Projectile an den Bohrungswänden, wesentlich aber die ungleiche Entwicklung der Pulverladung in Gas, die Beschaffenheit der atmosphärischen Luft, die Lage der Axe, um welche das Projectil in der Luft rotirt, u. s. w.

Daß das Projectil oft rotirend aus der Mündung des Geschützes heraustritt, wurde §. 201 zu erklären versucht, daß aber dasselbe durch das Rotiren des Luftwiderstandes wegen, selbst wenn es eine vollkommen concentrische Kugel ist, von der Bahn abweicht, die es ohne Rotation beschreiben würde, soll hier nach Herrn Otto, Hauptm. der k. preußischen Garde-Artillerie in seinem Werke: *„Ueber die Umdrehung der Artillerie-Geschosse Berlin* 1843“ gezeigt werden.

Es sei CN (Fig. 140) die Richtung der fortschreitenden Bewegung einer Kugel, welche um einen in C auf dem größten Kreise mm′p senkrechten Durchmesser nach Anzeige des krummen Pfeiles rotirt. In irgend einem Augenblicke dieser doppelten Bewegung betrachten wir zwei Puncte m und m′ des größten Kreises, welche von dem vordersten Punct v um gleiche Bogen vm = vm′ entfernt sind. Wird nun in diesen Puncten durch mf = m′f′ parallel zu CN die fortschreitende Geschwindigkeit aller Puncte der Kugel, dann durch mr = m′r′ nach den Tangenten daselbst die Rotations-Geschwindigkeit vorgestellt und zerlegt man mr und m′r′ in die Geschwindig-

keiten ma, m'a' parallel zu CN und in jene mb, m'b' darauf senkrecht; so wird in der Rotation nichts geändert, aber es erhält, wie man sieht, in jedem Augenblicke die fortschreitende Geschwindigkeit des Punctes m eine Vergrößerung ma, dagegen die fortschreitende Geschwindigkeit des gleichliegenden Punctes m' an der rechten Seite eine eben so große Verminderung m'a' = ma. Dies läßt sich noch daraus erklären, daß in jedem Zeittheilchen ein Punct an der linken Seite der Kugel durch die Drehung vorwärts einen größern Weg in der fortschreitenden Bewegung zurücklegt als der Mittelpunct der Kugel, während in demselben Zeittheilchen der gleichliegende Punct zur Rechten seines Zurückdrehens wegen einen eben so viel kürzern Weg im Vorwärtsschreiten macht.

Nachdem also bei der angezeigten Rotation der Kugel jedes links liegende Theilchen ihrer vordern Oberfläche mit größerer Geschwindigkeit vorwärts schreitet als jedes gleichliegende Theilchen an der rechten Seite dieser Oberfläche; so muß auch in jedem Augenblicke der gesammte Luftwiderstand senkrecht auf die linke vordere Oberfläche größer sein als der gesammte Luftwiderstand auf die rechts liegende vordere Oberfläche, jedoch müssen die Richtungen beider Widerstände mit CN gleiche Winkel einschließen. Ist sonach nw der eine und n'w' der andere Widerstand und zerlegt man beide parallel zu CN und senkrecht darauf; so sind wegen nw > n'w' auch die Seitenwiderstände ungleich, es ist nemlich nl > n'l' und nk > n'k', wovon die beiden ersten blos der fortschreitenden Bewegung entgegenwirken, die beiden letzten aber werden durch ihre Differenz nk — n'k' die Kugel in jedem Augenblicke aus ihrer Richtung CN gegen die rechte Seite abdrängen, so daß sie eine krumme Linie CN' beschreiben muß.

Rotirt demnach die Kugel von vorne über oben oder unten, so wird die Kugel im ersten Falle im Sinken mehr gehindert, somit eine weitere Distanz, im zweiten aber am Steigen mehr gehindert, sofort eine kürzere Distanz erreichen, als sie ohne Rotation zurückgelegt hätte. Ferner muß bei der Rotation von vorne über rechts oder links die Kugel rechts oder links abweichen. Nur wenn die Rotationsaxe die Flugbahn stets tangirt, kann keine Abweichung von derselben erfolgen, weil da die fortschreitende Geschwindigkeit aller Puncte um die Rotationsaxe herum dieselbe ist. Diese Rotationsart wird durch die gewindartigen Züge bei gezogenen Röhren herbeigeführt, daher auch der sichere Schuß aus denselben.

A. Das Bombenwerfen.

§. 219. Der ausübende Artillerist hat beim Bombenwerfen wesentlich

1. die dem gegebenen Zwecke entsprechende Elevation zu wählen,

2. die dieser Elevation und der gegebenen horizontalen Entfernung des zu bewerfenden Objectes zugehörige Pulverladung sammt der Brandröhrenlänge zu bestimmen und

3. die allenfalls nöthigen Änderungen dieser drei Elemente einfach und zweckdienlich zu bewerkstelligen.

a. Bestimmung der Elevation.

Da nach §. 217 bei derselben Anfangs-Geschwindigkeit (Pulverladung) unter zwei von 45° gleichweit abstehenden Elevationen, also unter numerisch gleichen Elevations- und Richtwinkeln gleiche Wurfweiten erreicht werden; so sind unsere Mörserschleifen so eingerichtet, daß man den Mörser nur bis 45° senken kann, weshalb man auch die Elevationen stets durch Richtwinkel ausdrückt. Anderseits hat man 15° als den kleinsten Richtwinkel festgesetzt, weil sonst die Bomben gar zu hoch steigen und dadurch zu sehr von der verticalen Richtungsebene abgeleitet würden. Innerhalb dieser so festgesetzten Grenzen werden die Richtwinkel von 15° bis 25°, von 25° bis 35°, von 35° bis 45° die hohen, mittlern und niedern genannt. Der Zweck nun, welchen man durch das Bombenwerfen erreichen will, bestimmt die Gattung des zu wählenden Richtwinkels. Dieser wird ein hoher sein müssen, wenn z. B. ein sehr festes Gewölbe durchzuschlagen, ein mittlerer, wenn ein anderes Gebäude zu zerstören und ein niederer, wenn der Feind in den Festungs- oder Belagerungswerken zu beunruhigen ist und durch die Stücke der zersprengten Bomben beschädigt werden soll.

Die horizontale Entfernung des zu bewerfenden Objectes, so wie der Umstand, daß man bei allenfalls nöthigen Änderungen nicht aus der einen Gattung in die andere übergehen darf, bestimmen endlich den Grad der betreffenden Gattung.

b. Bestimmung der Pulverladung und Brandröhrenlänge.

Um die der gewählten Elevation und gegebenen horizontalen Entfernung des zu bewerfenden Objectes zugehörige Pulverladung und Brandröhrenlänge bestimmen zu können; hat man für jede Mörsergattung alter und neuer Art aus Versuchen eigene, am Ende dieses Abschnittes beigefügte Wurftafeln zusammengestellt, welche für die in runden Zahlen angegebenen und

in ziemlich kleinen Intervallen auf einander folgenden Wurfweiten unter den Richtwinkeln von 5 zu 5 Graden die entsprechenden Pulverladungen und Brandröhrenlängen mit der Angabe des Brandröhrensatz-Numero enthalten.

Dabei hat man aber auch noch die Stärke des Pulvers, welches man verwendet, zu berücksichtigen, indem die Erfahrung lehrt, daß man bei 8 bis 10 Graden Unterschied in der Pulverstärke jedes Pfund der bestimmten Ladung um 1 Loth ändern müsse. Die allen Wurftafeln zu Grunde gelegte Pulverstärke beträgt 56 Grade der Hebelprobe.

Beispiel. Es sei aus einem 60pfündigen Mörser neuer Art ein festgewölbtes Gebäude, dessen horizontale Entfernung 560 Klaftern beträgt, zu bewerfen und das vorhandene Pulver habe die Stärke von 62 Graden der Hebelprobe.

Hat man den Winkel von 20° gewählt, so findet man aus der Wurftafel die Ladung von 3 Pf. 5 Loth und die Brandröhrenlänge von $4\frac{1}{4}$" Satz Nro 4. Da jedoch das Pulver von dem der Wurftafel zu Grunde gelegten um 6 Grade verschieden ist; so hat man dem Obigen zufolge wegen

$$10:1=6:x \text{ und } x=\frac{3}{5}$$

von der genannten Ladung $3\times\frac{3}{5}$, also 2 Lothe abzubrechen, wodurch eine Ladung von 3 Pf. 3 L. sich ergibt.

Ist aber die gegebene Distanz in der Wurftafel nicht enthalten; so wird man den Erfahrungssatz: »daß die Differenzen der Wurfweiten innerhalb der in den Tafeln enthaltenen Grenzen sich wie die Differenzen der Ladungen verhalten« zum Interpoliren benützen; denn der in §. 217 ausgesprochene Satz: »daß die Wurfweiten bei derselben Elevation den Quadraten der Anfangs-Geschwindigkeiten proportional sind« kann nicht angewendet werden, indem diese Geschwindigkeiten sich nicht wie die Ladungen verhalten. Versuche zeigen, daß nur bei kleinen Ladungen die Wurfweiten den Quadraten der Ladungen, bei mittlern aber die Quadrate der Wurfweiten nahe den dritten Potenzen der Ladungen und endlich bei großen die Wurfweiten nahe den Ladungen proportional sind.

Um jedoch das genannte Interpoliren zu erleichtern, hat man den Wurftafeln die beiläufigen Änderungen der Wurfweiten bei jeder Winkelgattung durch eine gewisse Anzahl Lothe Pulvers beigefügt. Auf diese Weise wird man daher leicht zu jeder, nicht in den Wurftafeln enthalte-

nen Wurfweite bei einem gegebenen Richtwinkel die entsprechende Ladung und Brandröhrenlänge, für welche dieselbe Interpolationsmethode anwendbar ist, finden können.

Beispiel. Es sei aus einem 30pfündigen Mörser alter Art der Wallgang eines Bollwerks, dessen horizontale Entfernung 312 Klaftern beträgt, zu bewerfen; das Pulver besitze die den Tafeln zu Grunde gelegte Stärke und es sei der Richtwinkel von 35° gewählt worden.

Da die Wurfweite von 300 Klft. unter dem Winkel von 35° mit 1 Pf. 6 L. Ladung bei $4\frac{1}{2}''$ Brandröhrenlänge Satz Nro 2 und jene von 330 Klft. mit 1 Pf. 8 Loth bei 5″ Brandröhrenlänge erreicht wird, so hat man

$$30:12=2:x=\tfrac{1}{2}:y, \text{ also}$$

$$x=\tfrac{4}{5} \text{ oder } 1 \text{ L.}, \; y=\tfrac{1}{5}'' \text{ oder } \tfrac{1}{4}'',$$

sofort für die Distanz von 312 Klft. unter den gegebenen Umständen eine Pulverladung von 1 Pf. 7 L. bei $4\frac{3}{4}''$ Brandröhrenlänge vom Satze Nro 2.

Dasselbe Resultat hätte man erhalten, wenn man die der Tafel angehängten Änderungen der Wurfweiten benützt hätte, welchen zufolge dieselbe unter dem Richtwinkel von 25° bis 35° durch 4 Lothe um 50 Klft., also durch ein Loth um $12\frac{1}{2}$ Klft. geändert wird.

Wäre für den zum Gebrauche zu verwendenden Mörser keine Wurftafel vorhanden, oder wäre das zu gebrauchende Pulver ganz verschieden von dem, worauf sich die vorliegende Wurftafel gründet; so muß man auf einem schicklichen Platze unter einigen Richtwinkeln, etwa unter 20°, 30° und 40° mit etwa $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$ und $\frac{5}{8}$ Kammerladung die Wurfweiten und die dazu nöthigen Dauerzeiten bestimmen. Daß man dann ganz auf die oben angegebene Weise die Ladung und Brandröhrenlänge bestimmen könne, versteht sich von selbst.

Übrigens kann man, falls die Brandröhren nicht mit einem der in den Tafeln angenommenen Sätze geschlagen wären, die Brandröhrenlängen, welche den Dauerzeiten der Bewegung proportional sein müssen, sobald man die für das Verbrennen einer bestimmten, nicht zu kleinen Satzlänge kennt, durch den mit der Erfahrung ziemlich genau übereinstimmenden Satz: daß die Quadrate der Dauerzeiten der Bewegung d. h. der Brandröhrenlängen sich wie die Producte aus den Wurfweiten in die Tangenten der Elevationswinkel verhalten, bestimmen.

Beispiel.

Hätte man z. B. einen Satz, von welchem 5″ durch 24 Secunden brennen, und es wäre, um mit einem 10pfündigen Mörser unter dem Winkel von 30 Graden die Distanz von 230 Klft. zu erreichen, der beobachteten Dauerzeit entsprechend eine Brandröhrenlänge von 3″ nöthig gewesen; so würde man die Brandröhrenlänge x für die unter 20° zu erreichende Distanz von 200 Klaftern aus

$9 : x^2 = 230 \text{ tang } 60° : 200 \text{ tang } 70° = 230 . 1{\cdot}732 : 200.2{\cdot}747 =$

$39836 : 54940$ oder aus

$x^2 = 12{\cdot}41$ erhalten, folglich $x = 3\frac{1}{2}''$

finden.

c. Änderung des Richtwinkels, der Pulverladung und Brandröhrenlänge.

Mit dem angenommenen Richtwinkel und der nach dem Vorhergehenden bestimmten Pulverladung macht man nun einige Probwürfe, um aus deren arithmetischen Mittel zu erkennen, wie groß im Durchschnitte der Unterschied der erreichten und der gegebenen Wurfweite sei. Beträgt dieser Unterschied bei nicht gar zu großen Distanzen nicht mehr als $\frac{1}{20}$ der gegebenen Wurfweite; so wird man, da die im vorigen §. angeführten zufälligen Ursachen in ihrer Zusammenwirkung wohl noch größere Unterschiede hervorbringen können, gar keine Änderung vornehmen.

Ist aber dieser Unterschied größer, so wird man, falls er $\frac{1}{15}$ der zu erreichenden Wurfweite nicht übersteigt, im Allgemeinen den Richtwinkel und endlich bei größern Unterschieden die Ladung ändern, obwohl verschiedene Umstände auch gerade nur die Änderung des einen oder andern Elementes bedingen können.

Die Änderung des Richtwinkels kann mit Hilfe des in §. 217 angeführten Satzes: daß bei derselben Anfangs-Geschwindigkeit die Wurfweiten sich wie die Sinus der doppelten Richtwinkel verhalten, bewerkstelligt werden, da dieser Satz der paraboliſchen Theorie nahe genug innerhalb der in §. 218 angegebenen Grenzen mit den aus sorgfältigen Versuchen gezogenen Resultaten übereinstimmt.

Beispiel.

Es sei aus einem altartigen 30pfündigen Mörser in der Entfernung von 415° Klaft. ein Magazin unter dem angenommenen Richtwinkel von

30° zu bewerfen, und es besitze das zu verwendende Pulver die Stärke von 52 Graden Hebelprobe.

Nach dem Vorhergehenden hat man aus der Wurftafel

$$30 : 15 = 2 : x, \text{ also}$$

$$x = 1 \text{ Loth}$$

und die gesuchte Ladung beträgt 1 Pf. 15 L., welche noch, da die Pulverstärke um 4 Grade geringer als die in der Wurftafel vorausgesetzte ist, um $\frac{3}{4}$ Lothe vermehrt werden muß.

Hätte man nun bei den gemachten Probewürfen nach einander die Distanzen 385, 376, 393 und 402 Klft., also im Mittel die Distanz 389 Klft. erreicht, so würde man, da $\frac{415-389}{415} = \frac{1}{16}$ ist, den Richtwinkel ändern und den neuen aus

$$415 : 389 = \sin 2x : \sin 60° \text{ oder}$$

$$415 : 389 = \sin 2x : 0{\cdot}866, \text{ also}$$

$$\sin 2x = 0{\cdot}924 \text{ und}$$

$$x = \tfrac{1}{2}.67\tfrac{1}{2}° = 33° 45'$$

erhalten.

Um die dabei vorkommenden Rechnungen bequemer ausführen zu können, hat Oberstlieut. Freiherr v. Vega die Distanz- und Winkelzeiger erdacht und dafür eigene Tafeln berechnet, welche sammt den öfters nöthigen Tangenten- und Sinus-Tafeln zu Ende dieses Abschnittes beigefügt werden. Die erstern Tafeln beruhen auf Folgendem.

Da die Wurfweiten meist zwischen 100 und 1000 Klaftern liegen und es genügt, die Richtwinkel von 10 zu 10 Minuten zu nehmen; so verfährt man hinreichend genau, wenn man von den Logarithmen der Wurfweiten und der Sinus der doppelten Richtwinkel drei Decimalstellen beibehält. Da ferner der kleinste doppelte Richtwinkel 30° beträgt und — wenigstens bei den größern Mörsergattungen — keine Wurfweite der herumfliegenden Bombenstücke wegen unter 100 Klaftern zulässig ist; so wird sowohl der Quotient des Sinus eines jeden doppelten Richtwinkels durch sin 30°, als auch der Quotient jeder Wurfweite durch 100 größer als die Einheit oder mindestens ihr gleich, somit der Logarithme jedes dieser Quotienten sicher nicht negativ.

Ist nun w eine Wurfweite und m der zugehörige Richtwinkel, so nennt man die ganze Zahl

$$1000.\log \frac{w}{100} = 1000\ (\log w - 2)$$

den Distanzzeiger von w

und die ganze Zahl

$$1000.\log \frac{\sin 2m}{\sin 30^0} = 1000\,(\log \sin 2m - \log \sin 30^\circ)$$

den Winkelzeiger vom m,

indem man erstern durch DZ.w und letztern durch WZ.m bezeichnet.

Sind aber m und m_1 die zu den Wurfweiten w und w_1 zugehörigen Richtwinkel; so hat man nach §. 217. 7

$$w : w_1 = \sin 2m : \sin 2m_1 \quad \text{oder}$$

$$\frac{w}{100} : \frac{w_1}{100} = \frac{\sin 2m}{\sin 30^\circ} : \frac{\sin 2m_1}{\sin 30^\circ} \quad \text{oder}$$

$$\log \frac{w}{100} - \log \frac{w_1}{100} = \log \frac{\sin 2m}{\sin 30^\circ} - \log \frac{\sin 2m_1}{\sin 30^\circ}, \text{ folglich}$$

$$1000 \log \frac{w}{100} - 1000 \log \frac{w_1}{100} = 1000 \log \frac{\sin 2m}{\sin 30^\circ} - 1000 \log \frac{\sin 2m_1}{\sin 30^\circ}$$

und vermöge obiger Bezeichnungen

$$\text{DZ}.w - \text{DZ}.w_1 = \text{WZ}.m - \text{WZ}.m_1;$$

d. h. die Distanzzeiger der Wurfweiten verhalten sich arithmetisch wie die Winkelzeiger der Richtwinkel.

Um die Tafel der Distanzzeiger nicht zu weit ausdehnen zu müssen, hat man in derselben blos die Distanzen von 100 bis 500 Klaftern aufgenommen. Fällt daher eine Wurfweite über 500, oder bei der kleinsten Mörsergattung noch unter 100 Klaftern; so darf man nur, wie man leicht erkennt, im ersten Falle beide Wurfweiten durch 2, 3 oder 4 dividiren und im zweiten beide doppelt nehmen.

Wird der gesuchte Winkelzeiger negativ, so ist dies ein Zeichen, daß man bei der angenommenen Ladung selbst unter dem Richtwinkel von 15° das gegebene Object überwerfen würde. Wird aber der Winkelzeiger größer als 301, nemlich größer als der von 45°, so wird man auch mit dem Winkel von 45° das Ziel nicht erreichen. In beiden Fällen muß daher die Ladung geändert werden, was auch geschehen muß, wenn man in eine andere, dem gegebenen Zwecke nicht entsprechende Winkelgattung durch das nöthige Abändern verfallen sollte.

Beispiel.

Wenn man mittels obiger arithmetischer Proportion den Richtwinkel ändert, so hat man für das vorige Beispiel

$$DZ.415 - DZ.389 = WZ.x - WZ.30 \text{ oder}$$
$$618 - 590 = WZ.x - 239, \text{ also}$$
$$WZ.x = 267 \text{ und}$$
$$x = 33° 50'.$$

Um alle Rechnung zu ersparen, kann man mittels obigen Satzes innerhalb der Grenzen des 20ten bis 15ten Theiles der zu erreichenden Wurfweiten eine Tafel für die nöthige Änderung des Richtwinkels entwerfen; denn man hat

$$w : (w \pm \frac{w}{n}) = \sin 2m : \sin 2x \quad \text{oder}$$

$$n : (n \pm 1) = \sin 2m : \sin 2x \quad \text{und}$$

wenn man die Änderung des Richtwinkels durch $\triangle m$ bezeichnet,

$$\pm \triangle m = x - m,$$

wobei die für $+\triangle m$ erhaltene Anzahl Grade zum angenommenen Richtwinkel zu addiren sind, wenn man zu kurz gekommen und die für $-\triangle m$ erhaltenen Grade davon wegzunehmen sind, wenn man das Ziel überworfen hat. Daß die so erhaltenen Werthe nur für mittlere gelten können, versteht sich von selbst.

Bei dem Richtwinkel von 40° ist, wenn man zu kurz kommt, keine Änderung mehr möglich, daher man, so wie, wenn unter dem Richtwinkel von 35° der Unterschied der erreichten und zu erreichenden Wurfweite größer als $\frac{1}{17}$ der letztern ist, die Ladung ändern muß.

Tafel für die Änderung der Richtwinkel.

n	$+\triangle m$					$-\triangle m$					
	15°	20°	25°	30°	35°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
20	0°50′	1°15′	1°50′	2°50′	5°45′	1°10′	1°35′	2°15′	3°15′	5°10′	8 50′
19	0 55′	1°20′	2° 0′	3° 0′	6°20′	1°10′	1°40′	2°20′	3°25′	5°20	9° 5′
18	1° 0′	1°25′	2° 5′	3°15′	7° 5′	1°15′	1°45′	2°25′	3°30′	5°30′	9°20′
17	1° 0′	1°30′	2°15′	3°30′	8°25′	1°20′	1°50′	2°35′	3°45′	5°45′	9°35′
16	1° 5′	1°40′	2°25′	3°45′	—	1°25′	1°55′	2°40′	3°55′	6° 0′	9 50′
15	1°10′	1°45′	2°35′	4° 0′	—	1°30′	2° 0′	2°50′	4° 5′	6°20′	10°10′

Nach dieser Tafel wäre daher für obiges Beispiel $+\triangle m = 3° 45'$, folglich 33° 45′ der zu verwendende Richtwinkel, wie früher.

Um aber auch diese Tafel entbehrlich zu machen, hat man jeder Wurftafel die beiläufige Änderung der Wurfweite bei kleinen, mittlern und großen Pulverladungen durch die Änderung des Richtwinkel um 5° Grade beigegeben und dabei vorausgesetzt, daß innerhalb dieser Grenze beide Änderungen als einander proportional angesehen werden können.

Für das obige Beispiel wäre sonach, da bei 1 Pf. 15 L. Pulverladung eine Änderung des Richtwinkels um 5 Grade ungefähr 40° Klaftern Änderung der Wurfweite bewirkt, für 26 Klft. der Richtwinkel um $3\frac{1}{4}°$ zu ändern.

Anmerkung. Wäre die Pulverladung gegeben und der dazu gehörige Richtwinkel zu bestimmen; so würde man gleichfalls den erwähnten Satz aus §. 217. 7 zu dessen Bestimmung benützen können. Wir wollen jedoch dieses Problem allgemeiner im Folgenden noch auf eine andere Art, sowohl durch Rechnung als Verzeichnung, lösen.

§. 220. Liegt das Ziel nicht im Horizonte des Wurfortes, sondern entweder ober- oder unterhalb desselben in **E** oder **E'** (Fig. 139); so handelt es sich offenbar nur darum, denjenigen Punct **B**, wo die durch **E** oder **E'** gehende Bahn der Bombe den Horizont des Wurfortes durchschneidet, zu bestimmen, weil man dann denselben als das Object betrachten kann, welches man zu bewerfen hat und wofür alles bereits Angeführte gilt.

Um nun die horizontale Wurfweite $\mathbf{AB} = w$ zu bestimmen, seien $\pm h$ und b die Coordinaten der Puncte **E** und **E'**, nemlich die Erhöhung $\mathbf{FE} = +h$, die Vertiefung $\mathbf{F'E'} = -h$ und die horizontale Entfernung des Ziels **E** oder **E'** vom Wurforte **A**, also **AF** oder $\mathbf{AF'} = b$. Dadurch wird, wenn man erwägt, daß man der Gleichung (3) wegen

$$(5) \qquad w = \frac{c^2}{g} \sin 2\varphi$$

auch die Form

$$(9) \qquad y = x \frac{(w-x)}{w} \operatorname{tang} \varphi$$

geben kann,

$$\pm h = b \frac{(w-b)}{w} \operatorname{tang} \varphi \text{ oder}$$

$$w = \frac{b}{1 \mp \frac{h}{b} \operatorname{cotg} \varphi} = \frac{b}{1 \mp \frac{h}{b} \operatorname{tang} m},$$

wenn φ den Elevations- und m den Richtwinkel bezeichnet.

Ist n der Erhöhungswinkel EAF oder der Vertiefungswinkel E'AF'; so erhält man, da

$$\text{tang}\, n = \frac{h}{b}$$

ist,

$$(10) \quad w = \frac{b}{1 \mp \text{tang}\, m \,.\, \text{tang}\, n}$$

$$= \frac{b}{2}\left[1 + \frac{\cos(m \mp n)}{\cos(m \pm n)}\right] = \frac{b}{2}\left[1 + \frac{\sin[90° - (m \mp n)]}{\sin[90° - (m \pm n)]}\right],$$

wobei die obern Zeichen für ein erhöhtes Ziel und die untern für ein vertieftes gelten.

Zur Erleichterung der Rechnung hat man den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\left[1 + \frac{\cos(m \mp n)}{\cos(m \pm n)}\right] = \frac{\cos m \,.\, \cos n}{\cos(m \pm n)} = \gamma$$

für die Richtwinkel m von 5 zu 5 Graden und für die Erhöhungs- und Vertiefungswinkel n über 4° von Grad zu Grad berechnet und diese Zahlen in die folgende Tafel gebracht.

Tafel zur Bestimmung der Wurfweiten bei erhöhtem oder vertieftem Ziele.

Abweichung des Zieles vom Horizont der Batterie		Für ein erhöhtes Ziel							Für ein vertieftes Ziel						
in Theilen von *b*	in Graden	Richtwinkel in Graden													
		15	20	25	30	35	40	45	15	20	25	30	35	40	45
0·070	4	1·02	1·03	1·03	1·04	1·05	1·06	1·08	0·98	0·97	0·97	0·96	0·95	0·94	0·93
0·087	5	1·02	1·03	1·04	1·05	1·06	1·08	1·10	0·98	0·97	0·96	0·95	0·94	0·93	0·92
0·105	6	1·03	1·04	1·05	1·06	1·08	1·10	1·12	0·97	0·96	0·95	0·94	0·93	0·92	0·90
0·123	7	1·03	1·05	1·06	1·08	1·09	1·11	1·14	0·97	0·96	0·95	0·93	0·92	0·91	0·89
0·141	8	1·04	1·05	1·07	1·09	1·11	1·13	1·16	0·96	0·95	0·94	0·92	0·91	0·89	0·88
0·158	9	1·04	1·06	1·08	1·10	1·12	1·15	1·19	0·96	0·95	0·93	0·92	0·90	0·88	0·86
0·176	10	1·05	1·07	1·09	1·11	1·14	1·17	1·21	9·95	0·94	0·92	0·91	0·89	0 87	0·85
0 194	11	1·06	1·08	1·10	1·13	1·16	1·19	1·24	0·95	0·93	0·92	0·90	0·88	0·86	0·84
0 213	12	1·06	1·08	1·11	1·14	1·17	1·22	1·27	0·95	0·93	0·91	0·89	0·87	0·85	0·82
0·231	13	1·07	1·09	1·12	1·15	1·19	1·24	1·30	0·94	0·92	0·90	0·88	0·86	0·84	0·81
0·249	14	1·07	1·10	1·13	1·17	1·21	1·26	1·33	0·94	0·92	0·90	0·87	0·85	0·83	0·80
0 268	15	1·08	1·11	1·14	1·18	1·23	1·29	1·37	0·93	0·91	0·89	0·87	0·84	0·82	0·79
0·287	16	1·08	1·12	1·15	1·20	1·25	1·32	1·40	0·93	0·91	0·88	0·86	0·83	0·81	0·78
0·306	17	1·09	1·13	1·17	1·21	1·27	1·35	1·44	0·92	0·90	0·88	0·85	0·82	0·80	0·77
0·325	18	1·10	1·13	1·18	1·23	1·29	1·37	1·48	0·92	0·89	0·87	0·84	0·81	0·79	0·75
0·344	19	1·10	1·14	1·19	1·26	1·32	1·41	1·53	0·92	0·89	0·86	0·83	0·81	0·78	0·74
0 346	20	1·11	1·15	1·20	1·27	1·34	1·44	1·57	0·91	0·88	0·85	0·83	0·80	0·77	0 73

Man sieht, daß man wegen

$$w = b.\gamma$$

blos die gegebene Abscisse b des Zieles mit der betreffenden Zahl aus der Tafel zu multipliciren brauche, um die zur Bestimmung der Ladung nöthige horizontale Wurfweite zu erhalten.

Ist ein Object um weniger als 4 Grade erhöht oder vertieft; so kann man es in der Ausübung als im Horizonte des Wurfortes liegend betrachten, wenn seine horizontale Entfernung nicht gar zu groß und der Richtwinkel kein niederer ist.

Übrigens kann w auch mittels der Distanz- und Winkelzeiger berechnet werden, wozu man der Gleichung (10) die Form

$$w = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin 2\,[45° - \frac{1}{2}(m \mp n)]}{\sin 2\,[45° - \frac{1}{2}(m \pm n)]} = \tfrac{1}{2}(b+x)$$

ertheilt und Kürze halber

$$45° - \tfrac{1}{2}(m \mp n) = M \quad \text{und}$$
$$45° - \tfrac{1}{2}(m \pm n) = M_1$$

setzt; wodurch

$$x = b.\frac{\sin 2M}{\sin 2M_1}, \text{ folglich}$$

$$\log\frac{x}{100} = \log\frac{b}{100} + \log\frac{\sin 2M}{\sin 30°} - \log\frac{\sin 2M_1}{\sin 30°} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{DZ}.x = \mathrm{DZ}.b + \mathrm{WZ}.M - \mathrm{WZ}.M_1$$

wird. Man hat sonach

(11) $\mathrm{DZ}.x = \mathrm{DZ}.b + \mathrm{WZ}[45° - \frac{1}{2}(m \mp n)] - \mathrm{WZ}[45° - \frac{1}{2}(m \pm n)]$

und

$$w = \tfrac{1}{2}(b+x),$$

woraus folgende, leicht faßliche praktische Regel fließt:

Man mache die halbe Summe und die halbe Differenz des Richt- und Erhöhungs- oder Vertiefungswinkels, ziehe beide von 45° ab und suche die entsprechenden Winkelzeiger. Bei einem erhöhten Ziele addire man zu dem Distanzzeiger der horizontalen Entfernung des Zieles vom Wurforte den größern Winkelzeiger, bei einem vertieften den kleinern und ziehe den andern von dieser Summe ab; dadurch erhält man den Distanzzeiger einer Zahl, die zur genannten hori-

zontalen Entfernung addirt, die doppelte gesuchte Wurfweite gibt.

Ist die horizontale Entfernung b größer als 500 Klaftern, so läßt man b, also auch x doppelte Klaftern bedeuten, wodurch

$$w = b + x$$

wird.

Beispiel.

Es sei aus einem 30pfündigen weittreibenden Mörser ein festes Berg-Schloß, welches 800 Klaftern vom Wurforte entfernt ist und 100 Klaftern über dessen Horizont liegt, bei 56gradigem Pulver mit Bomben zu bewerfen und dazu der Richtwinkel von 30° festgesetzt worden; man soll die Pulverladung bestimmen.

Da $100:800 = 0{\cdot}125$ ist, mithin der Erhöhungswinkel $n = 7°$ wird; so hat man nach der obigen Tafel $\gamma = 1{\cdot}08$, mithin $w = 864$ Klaftern, wozu 2 Pf. 6 L. gehören.

Berechnet man die horizontale Wurfweite mittels der Distanz- und Winkelzeiger; so wird

$$m + n = 37°,\ m - n = 23°,$$

$$\mathbf{DZ}.x = \mathbf{DZ}.400 - \mathbf{WZ}.26°30' + \mathbf{WZ}.33°30' = 664,$$

also

$x = 461$ und $w = 861$ Klaftern, wie früher.

§. 221. Wollte man mit einer festgesetzten Ladung das gegebene Ziel bewerfen, so kann die dazu gehörige Elevation, wenn für diese Ladung die Wurfweite a unter 45° bekannt ist, auf folgende Art bestimmt werden.

Ist b die horizontale Entfernung des Zieles vom Wurforte und n dessen Erhöhungs- oder Vertiefungswinkel, so wird, wenn man in

$$y = \frac{x(w-x)}{w} \operatorname{tang}\varphi$$

$\pm b \operatorname{tang} n$ statt y, b statt x und $a \sin 2\varphi$ statt w setzt,

$$\pm \operatorname{tang} n = \frac{a\sin 2\varphi - b}{a\sin 2\varphi} \operatorname{tang}\varphi = \frac{a\sin 2\varphi - b}{a(1+\cos 2\varphi)},$$

woraus

$$\pm \sin n \pm \sin n \,.\, \cos 2\varphi = \sin 2\varphi \,.\, \cos n - \frac{b}{a} \cos n$$

und sofort

$$(12) \qquad \sin(2\varphi \mp n) = \frac{b}{a} \cos n \mp \sin n$$

oder wenn man ſtatt des Elevationswinkels φ den Richtwinkel m einführt

$$(13) \qquad \sin(2m \mp n) = \frac{b}{a} \cos n \mp \sin n$$

ſich ergibt.

Kennt man aber auch den Richtwinkel m', unter welchem bei derſelben Ladung die horizontale Entfernung b erreicht wird, wobei alſo

$$b = a \sin 2m'$$

iſt; ſo wird

$$(13') \qquad \sin(2m \mp n) = \sin 2m' . \cos n \mp \sin n.$$

In dieſen Gleichungen gelten die obern Zeichen für ein erhöhtes und die untern für ein vertieftes Ziel.

Aus der Gleichung (13) oder (13') findet man für $2m \mp n$ zwei Werthe, da immer innerhalb der hier bedingten Grenzen zwei Winkel denſelben Sinus haben. Von dieſen Werthen für m liegt der eine über und der andere unter 45°; da aber unſere Mörſer eine Senkung unterhalb 45° nicht zulaſſen, ſo iſt für $2m \mp n$ ſtets der kleinere Winkel zu nehmen.

Würde

$$\frac{b}{a} \cos n \mp \sin n > 1 \quad \text{oder}$$

$$\sin 2m' . \cos n \mp \sin n > 1,$$

ſo iſt $\sin(2m \mp n)$ unmöglich, was anzeigt, daß die angenommene Ladung zu klein iſt.

Iſt

$$\frac{b}{a} \cos n \mp \sin n = 1 \quad \text{oder}$$

$$\sin 2m' . \cos n \mp \sin n = 1;$$

ſo wird

$$\sin(2m \mp n) = 1,$$

alſo

$$2m \mp n = 90°;$$

d. h. in dieſem Falle iſt nur ein Richtwinkel

$$m = 45° \mp \tfrac{1}{2} n$$

möglich, unter welchem die Bombe den gegebenen Zielpunct erreichen kann.

Für die Ausübung iſt es hinreichend, in der Rechnung von den trigonometriſchen Functionen 3 oder höchſtens 4 Decimalſtellen beizuhalten.

Beispiel.

Es sei ein Festungswerk in der horizontalen Entfernung von 400 Klaftern aus einem altartigen 60pfündigen Mörser bei der Ladung von 2 Pf. 28 L. zu bewerfen und es betrage der Erhöhungswinkel 6° 30′.

Da nach der Wurftafel unter 45° bei der obigen Ladung die Wurfweite von 600 Klaftern erreicht wird; so hat man, weil

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} = 0{\cdot}667 \text{ ist,}$$

$$\frac{b}{a}\cos n = 0{\cdot}662,$$

$$\sin n = 0{\cdot}113, \text{ also nach (13)}$$

$$\sin(2m+n) = 0{\cdot}775 \text{ und}$$

$$2m+n = 50°\ 50', \text{ sofort ist}$$

$$m = 22°\ 10'$$

der gesuchte Richtwinkel.

Da aber unter dem Richtwinkel von 20° die horizontale Wurfweite von 400 Klft. mit 2 Pf. 28 L. Ladung erreicht wird, so hat man nach (13′)

$$\sin(2m+n) = \sin 40°.\cos 6°\ 30' + \sin 6°\ 30' = 0{\cdot}639+0{\cdot}113 = 0{\cdot}752$$

und

$$2m+n = 48°\ 45', \text{ daher}$$

$$m = 21°\ 10'.$$

Hat man keine Sinustafel bei der Hand, so kann der Elevations-Winkel auch mittels der Tangenten, aber auf unbequemere Weise gefunden werden, wenn man die Erhöhung oder Vertiefung h in die Rechnung bringt.

Es ist nemlich wegen §. 217. 3

$$\pm h = b\,\text{tang}\,\varphi - \frac{b^2}{2a\cos^2\varphi},$$

folglich

$$\pm h = b\,\text{tang}\,\varphi - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{2a}\,\text{tang}^2\varphi$$

und daraus

$$(14) \qquad \text{tang}\,\varphi = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (b^2 \pm 2ah)}}{b}.$$

Bei der Ausübung wird immer das obere Zeichen der Wurzelgröße genommen, weil das untere den zweiten Winkel gibt, der kleiner als 45° ist.

Für obiges Beispiel wird, da $h = 45{\cdot}6$ ist, nach (14) $\varphi = 67° 50'$, also $m = 22° 10'$, wie oben.

Ist $b^2 + 2ah$ größer als a^2; so erhält man für $\text{tang}\,\varphi$ einen unmöglichen Ausdruck, welcher anzeigt, daß die angenommene Ladung zu klein ist.

Nach §. 216 ist die Seellinie des Mörsers eine Tangente der parabolischen Fluglinie der Bombe und nach §. 217. 5 die halbe Wurfweite unter 45° die Entfernung des Wurfortes, nemlich des Berührungspunctes von dem Brennpuncte der Parabel; man kann also durch die bekannten Eigenschaften der Parabel für den gegenwärtigen Fall den Richtwinkel des Mörsers durch eine einfache Verzeichnung bestimmen.

Man schneide (Fig. 141) auf einer gezogenen Geraden nach einem willkürlich angenommenen Maßstabe die horizontale Entfernung **AB** ab, errichte in **B** eine Senkrechte und trage die Erhöhung oder Vertiefung des Zieles von **B** bis **C** auf. Mit einer Eröffnung, welche der halben Wurfweite unter 45° gleich ist, beschreibe man aus **A** einen Kreisbogen; so ist dieser der geometrische Ort für den Brennpunct der Parabel. Weil jeder Punct der Parabel eben so weit von dem Brennpuncte, als von der Leitlinie entfernt ist; so errichte man in **A** auf **AB** eine Senkrechte, welche den gezogenen Bogen in **D** durchschneidet und führe durch **D** eine Parallele **DE** zu **AB**. Diese ist die Leitlinie, welche die Senkrechte **BC** in **E** durchschneidet. Da ferner auch **C** ein Punct der Parabel ist; so muß, wenn man mit der Eröffnung **CE** aus **C** einen Kreisbogen beschreibt, in diesem der Brennpunct liegen. Weil nun diese Kreisbogen sich in zwei Puncten durchschneiden können; so sind beide Durchschnitte **F** und **F'** die Brennpuncte der Parabeln, welche durch den Punct **C** unter der gegebenen Ladung gehen können. Theilt man endlich den Winkel **DAF** oder **DAF'** in zwei gleiche Theile; so sind die Theilungslinien **AT** oder **AT'** die Tangenten der durch **A** und **C** geführten Parabeln; also werden die Winkel **DAT** und **DAT'** die gesuchten Richtwinkel sein. Daß man auch dieselbe Verzeichnung anwenden könne, wenn der zu bewerfende Punct in dem Horizonte des Wurfortes liegt, ist für sich klar. Durchschneiden sich die beiden gezogenen Kreisbogen nicht, so ist dies ein Zeichen, daß die angenommene Ladung zu klein ist. Man kann, um diese Verzeichnung nicht vornehmen zu dürfen, sich zu diesem Gebrauche verfertigter Instrumente bedienen, aber die Kosten derselben überwiegen weit den Nutzen, welchen sie leisten sollen. Wie diese Instrumente einzurichten sind, findet man in dem dritten Theile der mathematischen Anfangsgründe vom Herrn Generalen-Feldzeugmeister, Freiherrn v. Unterberger, angegeben.

B. Das Ricochetiren.

§. 222. Bei dem Ricochetiren, wo das Projectil den Wallgang einer Befestigungslinie der Länge nach bestreichen soll, müssen, um die Bestreichung möglichst vollkommen zu bewirken,

erstens viel geringere Pulverladungen als bei dem gewöhnlichen Schießen angewendet werden und

zweitens die Projectile möglichst nahe den Anfang des Wallganges treffen; d. h. sie müssen die Brustwehre ganz nahe an ihrer höchsten Kante überschreiten.

Aus dem Gesagten erhellet, daß das Ricochetiren als ein Bewerfen der höchsten Kante der Brustwehre angesehen werden könne, weshalb für dasselbe die Pulverladung und Elevation wohl zunächst durch die horizontale Entfernung dieser Kante vom Geschützstande und deren Erhöhung über den Horizont der Schildzapfenare des ricochetirenden Geschützes bedingt ist, dann aber auch davon abhängt, ob die zu bestreichende Linie kurz oder durch viele Traverse gedeckt ist, ob sie eine mittlere oder eine große Länge hat. Für kurze oder stark mit Traversen versehene Linien müssen die größern Elevationen und die kleinern Pulverladungen gewählt werden, damit die Göller kürzer und höher ausfallen, sofort das Treffen zwischen den Traversen möglicher werde. Hingegen hat man bei längern Linien ohne Traverse oder mit wenigen als vortheilhafter die größern Ladungen und kleinern Elevationen zu nehmen, weil dadurch das Projectil weniger aus der verticalen Richtungsebene tritt, die Göller, wenn auch weiter, mehr rasirend ausfallen und insbesondere durch die bedeutendere Percussionskraft des Projectils die feindlichen Lafferen eher zertrümmert werden.

Da beim Ricochetiren die Projectile eine größere Geschwindigkeit erhalten als beim Bombenwerfen; so dürfen die dort angewandten Sätze der paraboliſchen Theorie hier nur im Allgemeinen und mit mehr Vorsicht gebraucht werden.

Die aus sorgfältigen Versuchen zusammengestellten Ricochettafeln enthalten nach der Beschaffenheit der zu ricochetirenden Linie innerhalb der Erfahrungsgrenzen für die Entfernungen von 40 zu 40 Klaftern und die Erhöhungen des Werkes von 2 zu 2 Klaftern die Elevationswinkel und Pulverladungen, um daraus für das betreffende Geschütz und Projectil in einem gegebenen Falle die zugehörige Elevation und Ladung auszuheben.

Ist die gegebene horizontale Entfernung des Werkes vom Geschützstande oder seine Erhöhung über den Horizont der Schildzapfenaxe nicht in der Tafel enthalten; so kann man durch Interpoliren die zugehörige Elevation und Ladung leicht bestimmen, indem man innerhalb der Grenzen der Tafeln die Differenzen der horizontalen Entfernungen, so wie der Erhöhungen denen der Elevationswinkel und Ladungen proportional annehmen kann.

Überdies hat man zur Vereinfachung des Interpolirens jeder Tafel die Änderungen der Schußweite beigesetzt, welche durch die Änderung des Elevationswinkels um 2 Grade bei den verschiedenen Ladungen oder durch die Änderung der Ladung um 2 Lothe bei den verschiedenen Elevationswinkeln für jede Gattung der in Anwendung kommenden Projectile herbeigeführt werden.

Beispiel.

Es sei aus einer 24pfündigen Batteriekanone mit 7pfündigen Granaten eine kurze Linie zu ricochetiren, deren horizontale Entfernung von der Batterie 335 Klft. und Erhöhung über die Schildzapfenaxe $7\frac{1}{2}$ Klft. beträgt.

Hätte die Linie 6 Klft. zur Erhöhung, so würde man nach der Tafel 14° Elevation und $14\frac{3}{4}$ Lothe Ladung nehmen müssen; betrüge aber die Erhöhung 8 Klft., so hätte man 15° Elevation und $13\frac{3}{4}$ Loth Ladung erhalten; mithin ergibt sich für obige Entfernung und Erhöhung der Elevationswinkel von 14° 40′ bei 14 Loth Pulverladung.

Es versteht sich von selbst, daß man auch hier auf die Stärke des zu verwendenden Pulvers die beim Bombenwerfen angeführte Berücksichtigung zu nehmen habe.

Allen Ricochettafeln liegt die Pulverstärke von 60 Graden der Hebelprobe zu Grunde.

Um eine Ricochettafel aus den Resultaten geeigneter Versuche mit Anwendung der paraboliſchen Theorie zusammenzustellen; so könnten diese Versuche unter den Elevationswinkeln von etwa 5°, 8°, 11° und 14° mit solchen Pulverladungen ausgeführt werden, damit man die Schußweiten von 160 bis 360 Klaftern erhalte.

Aus diesen Resultaten berechnet man dann für bestimmte horizontale Entfernungen und Erhöhungen der zu ricochetirenden Linie die Elevationswinkel auf folgende Weise.

Es sei ψ der Elevationswinkel, unter welchem bei einer bestimmten Ladung mit dem ersten Aufschlage ein Punct getroffen wird, dessen Abscisse B und Ordinate $\pm H$ in Klaftern in Bezug auf den Schildzapfen-

horizont sein mag. Nimmt man $-H$, was bei einem nahe horizontalen Boden immer der Fall ist; so hat man, wenn a die Schußweite unter 45° Elevation bezeichnet, nach Gl. (3′) §. 217

$$-H = B \operatorname{tang} \psi - \frac{B^2}{2a \cos^2 \psi}.$$

Soll nun für die höchste Kante der Brustwehre, deren Coordinaten b und $+h$ sein mögen und wobei b um den 10ten bis 5ten Theil kleiner als B sein kann, zu derselben Ladung der Elevationswinkel φ berechnet werden; so wird

$$h = b \operatorname{tang} \varphi - \frac{b^2}{2a \cos^2 \varphi}.$$

Eliminirt man a aus diesen beiden Gleichungen und setzt

$$\frac{H}{B} = \operatorname{tang} N, \quad \frac{h}{b} = \operatorname{tang} n;$$

so ergibt sich

$$\sin(\varphi - n) \cos \varphi = \frac{b}{B} \cdot \frac{\cos n \,.\, \cos \psi \,.\, \sin(\psi + N)}{\cos N}$$

oder

$$\sin(2\varphi - n) = \frac{2b}{B} \cdot \frac{\cos \psi \,.\, \sin(\psi + N) \,.\, \cos n}{\cos N} + \sin n.$$

Setzt man

$$\frac{2b}{B} \cdot \frac{\cos \psi \,.\, \sin(\psi + N)}{\cos N} = \operatorname{tang} \omega,$$

so wird

$$(15) \qquad \sin(2\varphi - n) = \frac{\sin(n + \omega)}{\cos \omega}.$$

Man hat daher zuerst N aus

$$\frac{H}{B} = \operatorname{tang} N,$$

dann für die nöthigen Werthe von b auch ω aus

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{2b}{B} \cdot \frac{\cos \psi \,.\, \sin(\psi + N)}{\cos N}$$

und für $h = 2, 4, 6, 8, 10$ Klaftern die dazu gehörigen Werthe von n aus

$$\operatorname{tang} n = \frac{h}{b}$$

zu berechnen, um für alle so erhaltenen Werthe von ω und n aus (15) die entsprechenden Elevationswinkel φ zu bestimmen.

Benützt man die Resultate jeder Ladung und Elevation auf diese Art, stellt dann alle berechneten Resultate in eine Tafel zusammen; so wird man daraus das Gesetz für die Änderungen der Ladungen und Elevationen aus den Änderungen der horizontalen Entfernungen und Erhöhungen und so durch einfache Interpolation für andere Elevationen die Ladungen und umgekehrt bestimmen können.

Anmerkung. Aus dem hier über das Bombenwerfen und Ricochetiren Vorgetragenen ersieht man, daß von den in §. 217 angeführten Sätzen der paraboliſchen Theorie nur der 2te, 7te und 9te auf die Wurfbewegung der Artilleriegeſchoße benannter Gattung, als mit den Verſuchen nahe übereinſtimmend, angenommen werden können.

Die übrigen Sätze ſtimmen mit der Ausübung zu wenig überein, als daß ſie auf die genannte Bewegung anwendbar wären, weshalb auch die daraus hervorgehenden Folgerungen nur zu falſchen Schlüſſen verleiten würden.

Wurftafel

für 10pfündige Mörser neuer Art.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden													
	15		20		25		30		35		40		45	
	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.
	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"
60	9	3	8½	2¾	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	9½	3¼	9	3	8	2¾	7	2½	7	2¼	7	2¼	7	2
80	10	3½	9½	3¼	9	2¾	8	2½	7¾	2½	7¾	2¼	7¾	2
100	11	3¾	10½	3¼	10	3	9	2¾	8¾	2¾	8¾	2½	8¾	2¼
120	11½	4	11	3½	10½	3¼	10	3	10	2¾	10	2½	10	2¼
140	12½	4¼	11½	3¾	11½	3½	11	3¼	10	2¾	10½	2¾	10½	2½
160	13	4½	12½	4	12½	3¾	12	3½	11½	3	11½	2¾	11	2½
180	13½	*3¼	13	4¼	13	4	12½	3¾	12	3¼	12	3	12	2¾
200	14½	3¼	13½	4¾	13½	4¼	13	3¾	12½	3½	12½	3	12½	3
230	16	3½	14½	*2¾	14½	4½	13½	4	13½	3¾	13	3¼	13	3¼
260	17½	3½	15½	3	15	4¾	14	4¼	14	3¾	13½	3½	13½	3½
300	19½	3¾	16	3¼	15½	*3	15	4½	14½	4	14	3¾	14	3¾
330	20½	4	17	3½	16½	3¼	15½	4¾	15	4¼	14½	4	14½	3¾
360	21½	4¼	18	3¾	17	3½	16½	*3	15½	4½	15	4¼	15	4
400	23	4½	19½	4	18	3½	17	3¼	16	4¾	15½	4½	15½	4¼
440	26	4¾	21½	4¼	19½	3¾	18	3¼	17	*2¾	16½	4¾	16½	4½
480	.	.	23½	4½	21	4	19½	3½	17½	3	17½	*3	17½	4¾
520	.	.	26	4¾	23½	4¼	20½	3¾	18½	3¼	18½	3¼	18½	4¾
560	.	.	.	.	24½	4½	21½	3¾	19½	3¼	19½	3¼	19½	*2¾
600	.	.	.	.	25½	4¾	22½	4	20½	3½	20	3½	20	3
640	.	.	.	.	.	.	24	4¼	22½	3¾	21	3½	21	3¼
680	.	.	.	.	.	.	25	4½	23½	4	22	3¾	21½	3¼
720	.	.	.	.	.	.	26	4¾	24	4¼	23½	3¾	22½	3½
760	.	.	.	.	.	.	.	.	25	4½	24½	4	23½	3½
800	.	.	.	.	.	.	.	.	26	4½	25½	4¼	24	3¾
840	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	26	4½	25	3¾
870	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	26	4

Die Wurfweite wird geändert:

Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe { bei 15—20, 25—35, 40—45 Graden um 50, 70, 90 Klaftern.

Durch eine Änderung des Winkels um 5 Grade { bei 7—14, 16—20, 22—26 Lothen, um 10, 40, 60 Klaftern.

Anmerkung für diese und die folgenden Bombenwurftafeln.

Der Tafel zu Grunde gelegte Pulverstärke 56 Grade der Hebelprobe.

Brandröhrensatz { Nro. 2 (4″ brennen 14 Secunden) für die kleinen Wurfweiten. Nro. 4 (4″ brennen 27 Secunden) für die größern Wurfweiten.

Den letztern ist ein * vorgesetzt.

Wurftafel

für 30pfündige Mörser neuer Art.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden															
	15		20		25		30		35		40		45			
	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.		
	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"		
100	. 24	$4\frac{3}{4}$	. 23	$3\frac{1}{2}$	. 22	$3\frac{1}{4}$	. 19	3	. 18	$2\frac{3}{4}$	. 18	$2\frac{1}{2}$	. 18	$2\frac{1}{2}$		
120	. 25	5	. 25	4	. 24	$3\frac{3}{4}$	. 21	$3\frac{1}{4}$	. 20	3	. 20	$2\frac{3}{4}$	. 20	$2\frac{3}{4}$		
140	. 27	$5\frac{1}{4}$	. 26	$4\frac{1}{2}$	. 26	4	. 24	$3\frac{1}{2}$	. 23	$3\frac{1}{4}$	. 23	3	. 22	3		
160	. 29	$5\frac{1}{2}$	. 28	$4\frac{3}{4}$	. 28	$4\frac{1}{4}$	. 25	$3\frac{3}{4}$	. 24	$3\frac{1}{4}$	. 24	$3\frac{1}{4}$	. 24	$3\frac{1}{4}$		
180	. 31	6	. 29	5	. 29	$4\frac{1}{2}$	. 26	4	. 25	$3\frac{1}{2}$	. 25	$3\frac{1}{2}$	. 25	$3\frac{1}{4}$		
200	1 1	$6\frac{1}{4}$	. 31	$5\frac{1}{4}$	. 31	$4\frac{3}{4}$	. 27	$4\frac{1}{4}$	. 27	$3\frac{3}{4}$	. 26	$3\frac{3}{4}$	. 26	$3\frac{1}{2}$		
230	1 4	$6\frac{1}{2}$	1 1	$5\frac{1}{2}$	1 1	$5\frac{1}{4}$	. 29	$4\frac{1}{2}$	. 29	4	. 28	4	. 27	$3\frac{1}{2}$		
260	1 7	$6\frac{3}{4}$	1 3	$5\frac{3}{4}$	1 3	$5\frac{1}{2}$	. 31	5	. 31	$4\frac{1}{4}$	. 31	$4\frac{1}{4}$	. 30	$3\frac{3}{4}$		
300	1 10	*$3\frac{3}{4}$	1 5	6	1 5	6	1 2	$5\frac{1}{2}$	1 1	$4\frac{1}{2}$	1 1	$4\frac{1}{2}$	1 1	$3\frac{3}{4}$		
330	1 12	$3\frac{3}{4}$	1 8	$6\frac{1}{2}$	1 7	$6\frac{1}{4}$	1 4	$5\frac{3}{4}$	1 3	$4\frac{3}{4}$	1 3	$4\frac{3}{4}$	1 2	4		
370	1 16	4	1 12	$6\frac{3}{4}$	1 9	$6\frac{3}{4}$	1 6	6	1 5	5	1 5	5	1 4	$4\frac{1}{4}$		
400	1 18	$4\frac{1}{4}$	1 16	*$3\frac{1}{2}$	1 11	*$3\frac{1}{4}$	1 7	$6\frac{1}{4}$	1 6	$5\frac{1}{4}$	1 6	5	1 6	$4\frac{1}{2}$		
430	1 20	$4\frac{1}{2}$	1 18	$3\frac{3}{4}$	1 13	$3\frac{1}{2}$	1 8	$6\frac{1}{2}$	1 7	$5\frac{1}{2}$	1 7	$5\frac{1}{4}$	1 7	$4\frac{1}{2}$		
460	1 26	$4\frac{3}{4}$	1 20	4	1 15	$3\frac{1}{2}$	1 10	$6\frac{3}{4}$	1 8	$5\frac{3}{4}$	1 8	$5\frac{1}{2}$	1 8	$4\frac{3}{4}$		
500	2 .	5	1 23	$4\frac{1}{4}$	1 17	$3\frac{3}{4}$	1 12	*3	1 10	6	1 10	$5\frac{1}{2}$	1 10	5		
530	2 8	$5\frac{1}{4}$	1 26	$4\frac{1}{4}$	1 19	$3\frac{3}{4}$	1 15	$3\frac{1}{4}$	1 12	$6\frac{1}{4}$	1 11	$5\frac{3}{4}$	1 11	$5\frac{1}{4}$		
570	. .	.	1 30	$4\frac{1}{2}$	1 22	4	1 17	$3\frac{1}{4}$	1 14	$6\frac{1}{2}$	1 13	6	1 12	$5\frac{1}{2}$		
600	. .	.	2 2	$4\frac{1}{2}$	1 24	4	1 19	$3\frac{1}{4}$	1 16	$6\frac{3}{4}$	1 14	$6\frac{1}{4}$	1 13	$5\frac{3}{4}$		
640	. .	.	2 8	$4\frac{3}{4}$	1 26	$4\frac{1}{4}$	1 21	$3\frac{3}{4}$	1 18	*3	1 16	$6\frac{3}{4}$	1 15	$5\frac{3}{4}$		
680	. .	.	.	.	1 29	5	1 22	$3\frac{3}{4}$	1 19	$3\frac{1}{4}$	1 17	*$3\frac{1}{4}$	1 17	6		
720	. .	.	.	.	2 1	5	1 24	4	1 20	$3\frac{1}{2}$	1 19	$3\frac{1}{2}$	1 19	$6\frac{1}{4}$		
760	. .	.	.	.	2 4	$5\frac{1}{4}$	1 27	4	1 23	$3\frac{3}{4}$	1 21	$3\frac{3}{4}$	1 21	$6\frac{1}{2}$		
800	. .	.	.	.	2 8	$5\frac{1}{4}$	1 29	$4\frac{1}{4}$	1 25	4	1 24	$3\frac{3}{4}$	1 24	$6\frac{3}{4}$		
850	. .	.	.	.	.	.	2 .	$4\frac{1}{2}$	1 28	$4\frac{1}{4}$	1 26	4	1 26	*$3\frac{1}{2}$		
900	. .	.	.	.	.	.	2 4	$4\frac{3}{4}$	2 1	$4\frac{1}{2}$	1 28	$4\frac{1}{4}$	1 28	$3\frac{1}{2}$		
950	. .	.	.	.	.	.	2 8	5	2 7	$4\frac{3}{4}$	2 .	$4\frac{1}{4}$	1 31	$3\frac{3}{4}$		
1000	. .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2 4	$4\frac{1}{2}$	2 3	4		
1050	. .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2 8	$4\frac{3}{4}$	2 7	$4\frac{1}{4}$		

Die Wurfweite wird geändert:

Durch eine Änderung der Ladung um 4 Lothe	bei 15—20,	25—35,	40—45 Graden
	um 40,	60,	70 Klaftern.
	Lth. Pf. Lth.	Pf. Lth. Pf. Lth.	Pf. Lth. Pf. Lth.
Durch eine Änderung d. Winkels um 5 Grd.	bei 18—1 8,	1 12—1 24,	1 28—2 8
	um 20,	59,	80 Klaft.

Wurftafel

für 60pfündige Mörser neuer Art.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden															
	15		20		25		30		35		40		45			
	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.		
	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"		
100	1 4	4½	1 2	3¾	1 2	3	1 .	3	. 28	2¾	. 28	2½	. 28	2½		
120	1 7	4¾	1 6	4¼	1 5	3¼	1 4	3¼	. 30	3	. 30	2¾	. 30	2¾		
140	1 10	5¼	1 9	4½	1 8	3½	1 7	3½	1 .	3	1 .	3	1 .	2¾		
160	1 13	5½	1 12	4¾	1 11	4	1 10	3¾	1 3	3¼	1 3	3¼	1 3	3		
180	1 17	5¾	1 15	5¼	1 13	4¼	1 12	4	1 5	3½	1 5	3½	1 5	3¼		
200	1 21	6	1 18	5½	1 16	4½	1 15	4¼	1 8	3¾	1 8	3¾	1 8	3½		
230	1 26	6½	1 23	5¾	1 20	5	1 18	4½	1 11	4	1 11	4	1 10	3½		
260	1 31	7¼	1 28	6	1 24	5¼	1 21	4¾	1 14	4¼	1 13	4¼	1 13	3¾		
300	2 6	7¾	2 2	6½	1 28	5¾	1 25	5	1 18	4½	1 17	4½	1 16	4		
330	2 11	8	2 7	6¾	2 .	6	1 28	5¼	1 21	4¾	1 20	4½	1 19	4¼		
360	2 16	8¼	2 10	7	2 3	6½	1 31	5½	1 23	5	1 22	4¾	1 22	4¼		
400	2 23	8½	2 14	7¼	2 7	6¾	2 3	5¾	1 26	5¼	1 25	5	1 25	4½		
440	3 1	*4½	2 19	7¾	2 13	7¼	2 7	6	1 29	5½	1 29	5¼	1 29	4¾		
480	3 5	4¾	2 24	8	2 17	7½	2 13	6½	2 .	5¾	2 .	5½	2 1	5		
520	3 13	5	3 .	8½	2 21	7¾	2 18	6¾	2 3	6	2 3	5¾	2 3	5¼		
560	3 24	5	3 5	*4¼	2 25	8	2 22	7	2 9	6¼	2 6	5¾	2 6	5½		
600	4 4	5¼	3 9	4¼	2 30	8¼	2 27	7¼	2 13	6½	2 10	6	2 9	5½		
640	4 16	5½	3 15	4½	3 7	8½	2 31	7½	2 16	6¾	2 13	6¼	2 13	5¾		
680	.	.	3 24	4½	3 13	*4	3 6	7¾	2 20	7	2 17	6¼	2 16	6		
720	.	.	4 4	4¾	3 18	4¼	3 12	8	2 24	7¼	2 20	6½	2 20	6¼		
760	.	.	4 16	5	3 22	4½	3 18	8¼	2 28	7½	2 24	6¾	2 24	6½		
800	.	.	.	,	4 3	4¾	3 23	8½	2 31	7¾	2 27	7	2 28	6½		
850	.	.	.	.	4 16	5	4 .	*4½	3 3	8	3 .	7¼	3 2	6¾		
900	.	.	.	.	.	.	4 8	4¾	3 9	8¼	3 6	7¾	3 6	7		
950	.	.	.	.	.	.	4 16	5	3 15	8½	3 12	8	3 11	7½		
1000	.	.	.	.	.	.	.	.	3 19	*4¼	3 18	8¼	3 15	7½		
1050	.	.	.	.	.	.	.	.	3 24	4¼	3 22	8½	3 21	7½		
1100	.	.	.	.	.	.	.	.	4 8	4½	4 5	*4¼	3 28	7¾		
1150	.	.	.	.	.	.	.	.	4 16	4¾	4 16	4½	4 3	7¾		
1200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4 13	8		

Die Wurfweite wird geändert:

Durch eine Änderung der Ladung um 8 Lothe { bei 15—20, 25—35, 40—45 Graden; um 40, 60, 70 Klaftern.

	Lth. Pf.	Pf. Lth. Pf. Lth.	Pf. Lth. Pf. Lth.
Durch eine Änderung d. Winkels um 5 Grade { bei	28—2,	2 8—3 8,	3 16—4 16
um	20,	60,	90 Klaft.

Wurftafel

für 30pfündige weittreibende Mörser.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden											
	30			35			40			45		
	Ladung.		Brandr.	Ladung.		Brandr.	Ladung.		Brandr.	Ladung.		Brandr.
	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"
100	.	20	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.
150	.	23	$3\frac{3}{4}$	.	22	$3\frac{1}{2}$	.	21	$3\frac{1}{4}$	.	20	3
200	.	26	$4\frac{1}{2}$	.	25	4	.	24	$3\frac{3}{4}$	.	23	$3\frac{1}{2}$
250	.	29	5	.	28	$4\frac{1}{4}$	.	27	$4\frac{1}{4}$	.	26	$3\frac{3}{4}$
300	1	.	$5\frac{1}{2}$	.	31	$4\frac{1}{2}$	.	30	$4\frac{1}{2}$	.	29	$3\frac{3}{4}$
350	1	3	6	1	2	5	1	1	$4\frac{3}{4}$	1	.	$4\frac{1}{4}$
400	1	6	$6\frac{1}{4}$	1	5	$5\frac{1}{4}$	1	4	5	1	3	$4\frac{1}{2}$
450	1	9	$6\frac{3}{4}$	1	8	$5\frac{3}{4}$	1	7	$5\frac{1}{4}$	1	6	$4\frac{3}{4}$
500	1	13	*3	1	11	6	1	10	$5\frac{1}{2}$	1	9	5
550	1	17	$3\frac{1}{4}$	1	14	$6\frac{1}{2}$	1	13	6	1	12	$5\frac{1}{2}$
600	1	21	$3\frac{1}{2}$	1	17	$6\frac{3}{4}$	1	16	$6\frac{1}{4}$	1	14	$5\frac{3}{4}$
650	1	25	$3\frac{3}{4}$	1	20	*$3\frac{1}{4}$	1	19	$6\frac{3}{4}$	1	16	6
700	1	28	4	1	24	$3\frac{1}{2}$	1	22	*$3\frac{1}{2}$	1	18	$6\frac{1}{4}$
750	1	31	4	1	28	$3\frac{3}{4}$	1	25	$3\frac{3}{4}$	1	20	$6\frac{1}{2}$
800	2	2	$4\frac{1}{4}$	1	30	4	1	28	$3\frac{3}{4}$	1	23	$6\frac{3}{4}$
850	2	5	$4\frac{1}{2}$	2	.	$4\frac{1}{4}$	1	31	4	1	26	*$3\frac{1}{2}$
900	2	8	$4\frac{3}{4}$	2	2	$4\frac{1}{2}$	2	2	$4\frac{1}{4}$	1	29	$3\frac{1}{2}$
950	2	12	5	2	4	$4\frac{3}{4}$	2	4	$4\frac{1}{4}$	2	.	$3\frac{3}{4}$
1000	2	16	$5\frac{1}{4}$	2	6	5	2	6	$4\frac{1}{2}$	2	3	4
1050	.		.	.		.	2	11	$4\frac{3}{4}$	2	6	$4\frac{1}{4}$
1100	.		.	.		.	2	16	5	2	9	$4\frac{1}{2}$
1150	.		.	.		.	.		.	2	12	$4\frac{1}{2}$
1200	.		.	.		.	.		.	2	15	$4\frac{3}{4}$
1250	.		.	.		.	.		.	2	24	$4\frac{3}{4}$
1300	.		.	.		.	.		.	3	.	5
1350	.		.	.		.	.		.	3	8	$5\frac{1}{4}$
1400	.		.	.		.	.		.	3	16	$5\frac{1}{2}$
1450	.		.	.		.	.		.	4	8	$5\frac{1}{2}$

Die Wurfweite wird geändert:

Durch eine Änderung der Ladung um 4 Lothe { bei 30—35, 40—45 Graden; um 60, 70 Klaftern.

	Lth.	Pfd.	Pfd.	Lth.	Pfd.	Lth.	Pfd	Lth.	Pfd.	Lth.
Durch eine Änderung d. Winkels um 5 Grade { bei	20—1,		1	8—1		24,	1	28—2		16
um	10,			30,				60	Klaft.	

Wurftafel

für 10pfündige Mörser alter Art.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden													
	15		20		25		30		35		40		45	
	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.
	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"	Lth.	"
60	$10\frac{1}{2}$	3	$10\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	9	$2\frac{1}{2}$	9	$2\frac{1}{4}$	9	$2\frac{1}{4}$	9	2	9	2
70	11	$3\frac{1}{4}$	11	3	10	$2\frac{3}{4}$	10	$2\frac{1}{2}$	10	$2\frac{1}{4}$	10	$2\frac{1}{4}$	10	2
80	$11\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	11	$2\frac{3}{4}$	11	$2\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$10\frac{1}{2}$	2
100	$12\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	3	12	$2\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
120	13	4	13	$3\frac{3}{4}$	13	$3\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$	3	$12\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
140	$13\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$13\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	13	3	13	$2\frac{3}{4}$	13	$2\frac{3}{4}$
160	$14\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	$14\frac{1}{2}$	4	14	$3\frac{3}{4}$	14	$3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$13\frac{1}{2}$	3	$13\frac{1}{2}$	3
180	16	*3	15	$4\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	4	$14\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	14	$3\frac{1}{4}$	14	3	14	3
200	$17\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	15	$4\frac{1}{4}$	15	$3\frac{3}{4}$	$14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$
230	$18\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	16	*$2\frac{3}{4}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	4	15	$3\frac{3}{4}$	15	$3\frac{1}{4}$	15	$3\frac{1}{4}$
260	20	$3\frac{3}{4}$	17	3	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	16	$4\frac{1}{4}$	$15\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$15\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
300	21	4	$18\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	18	*3	17	$4\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	4	16	$3\frac{3}{4}$	16	$3\frac{1}{2}$
330	22	$4\frac{1}{4}$	20	$3\frac{1}{2}$	19	$3\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	17	$4\frac{1}{4}$	$16\frac{1}{2}$	4	$16\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$
360	25	$4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	20	$3\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{2}$	*3	$17\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$
400	.	.	24	$4\frac{1}{4}$	$21\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$19\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$18\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$
440	.	.	26	$4\frac{1}{2}$	24	4	$20\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	19	*$4\frac{3}{4}$	19	$4\frac{3}{4}$	19	$4\frac{1}{4}$
480	.	.	.	.	25	4	22	$3\frac{1}{2}$	20	*3	20	$4\frac{3}{4}$	20	$4\frac{1}{2}$
520	.	.	.	.	26	$4\frac{1}{4}$	23	$3\frac{3}{4}$	22	$3\frac{1}{4}$	21	*3	21	$4\frac{1}{2}$
560	.	.	.	.	.	.	$24\frac{1}{2}$	4	23	$3\frac{1}{2}$	22	$3\frac{1}{4}$	$21\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$
600	.	.	.	.	.	.	25	4	24	$3\frac{3}{4}$	23	$3\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	*$2\frac{3}{4}$
640	.	.	.	.	.	.	26	$4\frac{1}{4}$	25	4	24	$3\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	3
680	.	.	.	.	.	.	.	.	26	$4\frac{1}{4}$	25	$3\frac{3}{4}$	$24\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$
720	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	26	4	$25\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
760	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	26	$3\frac{3}{4}$

Die Wurfweite wird geändert:

Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe	bei	15—20,	25—35,	40—45 Graden
	um	40,	70,	80 Klaftern.
Durch eine Änderung d. Winkels um 5 Grade	bei	9—14,	16—20,	22—26 Lothen
	um	10,	30,	50 Klaftern.

Wurftafel

für 30pfündige Mörser alter Art.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden															
	15		20		25		30		35		40		45			
	Ladung.		Brandr.		Ladung.		Brandr.		Ladung.		Brandr.		Ladung.		Brandr.	
	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"	Pfd.	Lth.	"
100	.	29	4	.	26	$3\frac{1}{2}$	.	26	$3\frac{1}{4}$	.	25	3	.	25	$2\frac{3}{4}$	.	24	$2\frac{1}{2}$	.	24	$2\frac{1}{2}$
120	1	.	$4\frac{1}{2}$	.	29	$3\frac{3}{4}$	.	29	$3\frac{1}{2}$	.	28	$3\frac{1}{4}$	.	27	3	.	27	$2\frac{3}{4}$	.	26	$2\frac{3}{4}$
140	1	2	5	.	31	$4\frac{1}{4}$	.	31	$3\frac{3}{4}$	.	31	$3\frac{1}{2}$	.	29	$3\frac{1}{4}$	.	29	3	.	28	3
160	1	4	$5\frac{1}{4}$	1	1	$4\frac{1}{2}$	1	.	$4\frac{1}{4}$	1	.	$3\frac{3}{4}$	.	31	$3\frac{1}{2}$	.	31	$3\frac{1}{4}$	.	30	3
180	1	6	$5\frac{1}{2}$	1	2	$4\frac{3}{4}$	1	1	$4\frac{1}{2}$	1	1	4	1	.	$3\frac{3}{4}$	1	.	$3\frac{1}{4}$	1	.	$3\frac{1}{4}$
200	1	8	$5\frac{3}{4}$	1	4	5	1	3	$4\frac{3}{4}$	1	3	$4\frac{1}{2}$	1	1	$3\frac{3}{4}$	1	1	$3\frac{1}{2}$	1	1	$3\frac{1}{4}$
230	1	11	$6\frac{1}{4}$	1	6	$5\frac{1}{4}$	1	5	$5\frac{1}{4}$	1	4	$4\frac{3}{4}$	1	3	4	1	3	$3\frac{3}{4}$	1	3	$3\frac{1}{2}$
260	1	15	$6\frac{3}{4}$	1	10	$5\frac{1}{2}$	1	7	$5\frac{1}{2}$	1	6	5	1	5	$4\frac{1}{4}$	1	5	4	1	5	$3\frac{3}{4}$
300	1	18	*3	$1\frac{1}{2}$	1	15	$6\frac{1}{4}$	1	10	$5\frac{3}{4}$	1	8	$5\frac{1}{4}$	1	6	$4\frac{1}{2}$	1	6	$4\frac{1}{4}$	1	6	4
330	1	20	$3\frac{3}{4}$	1	17	$6\frac{3}{4}$	1	12	6	1	10	$5\frac{1}{2}$	1	8	5	1	8	$4\frac{1}{2}$	1	8	$4\frac{1}{4}$
370	1	26	4	1	20	*3	$3\frac{3}{4}$	1	15	$6\frac{1}{2}$	1	12	$5\frac{3}{4}$	1	10	5	1	10	$4\frac{3}{4}$	1	10	$4\frac{1}{2}$
400	2	2	$4\frac{1}{4}$	1	24	$3\frac{3}{4}$	1	17	$6\frac{3}{4}$	1	14	6	1	13	$5\frac{1}{4}$	1	12	5	1	11	$4\frac{3}{4}$
430	2	8	$4\frac{1}{2}$	1	26	4	1	19	*	3	$\frac{1}{4}$	1	16	$6\frac{1}{4}$	1	14	$5\frac{1}{2}$	1	14	$5\frac{1}{4}$	1	13	5
460		.	.	1	29	4	1	21	$3\frac{1}{2}$	1	18	$6\frac{1}{2}$	1	16	$5\frac{3}{4}$	1	16	$5\frac{1}{2}$	1	15	$5\frac{1}{4}$
500		.	.	2	2	$4\frac{1}{4}$	1	23	$3\frac{1}{2}$	1	21	$6\frac{3}{4}$	1	18	6	1	18	$5\frac{3}{4}$	1	17	$5\frac{1}{2}$
530		.	.	2	5	$4\frac{1}{4}$	1	27	$3\frac{3}{4}$	1	23	*3	$\frac{1}{2}$	1	20	$6\frac{1}{4}$	1	19	6	1	18	$5\frac{1}{2}$
570		.	.	2	8	$4\frac{1}{2}$	2	2	$4\frac{1}{4}$	1	25	$3\frac{3}{4}$	1	22	$6\frac{1}{2}$	1	21	$6\frac{1}{4}$	1	20	$5\frac{3}{4}$
600		.	.		.	.	2	8	$4\frac{1}{2}$	1	27	4	1	24	$6\frac{3}{4}$	1	23	$6\frac{1}{4}$	1	22	6
640		.	.		.	.		.	.	2	2	4	1	27	*3	$\frac{1}{2}$	1	25	$6\frac{1}{2}$	1	24	6
680		.	.		.	.		.	.	2	4	$4\frac{1}{4}$	2	.	4	1	27	$6\frac{3}{4}$	1	27	$6\frac{1}{4}$
720		.	.		.	.		.	.	2	8	$4\frac{1}{2}$	2	4	$4\frac{1}{4}$	1	30	*3	$\frac{1}{2}$	1	30	$6\frac{1}{2}$
760		.	.		.	.		.	.		.	.	2	8	$4\frac{1}{2}$	2	2	$3\frac{3}{4}$	2	1	$6\frac{3}{4}$
800		.	.		.	.		.	.		.	.		.	.	2	4	$3\frac{3}{4}$	2	4	*3	$\frac{3}{4}$
850		.	.		.	.		.	.		.	.		.	.		.	.	2	8	4

Die Wurfweite wird geändert:

Durch eine Änderung der Ladung um 4 Lothe { bei 15—20, 25—35, 40—45 Graden; um 30, 50, 60 Klaftern.

	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.
Durch eine Änderung d. Winkels um 5 Grade { bei	24—1	8,	1	12—1	24,	1	28—2	8			
um	10,			40,			70 Klaft.				

Wurftafel

für 60pfündige Mörser alter Art.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden													
	15		20		25		30		35		40		45	
	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.	Ladung.	Brandr.
	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"	Pfd. Lth.	"
100	1 12	4¼	1 12	3¾	1 10	3¼	1 8	3	1 5	2¾	1 5	2½	1 3	2½
120	1 16	4¾	1 15	4	1 13	3½	1 12	3¼	1 8	3	1 7	2¾	1 7	2¾
140	1 21	5	1 18	4¼	1 16	4	1 15	3½	1 11	3¼	1 10	3	1 10	3
160	1 26	5½	1 21	4½	1 19	4¼	1 18	3¾	1 13	3½	1 13	3	1 13	3¼
180	1 30	5¾	1 24	4¾	1 22	4½	1 20	4	1 16	3¾	1 16	3¼	1 15	3¼
200	2 2	6	1 29	5	1 25	4¾	1 23	4¼	1 19	3¾	1 18	3½	1 18	3½
230	2 8	6½	2 2	5½	1 29	5	1 26	4½	1 22	4	1 21	3¾	1 21	3½
260	2 15	7	2 6	5¾	2 1	5¼	1 29	4¾	1 25	4¼	1 25	4	1 24	3¾
300	2 23	7½	2 12	6	2 6	5½	2 2	5	1 29	4½	1 28	4¼	1 28	3¾
330	2 31	7¾	2 18	6½	2 10	5¾	2 5	5¼	2 1	4¾	1 31	4½	1 31	4
360	3 8	8	2 22	6¾	2 14	6¼	2 9	5½	2 5	5¼	2 2	4¾	2 2	4¼
400	3 16	8¼	2 28	7	2 20	6¾	2 16	5¾	2 10	5½	2 6	5	2 6	4½
440	3 24	8½	3 3	7¼	2 25	7	2 22	6¼	2 14	5¾	2 11	5¼	2 10	4½
480	4 4	*4½	3 8	7½	2 31	7¼	2 27	6½	2 19	6	2 16	5½	2 16	4¾
520	4 16	4¾	3 17	8	3 8	7½	2 31	7	2 23	6¼	2 20	5½	2 19	5
560	.	.	3 28	8½	3 15	8	3 7	7¼	2 28	6¼	2 24	5¾	2 23	5¼
600	.	.	4 6	*4½	3 23	8¼	3 13	7½	3 .	6½	2 29	6	2 28	5½
640	.	.	4 16	4¾	4 4	8½	3 20	7½	3 4	6¾	3 2	6¼	3 1	5¾
680	.	.	.	.	4 16	*4½	3 30	7¾	3 9	6¾	3 7	6½	3 6	6
720	.	.	.	.	.	.	4 4	8	3 18	7	3 12	6¾	3 11	6¼
760	.	.	.	.	.	.	4 10	8¼	3 25	7¼	3 18	7	3 17	6½
800	.	.	.	.	.	.	4 16	8½	4 .	7½	3 27	7	3 24	6¾
850	.	.	.	.	.	.	.	.	4 8	7¾	4 4	7¼	3 31	7
900	.	.	.	.	.	.	.	.	4 16	8	4 16	7½	4 9	7¼
950	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4 16	7½

Die Wurfweite wird geändert:

Durch eine Änderung der Ladung um 8 Lothe { bei 15—20, 25—35, 40—45 Graden; um 30, 50, 60 Klaftern.

	Pf.	Pf.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.	Pf.	Lth.
Durch eine Änderung d. Winkels um 5 Grade { bei	1—2,		2	8—3	8,		3	16—4	16	
um	10,			40,				70 Klaftern.		

Bombenwurftafel

für 60pfündige Steinmörser neuer Art.

Wurfweite in Klaftern.	Unter dem Richtwinkel von Graden															
	15		20		25		30		35		40		45			
	Ladung.		Brandr.		Ladung.		Brandr.		Ladung.		Brandr.		Ladung.		Brandr.	
	Pfd.	Lth.	"		Pfd.	Lth.	"		Pfd.	Lth.	"		Pfd.	Lth.	"	
80	1	10	4½		1	7	4		1	6	4		1	4	3½	
100	1	14	4¾		1	10	4½		1	9	4		1	5	3¾	
120	1	17	5		1	12	4¾		1	11	4¼		1	7	4	
140	1	21	5½		1	15	5		1	13	4½		1	9	4¼	
160	1	25	6		1	18	5¼		1	15	4¾		1	12	4½	
190	2	.	6¾		1	22	5¾		1	18	5¼		1	15	4¾	
210	2	3	7		1	25	6		1	20	5½		1	17	5	
240	2	8	7½		1	28	6¼		1	25	5¾		1	21	5¼	
260	2	21	7¾		2	.	6½		1	26	6		1	23	5¼	
280	3	.	8¼		2	5	7		1	29	6		1	26	5½	
300		.			2	9	7¼		2	.	6¼		1	28	5½	
320		.	.		2	21	7¾		2	3	6½		1	29	5¾	
340		.	.		3	.	8		2	6	6¾		1	31	5¾	
360		.	.		.		.		2	9	7		2	2	6	
380		.	.		.		.		2	17	7¼		2	4	6	
400		.	.		.		.		2	23	7½		2	6	6¼	
420		.	.		.		.		3	.	7¾		2	9	6½	
460		.	.		.		.		.		.		2	16	6¾	
480		.	.		.		.		.		.		2	26	7¼	
500		.	.		.		.		.		.		3	.	7½	
520		.	.		.		.		.		.		.		.	
550		.	.		.		.		.		.		.		.	
580		.	.		.		.		.		.		.		.	
600		.	.		.		.		.		.		.		.	
620		.	.		.		.		.		.		.		.	

| | | | | | | | | | | | | | | |

Wurftafel

für 6pfündige Cöhorn-Mörser.

Wurfweite in Klaftern	50	130	200	250	270
Ladung in Lothen.	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
Brandröhrenlänge in Zollen .	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$

Richtwinkel 45 Grade, Pulverstärke 56 Grade der Hebelprobe.
Brandröhrensatz Nr. 1 (4″ brennen 15 Secunden).

Tafel

für die Winkelzeiger der Richtwinkel.

R.W. Gr.	R.W. M.	W. Z.	R.W. Gr.	R.W. M.	W. Z.	R.W. Gr.	R.W. M.	W. Z.	R.W. Gr.	R.W. M.	W. Z.	R.W. Gr.	R.W. M.	W. Z.	R.W. Gr.	R.W. M.	W. Z.
15	0	0	19	0	90	23	0	158	27	0	209	31	0	247	35	0	274
.	10	4	.	10	94	.	10	160	.	10	211	.	10	248	.	10	275
.	20	9	.	20	97	.	20	163	.	20	213	.	20	250	.	20	276
.	30	13	.	30	100	.	30	165	.	30	214	.	30	251	.	30	277
.	40	17	.	40	103	.	40	167	.	40	216	.	40	252	.	40	278
.	50	21	.	50	106	.	50	170	.	50	218	.	50	253	.	50	278
16	0	25	20	0	109	24	0	172	28	0	220	32	0	255	36	0	279
.	10	29	.	10	112	.	10	174	.	10	221	.	10	256	.	20	281
.	20	33	.	20	115	.	20	177	.	20	223	.	20	257	.	40	282
.	30	37	.	30	118	.	30	179	.	30	225	.	30	258	37	0	284
.	40	41	.	40	121	.	40	181	.	40	226	.	40	259	.	20	285
.	50	45	.	50	124	.	50	183	.	50	228	.	50	261	.	40	287
17	0	49	21	0	127	25	0	185	29	0	229	33	0	262	38	0	288
.	10	52	.	10	129	.	10	187	.	10	231	.	10	263	.	20	289
.	20	56	.	20	132	.	20	189	.	20	233	.	20	264	.	40	290
.	30	60	.	30	135	.	30	192	.	30	234	.	30	265	39	0	291
.	40	63	.	40	138	.	40	194	.	40	236	.	40	266	.	30	293
.	50	67	.	50	140	.	50	196	.	50	237	.	50	267	40	0	294
18	0	70	22	0	143	26	0	198	30	0	239	34	0	268	.	30	296
.	10	74	.	10	145	.	10	200	.	10	240	.	10	269	41	0	297
.	20	77	.	20	148	.	20	201	.	20	241	.	20	270	42	0	299
.	30	80	.	30	151	.	30	203	.	30	243	.	30	271	43	0	300
.	40	84	.	40	153	.	40	205	.	40	244	.	40	272	44	0	301
.	50	87	.	50	156	.	50	207	.	50	246	.	50	273	45	0	301

Tafel

für die Distanzzeiger der Wurfweiten.

Wurfweite.	Distanzzeiger.	Wurfweite.	Distanzzeiger.	Wurfweite.	Distanzzeiger.	Wurfweite.	Distanzzeiger.	Wurfweite.	Distanzzeiger.	Wurfweite.	Distanzzeiger.	Wurfweite.	Distanzzeiger.	Wurfweite.	Distanzzeiger.
100	0	150	176	200	301	250	398	300	477	350	544	400	602	450	653
1	4	1	179	1	303	1	400	1	479	1	545	1	603	1	654
2	9	2	182	2	305	2	401	2	480	2	547	2	604	2	655
3	13	3	185	3	307	3	403	3	481	3	548	3	605	3	656
4	17	4	188	4	310	4	405	4	483	4	549	4	606	4	657
5	21	5	190	5	312	5	407	5	484	5	550	5	607	5	658
6	25	6	193	6	314	6	408	6	486	6	551	6	609	6	659
7	29	7	196	7	316	7	410	7	487	7	553	7	610	7	660
8	33	8	199	8	318	8	412	8	489	8	554	8	611	8	661
9	37	9	201	9	320	9	413	9	490	9	555	9	612	9	662
110	41	160	204	210	322	260	415	310	491	360	556	410	613	460	663
1	45	1	207	1	324	1	417	1	493	1	558	1	614	1	664
2	49	2	210	2	326	2	418	2	494	2	559	2	615	2	665
3	53	3	212	3	328	3	420	3	496	3	560	3	616	3	666
4	57	4	215	4	330	4	422	4	497	4	561	4	617	4	667
5	61	5	217	5	332	5	423	5	498	5	562	5	618	5	667
6	64	6	220	6	334	6	425	6	500	6	563	6	619	6	668
7	68	7	223	7	336	7	427	7	501	7	565	7	620	7	669
8	72	8	225	8	338	8	428	8	502	8	566	8	621	8	670
9	76	9	228	9	340	9	430	9	504	9	567	9	622	9	671
120	79	170	230	220	342	270	431	320	505	370	568	420	623	470	672
1	83	1	233	1	344	1	433	1	507	1	569	1	624	1	673
2	86	2	236	2	346	2	435	2	508	2	571	2	625	2	674
3	90	3	238	3	348	3	436	3	509	3	572	3	626	3	675
4	93	4	241	4	350	4	438	4	511	4	573	4	627	4	676
5	97	5	243	5	352	5	439	5	512	5	574	5	628	5	677
6	100	6	246	6	354	6	441	6	513	6	575	6	629	6	678
7	104	7	248	7	356	7	442	7	515	7	576	7	630	7	679
8	107	8	250	8	358	8	444	8	516	8	577	8	631	8	679
9	111	9	253	9	360	9	446	9	517	9	579	9	632	9	680
130	114	180	255	230	362	280	447	330	519	380	580	430	633	480	681
1	117	1	258	1	364	1	449	1	520	1	581	1	634	1	682
2	121	2	260	2	365	2	450	2	521	2	582	2	635	2	683
3	124	3	262	3	367	3	452	3	522	3	583	3	636	3	684
4	127	4	265	4	369	4	453	4	524	4	584	4	637	4	685
5	130	5	267	5	371	5	455	5	525	5	585	5	638	5	686
6	134	6	270	6	373	6	456	6	526	6	587	6	639	6	687
7	137	7	272	7	375	7	458	7	528	7	588	7	640	7	688
8	140	8	274	8	377	8	459	8	529	8	589	8	641	8	688
9	143	9	276	9	378	9	461	9	530	9	590	9	642	9	689
140	146	190	279	240	380	290	462	340	531	390	591	440	643	490	690
1	149	1	281	1	382	1	464	1	533	1	592	1	644	1	691
2	152	2	283	2	384	2	465	2	534	2	593	2	645	2	692
3	155	3	286	3	386	3	467	3	535	3	594	3	646	3	693
4	158	4	288	4	387	4	468	4	537	4	595	4	647	4	694
5	161	5	290	5	389	5	470	5	538	5	597	5	648	5	695
6	164	6	292	6	391	6	471	6	539	6	598	6	649	6	695
7	167	7	294	7	393	7	473	7	540	7	599	7	650	7	696
8	170	8	297	8	394	8	474	8	542	8	600	8	651	8	697
9	173	9	299	9	396	9	476	9	543	9	601	9	652	9	698

Tafel der Sinus und Tangenten für den Halbmesser 1.

Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang
0	0·000	0·000	9	0·156	0·158	18	0·309	0·325	27	0·454	0·510	36	0·588	0·727
¼	0·004	0·004	9¼	0·161	0·163	18¼	0·313	0·330	27¼	0·458	0·515	36¼	0·591	0·733
½	0·009	0·009	9½	0·165	0·167	18½	0·317	0·335	27½	0·462	0·521	36½	0·595	0·740
¾	0·013	0·013	9¾	0·169	0·172	18¾	0·321	0·339	27¾	0·466	0·526	36¾	0·598	0·747
1	0·017	0·017	10	0·174	0·176	19	0·326	0·344	28	0·469	0·532	37	0·602	0·754
1¼	0·022	0·022	10¼	0·178	0·181	19¼	0·330	0·349	28¼	0·473	0·537	37¼	0·605	0·760
1½	0·026	0·026	10½	0·182	0·185	19½	0·334	0·354	28½	0·477	0·543	37½	0·609	0·767
1¾	0·031	0·031	10¾	0·187	0·190	19¾	0·338	0·359	28¾	0·481	0·549	37¾	0·612	0·774
2	0·035	0·035	11	0·191	0·194	20	0·342	0·364	29	0·485	0·554	38	0·616	0·781
2¼	0·039	0·039	11¼	0·195	0·199	20¼	0·346	0·369	29¼	0·489	0·560	38¼	0·619	0·788
2½	0·044	0·044	11½	0·199	0·203	20½	0·350	0·374	29½	0·492	0·566	38½	0·623	0·795
2¾	0·048	0·048	11¾	0·204	0·208	20¾	0·354	0·379	29¾	0·496	0·572	38¾	0·626	0·803
3	0·052	0·052	12	0·208	0·213	21	0·358	0·384	30	0·500	0·577	39	0·629	0·810
3¼	0·057	0·057	12¼	0·212	0·217	21¼	0·362	0·389	30¼	0·504	0·583	39¼	0·633	0·817
3½	0·061	0·061	12½	0·216	0·222	21½	0·367	0·394	30½	0·508	0·589	39½	0·636	0·824
3¾	0·065	0·066	12¾	0·221	0·226	21¾	0·371	0·399	30¾	0·511	0·595	39¾	0·639	0·832
4	0·070	0·070	13	0·225	0·231	22	0·375	0·404	31	0·515	0·601	40	0·643	0·839
4¼	0·074	0·074	13¼	0·229	0·235	22¼	0·379	0·409	31¼	0·519	0·607	40¼	0·646	0·847
4½	0·078	0·079	13½	0·233	0·240	22½	0·383	0·414	31½	0·522	0·613	40½	0·649	0·854
4¾	0·083	0·083	13¾	0·238	0·245	22¾	0·387	0·419	31¾	0·526	0·619	40¾	0·653	0·862
5	0·087	0·087	14	0·242	0·249	23	0·391	0·424	32	0·530	0·625	41	0·656	0·869
5¼	0·092	0·092	14¼	0·246	0·254	23¼	0·395	0·430	32¼	0·534	0·631	41¼	0·659	0·877
5½	0·096	0·096	14½	0·250	0·259	23½	0·399	0·435	32½	0·537	0·637	41½	0·663	0·885
5¾	0·100	0·101	14¾	0·255	0·263	23¾	0·403	0·440	32¾	0·541	0·643	41¾	0·666	0·893
6	0·105	0·105	15	0·259	0·268	24	0·407	0·445	33	0·545	0·649	42	0·669	0·900
6¼	0·109	0·110	15¼	0·263	0·273	24¼	0·411	0·450	33¼	0·548	0·656	42¼	0·672	0·908
6½	0·113	0·114	15½	0·267	0·277	24½	0·415	0·456	33½	0·552	0·662	42½	0·676	0·916
6¾	0·118	0·118	15¾	0·271	0·282	24¾	0·419	0·461	33¾	0·556	0·668	42¾	0·679	0·924
7	0·122	0·123	16	0·276	0·287	25	0·423	0·466	34	0·559	0·675	43	0·682	0·933
7¼	0·126	0·127	16¼	0·280	0·291	25¼	0·427	0·472	34¼	0·563	0·681	43¼	0·685	0·941
7½	0·131	0·132	16½	0·284	0·296	25½	0·431	0·477	34½	0·566	0·687	43½	0·688	0·949
7¾	0·135	0·136	16¾	0·288	0·301	25¾	0·434	0·482	34¾	0·570	0·694	43¾	0·692	0·957
8	0·139	0·141	17	0·292	0·306	26	0·438	0·488	35	0·574	0·700	44	0·695	0·966
8¼	0·143	0·145	17¼	0·297	0·311	26¼	0·442	0·493	35¼	0·577	0·707	44¼	0·698	0·974
8½	0·148	0·149	17½	0·301	0·315	26½	0·446	0·499	35½	0·581	0·713	44½	0·701	0·983
8¾	0·152	0·154	17¾	0·305	0·320	26¾	0·450	0·504	35¾	0·584	0·720	44¾	0·704	0·991
9	0·156	0·158	18	0·309	0·325	27	0·454	0·510	36	0·588	0·727	45	0·707	1·000

Tafel der Sinus und Tangenten für den Halbmesser 1.

Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang	Gr.	Sin	Tang
45	0·707	1·000	54	0·809	1·376	63	0·891	1·963	72	0·951	3·078	81	0·988	6·314
45¼	0·710	1·009	54¼	0·812	1·389	63¼	0·893	1·984	72¼	0·952	3·124	81¼	0·988	6·497
45½	0·713	1·018	54½	0·814	1·402	63½	0·895	2·006	72½	0·954	3·172	81½	0·989	6·691
45¾	0·716	1·027	54¾	0·817	1·415	63¾	0·897	2·028	72¾	0·955	3·221	81¾	0·990	6·897
46	0·719	1·036	55	0·819	1·428	64	0·899	2·050	73	0·956	3·271	82	0·990	7·115
46¼	0·722	1·045	55¼	0·822	1·441	64¼	0·901	2·073	73¼	0·958	3·323	82¼	0·991	7·348
46½	0·725	1·054	55½	0·824	1·455	64½	0·903	2·097	73½	0·959	3·376	82½	0·991	7·596
46¾	0·728	1·063	55¾	0·827	1·469	64¾	0·904	2·120	73¾	0·960	3·431	82¾	0·992	7·861
47	0·731	1·072	56	0·829	1·483	65	0·906	2·145	74	0·961	3·487	83	0·993	8·144
47¼	0·734	1·082	56¼	0·831	1·497	65¼	0·908	2·169	74¼	0·962	3·546	83¼	0·993	8·449
47½	0·737	1·091	56½	0·834	1·511	65½	0·910	2·194	74½	0·964	3·606	83½	0·994	8·777
47¾	0·740	1·101	56¾	0·836	1·525	65¾	0·912	2·220	74¾	0·965	3·668	83¾	0·994	9·131
48	0·743	1·111	57	0·839	1·540	66	0·914	2·246	75	0·966	3·732	84	0·995	9·514
48¼	0·746	1·120	57¼	0·841	1·555	66¼	0·915	2·273	75¼	0·967	3·798	84¼	0·995	9·931
48½	0·749	1·130	57½	0·843	1·570	66½	0·917	2·300	75½	0·968	3·867	84½	0·995	10·385
48¾	0·752	1·140	57¾	0·846	1·585	66¾	0·919	2·328	75¾	0·969	3·938	84¾	0·996	10·883
49	0·755	1·150	58	0·848	1·600	67	0·921	2·356	76	0·970	4·011	85	0·996	11·430
49¼	0·758	1·161	58¼	0·850	1·616	67¼	0·922	2·385	76¼	0·971	4·087	85¼	0·997	12·035
49½	0·760	1·171	58½	0·853	1·632	67½	0·924	2·414	76½	0·972	4·165	85½	0·997	12·706
49¾	0·763	1·181	58¾	0·855	1·648	67¾	0·926	2·444	76¾	0·973	4·247	85¾	0·997	13·457
50	0·766	1·192	59	0·857	1·664	68	0·927	2·475	77	0·974	4·331	86	0·998	14·301
50¼	0·769	1·202	59¼	0·859	1·681	68¼	0·929	2·507	77¼	0·975	4·419	86¼	0·998	15·257
50½	0·772	1·213	59½	0·862	1·698	68½	0·930	2·539	77½	0·976	4·511	86½	0·998	16·350
50¾	0·774	1·224	59¾	0·864	1·715	68¾	0·932	2·571	77¾	0·977	4·606	86¾	0·998	17·611
51	0·777	1·235	60	0·866	1·732	69	0·934	2·605	78	0·978	4·705	87	0·999	19·081
51¼	0·780	1·246	60¼	0·868	1·750	69½	0·935	2·639	78¼	0·979	4·808	87¼	0·999	20·819
51½	0·783	1·257	60½	0·870	1·767	69¼	0·937	2·675	78½	0·980	4·915	87½	0·999	22·904
51¾	0·785	1·268	60¾	0·872	1·786	69¾	0·938	2·711	78¾	0·981	5·027	87¾	0·999	25·452
52	0·788	1·280	61	0·875	1·804	70	0·940	2·747	79	0·982	5 145	88	0·999	28·636
52¼	0·791	1·292	61¼	0·877	1·823	70¼	0·941	2·785	79¼	0·982	5·267	88¼	0·999	32·730
52½	0·793	1·303	61½	0·879	1·842	70½	0 943	2·824	79½	0·983	5·396	88½	0 999	38·188
52¾	0·796	1·315	61¾	0·881	1·861	70¾	0·944	2·864	79¾	0 984	5·530	88¾	0·999	45·829
53	0·799	1·327	62	0·883	1·881	71	0·946	2·904	80	0·985	5·671	89	0·999	57·290
53¼	0·801	1·339	62¼	0·885	1·901	71¼	0·947	2·946	80¼	0·986	5·820	89¼	0·999	76·390
53½	0·804	1·351	62½	0·887	1·921	71½	0·948	2·989	80½	0·986	5·976	89½	0·999	114·589
53¾	0·806	1·364	62¾	0·889	1·942	71¾	0·950	3·033	80¾	0·987	6·140	89¾	0·999	229·182
54	0·809	1·376	63	0·891	1·963	72	0·951	3·078	81	0·988	6·314	90	1·000	∞

Ricochettafel

für 24pf. Batteriekanonen mit Kugeln und 7pf. Granaten.

Projectil.	Des Werkes: Beschaffenheit.	Des Werkes: Höhe über die Schildzapfenaxe.		Richtwinkel in Graden.	Entfernung des Werkes in Klaftern: 160	200	240	280	320	360	400
					Pulverladung in Lothen.						
Kugeln.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2	Klaftern.	12	11	13	15	17	19	20	23
		4		13	11	13	15	17	19	20	22
		6		14	11	12	14	16	18	19	21
		8		15	11	12	14	16	18	19	20
		10		16	11	12	14	15	16	18	19
	Längeres Werk.	2		8	14	17	20	22	24	27	29
		4		9	14	17	20	22	24	26	27
		6		10	14	16	19	21	23	24	26
		8		11	14	16	19	20	22	23	25
		10		12	14	16	18	19	20	23	24
	Werk der größten Länge.	2		4	26	31	34	40	.	.	.
		4		5	24	26	30	35	36	.	.
		6		6	23	26	29	33	35	37	40
		8		7	22	25	28	30	32	35	37
		10		8	22	24	25	28	30	33	34
7pfündige Granaten.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2		12	.	$9\frac{1}{2}$	11	12	14	16	18
		4		13	.	$9\frac{1}{2}$	11	12	14	16	18
		6		14	.	$9\frac{1}{2}$	11	12	14	16	18
		8		15	.	$9\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	13	15	18
		10		16	.	$9\frac{1}{2}$	10	11	12	14	18
	Längeres Werk.	2		8	10	12	14	17	20	.	.
		4		9	10	12	14	$16\frac{1}{2}$	19	.	.
		6		10	10	12	14	16	18	20	.
		8		11	10	$11\frac{1}{2}$	13	15	17	19	.
		10		12	10	$11\frac{1}{2}$	12	14	16	18	19

Für Kanonen neuer Art (nach 1822 gegossen) wird die Ladung bei größern Entfernungen um 2, bei kleinern um 1 Loth vermindert.

Die Schußweite wird geändert:

Beim Kugelschießen.
- Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade: bei 10—20, 22—30, 32—40 Lth. Lad. / um 30, 70, 100 Klaftern.
- Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe: bei 4— 8, 10—12, 14—16 Gr. Elev. / um 20, 40, 50 Klaftern.

Beim Granatenschießen.
- Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade: bei 10—12, 14—16, 18—20 Lth. Lad. / um 30, 35, 40 Klaftern.
- Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe: bei 10—12, 14—16 Graden Elev. / um 40, 40 Klaftern.

Anmerkung zu dieser und den folgenden Ricochettafeln: Die Pulverstärke 60 Grade der Hebelprobe.

Ricochettafel

für 18- und 12pfündige Batteriekanonen.

Geschütz.	Des Werkes: Beschaffenheit.	Des Werkes: Höhe über die Schildzapfenaxe.		Richtwinkel in Graden.	Entfernung des Werkes in Klaftern. 120	160	200	240	280	320	360	400
					Pulverladung in Lothen.							
18Pfünder.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2	Klaftern.	12	8	9½	10½	12	14	16	17½	20
		4		13	8	9½	10½	12	13½	15½	16¾	18½
		6		14	8	9	10	12	13	15	16	17
		8		15	8	9	10	11½	12½	14½	15¾	16½
		10		16	8	9	10	11	12	14	15	16
	Längeres Werk.	2		8	10	12	14	16	18	21	24	25½
		4		9	10	12	14	16	17½	21	22½	24¼
		6		10	10	12	13½	15½	17	20	21	23
		8		11	10	11½	13	15	16½	19½	20½	22½
		10		12	10	11	12	15	16	18	20	22
	Werk der gröſten Länge.	2		4	18	20	24	30	34	.	.	.
		4		5	16	20	23	27½	32	.	.	.
		6		6	15	20	22	25	30	32	.	.
		8		7	14	19	21	23½	27	28	.	.
		10		8	13	18	20	22	24	25½	26	.
12Pfünder.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2		12	.	.	.	8	9	10	11	12
		4		13	.	.	.	8	9	10	10½	11½
		6		14	.	.	.	8	8½	9½	10	11
		8		15	.	.	.	7¾	8	9¼	10	10½
		10		16	.	.	.	7½	8	9	10	10½
	Längeres Werk.	2		8	.	8	10	11	12	14	16	17
		4		9	.	8	9½	10½	11	14	15	16
		6		10	.	8	9	10	10½	13½	14	15
		8		11	.	.	8½	9½	10	12¼	13	14
		10		12	.	.	8	9	10	11¼	12	13
	Werk der gröſten Länge.	2		4	12	16	18	20	24	.	.	.
		4		5	11	15	16½	19	22	.	.	.
		6		6	10	14	15	18	19	20	23	.
		8		7	9	13	14	15½	17	18½	20½	.
		10		8	8	12	13	13	14	17	18	.

Für Kanonen neuer Art (nach 1822 gegossen) wird die Ladung bei größern Entfernungen um 2, bei kleinern um 1 Loth vermindert.

Die Schußweite wird geändert:

Für 18Pfünder	Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade	bei 8—16, 18—24, 26—32 Lth. Lad. um 40, 70, 100 Klaftern.
	Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe	bei 4— 8, 10—12, 14—16 Gr. Elev. um 30, 50, 60 Klaftern.
Für 12Pfünder	Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade	bei 8—12, 14—18, 20—24 Lth. Lad. um 50, 80, 100 Klaftern.
	Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe	bei 4— 8, 10—12, 14—16 Gr. Elev. um 40, 60, 80 Klaftern.

Ricochettafel

für 7pfündige gewöhnliche Haubitzen.

Projectil.	Des Werkes: Beschaffenheit.	Des Werkes: Höhe über die Schildzapfenare.		Richtwinkel in Graden.	Entfernung des Werkes in Klaftern. 120	160	200	240	280	320	360
					Pulverladung in Lothen.						
7pfündige Granaten.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2	Klaftern.	16	.	.	8	12	13	.	.
		4		17	.	.	8	12	13	.	.
		6		18	.	.	8	12	13	.	.
		8		19	.	.	8	11½	12½	.	.
		10		20	.	.	8	11	12	.	.
	Längeres Werk.	2		12	8	10	12	14	15	.	.
		4		13	8	10	12	14	15	.	.
		6		14	8	10	12	14	15	.	.
		8		15	7¾	10	12	13½	14½	.	.
		10		16	7½	10	12	13	14	.	.
	Werk der größten Länge.	2		8	12	14	16	.	.	.	.
		4		9	12	14	15½	.	.	.	.
		6		10	12	14	15	.	.	.	.
		8		11	11	13	14½	.	.	.	.
		10		12	11	12½	14	.	.	.	.
24pfündige Kugeln.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2		16	9½	12	13	14	16	17	18
		4		17	9½	12	13	14	16	17	18
		6		18	9½	12	13	14	16	17	18
		8		19	9½	12	13	14	16	17	18
		10		20	9½	12	13	14	16	17	18
	Längeres Werk.	2		12	12	14	15	16½	18	20	21
		4		13	12	14	15	16¼	17¾	19½	20¾
		6		14	12	14	15	16	17½	19	20½
		8		15	12	13½	14½	15½	17½	18½	20¼
		10		16	12	13	14	15	17½	18	20
	Werk der größten Länge.	2		8	14	16	18	21	22	.	.
		4		9	14	16	18	20½	21½	.	.
		6		10	14	16	18	20	21	24	.
		8		11	14	16	18	19½	20½	22½	.
		10		12	14	16	18	19	20	21	.

Die Schußweite wird geändert:

Mit 7pfünd. Granaten:
- Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade: bei 8—10, 12—14, 16 Lth. Lad. — um 20, 30, 35 Klaftern.
- Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe: bei 8—10, 12—14, 16—20 Gr. Elev. — um 30, 40, 50 Klaftern.

Mit 24pfündigen Kugeln:
- Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade: bei 8—12, 14—18, 20—24 Lth. Lad. — um 15, 25, 45 Klaftern.
- Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe: bei 8—10, 12—14, 16—20 Gr. Elev. — um 30, 45, 55 Klaftern.

Ricochettafel

für die 7pfündige lange und 10pfündige gewöhnliche Haubitze mit Granaten.

Geschütz.	Des Werkes: Beschaffenheit.	Des Werkes: Höhe über die Schildzapfenaxe.		Richtwinkel in Graden.	Entfernung des Werkes in Klaftern. 120	160	200	240	280	320	360	400
					Pulverladung in Lothen.							
7pfündige lange Haubitze.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2	Klaftern.	11	.	.	11	12½	14	15	17	18
		4		12	.	.	11	12½	13½	14½	16½	17½
		6		13	.	.	11	12	12½	14	15½	17
		8		14	.	.	10½	11½	12½	13½	15½	16
		10		15	.	.	10½	11½	12	13	14½	15
	Längeres Werk.	2		8	.	11	12½	14½	17	18	21	23
		4		9	.	11	12½	14	16½	18	20	22
		6		10	.	11	12½	13	15½	17	19	20½
		8		11	.	11	12½	13	15	17	18	19½
		10		12	.	11	12	13	14	16	18	19
	Werk der größten Länge.	2		4	14	18	20	22	.	.	.	.
		4		5	14	17½	19	21	.	.	.	.
		6		6	13½	16½	19	20½	.	.	.	.
		8		7	13½	15	18	19½	.	.	.	.
		10		8	13	14	16½	19	.	.	.	.
10pfündige gewöhnliche Haubitze.	Kurze oder gut traversirte Linie.	2		12	.	16	20	22	25	28	29	31
		4		13	.	16	20	22	24½	27	29	31
		6		14	.	16	20	22	24	26	28	31
		8		15	.	16	20	22	23	25	27	30½
		10		16	.	16	20	21	22	24	26	30
	Längeres Werk.	2		8	18	22	25	28	29	30	33	38
		4		9	18	22	25	27½	28½	30	33	37
		6		10	18	22	25	27½	28½	30	33	36
		8		11	18	21	24	27	28	29½	32½	35
		10		12	18	21	24	26	28	29	32	34
	Werk der größten Länge.	2		4	.	.	36	37	40	.	.	.
		4		5	.	.	34	35½	39	.	.	.
		6		6	.	.	32	34	38	42	.	.
		8		7	.	.	30	33	36	40	.	.
		10		8	.	.	29	32	34	38	.	.

Die Schußweite wird geändert:

Bei der 7pfünd. langen Haubitze.

- Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade: bei 12—16, 16—20 Lothen Ladung um 50, 60 Klaftern.
- Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe: bei 4—7, 8—12, 12—15 Gr. Elev. um 30, 45, 55 Klaftern.

Bei der 10pfünd. Haubitze.

- Durch eine Änderung d. Winkels um 2 Grade: bei 16—24, 26—34, 36—42 Lth. Lad. um 30, 50, 70 Klaftern.
- Durch eine Änderung der Ladung um 2 Lothe: bei 4—8, 10—12, 14—16 Gr. Elev. um 20, 35, 40 Klaftern.

Vierter Abschnitt.

Maß der Stoß- und der Ziehkräfte.

A. Maß der Stoßkräfte.

§. 223. Die Bewegung eines materiellen Punctes oder Körpers hat man bisher blos im Allgemeinen als Folge der Kraftwirkung betrachtet, ohne zu untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen der Kraft, der Masse des bewegten Körpers und der durch die Kraft hervorgebrachten Bewegung besteht. Denn offenbar muß eine Masse in derselben Zeit durch eine größere Kraft eine größere Geschwindigkeit erlangen als durch eine kleinere (§. 199. 2) und bei verschiedenen Massen, welche in derselben Zeit gleiche Geschwindigkeiten erlangen, muß die die größere Masse bewegende Kraft größer sein als jene, welche auf die kleinere Masse wirkt.

Bei der hier folgenden Untersuchung über das Maß der Kräfte wird angenommen, daß die Körper frei beweglich sind und daß die Richtung der Kraft durch den Schwerpunct des bewegten Körpers geht, weil diesfalls die Wirkung auf alle materiellen Theilchen gleichmäßig geschieht (§. 200).

§. 224. Wir wollen zunächst die Momentan- oder Stoßkräfte untersuchen.

1) Sind P und P' zwei Stoßkräfte, welche gleichen Massen die Geschwindigkeiten c und c' ertheilen; so ist (§. 199. 2)

$$P : P' = c : c'.$$

2) Wirken aber die Kräfte P und P' auf die Massen M und M', denen sie bezüglich gleiche Geschwindigkeiten beibringen; so muß die Wirkung auf gleiche Theile dieser Massen gleich sein. Ist nemlich $\frac{M}{n} = \frac{M'}{n'}$ ein solcher materieller Theil der beiden Massen, auf welchen also durch die Kraft P die Wirkung $\frac{P}{n}$ und durch P' die Wirkung $\frac{P'}{n'}$ kommt, so ist $\frac{P}{n} = \frac{P'}{n'}$, sofort durch die Verbindung beider Gleichungen

$$P : P' = M : M';$$

d. h. Stoßkräfte, welche verschiedenen Massen gleiche Geschwindigkeiten ertheilen, verhalten sich wie diese Massen.

3) Wird zum Vergleiche eine dritte Kraft P'' genommen, die der Masse M die Geschwindigkeit c' beizubringen vermag; so ist wegen 1)

$$P : P'' = c : c'$$

und wegen 2)

$$P'' : P' = M : M',$$

mithin

$$P : P' = Mc : M'c';$$

d. h. zwei Stoßkräfte verhalten sich zu einander, wie die Producte der Massen in die denselben bezüglich ertheilten Geschwindigkeiten.

4) Für $P = P'$ folgt aus 3)

$$M : M' = c' : c;$$

d. h. die von gleichen Stoßkräften verschiedenen Massen ertheilten Geschwindigkeiten verhalten sich wie umgekehrt diese Massen.

Dieser Fall kommt bei dem Schuße aus Geschützen vor, wo nahe dieselbe Kraft die Kugel vor- und das Geschütz rückwärts stößt. Der Unterschied beider Kräfte liegt nur in der Verschiedenheit des größten Kreises der Kugel gegen den senkrechten Querschnitt der Geschützbohrung.

5) Nimmt man diejenige Stoßkraft als Einheit, die der Masse 1 die Geschwindigkeit 1 ertheilt; ist nemlich $P' = 1$ für $M' = 1$ und $c' = 1$; so folgt aus (3) die Gleichung

$$(1) \qquad P = Mc,$$

nach welcher die Intensität oder das Maß einer Stoßkraft

das Product der bewegten Masse in die ihr von der Kraft ertheilte Geschwindigkeit ist. Man pflegt das Product Mc die Größe der Bewegung oder auch das mechanische Moment zu nennen.

Überhaupt wird die augenblickliche Wirkung, welche bei dem Zusammentreffen eines bewegten Körpers auf einen ruhenden oder bewegten Körper entsteht, Stoß genannt.

§. 225. Haben zwei zusammenstoßende Körper eine krumme Oberfläche, so daß sie sich, wenn sie vollkommen hart wären, nur in einem einzigen Puncte berühren könnten; so denke man sich eine Ebene durch diesen Punct, welche die beiden Oberflächen berührt, dann durch den Berührungspunct auf die Ebene eine gerade Linie senkrecht gezogen. Ist nun diese Gerade parallel zu der Richtung, nach welcher sich die Schwerpuncte beider Körper bewegen, so wird der Stoß ein gerader genannt. Durchschneidet diese Gerade die Schwerpuncte beider Körper, so heißt der Stoß ein centraler. Finden beide Fälle zugleich statt, so sagt man, die beiden Körper stoßen gerade und central auf einander. Zwei gleichförmig dichte Kugeln müssen immer central auf einander stoßen. Sind die beiden Körper durch Ebenen begrenzt und fallen bei dem Stoße zwei derselben über einander, so müssen diese für die Berührungsebene genommen werden.

§. 226. Es seien für den geraden und centralen Stoß zweier vollkommen harter, gleichförmig bewegter Körper von der Masse M und m die Geschwindigkeiten derselben C und c, folglich die Größen der Bewegung MC und mc.

1) Bewegen sich beide Körper nach derselben Richtung, so muß, damit ein Stoß erfolgen könne, die Geschwindigkeit des hintern größer als die des vordern sein. Durch den geraden und centralen Stoß dieser beiden Körper kann von den Größen der Bewegung nichts getilgt werden. Es müssen sich diese über beide Körper gleichförmig so verbreiten, als wenn sie eine zusammenhängende Masse bilden würden und beide Körper werden dann mit der gleichen Geschwindigkeit in einer gleichförmigen Bewegung nach der Richtung, die sie vor dem Stoße hatten, an einander fortschreiten. Es muß also durch den Stoß der hintere Körper an Geschwindigkeit verlieren, die Geschwindigkeit des andern aber größer werden.

Ist x die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoße, so wird $x(M+m)$ die Größe der Bewegung und weil die Körper nach dem Stoße ihre Größen der Bewegung beibehalten,

$x(M+m) = MC+mc$, also

$$(1) \quad x = \frac{MC+mc}{M+m} = C - \frac{m(C-c)}{M+m} = c + \frac{M(C-c)}{M+m}.$$

Diese Ausdrücke geben zu erkennen, daß durch den Stoß die Geschwindigkeit des hintern Körpers von der Masse M um die Größe $\frac{m(C-c)}{M+m}$ vermindert, die des vordern aber um $\frac{M(C-c)}{M+m}$ vermehrt wird. Der hintere Körper verliert $\frac{Mm(C-c)}{M+m}$ von der Größe seiner Bewegung, welchen Theil der andere Körper gewinnt. Für die Geschwindigkeiten ist der Verlust und der Gewinn im verkehrten Verhältnisse der Massen.

Ist $M=m$, so ist $x=\frac{1}{2}(C+c)$.

2) Wenn aber die Körper nach entgegengesetzten Richtungen sich bewegen und ihre Größen der Bewegung vor dem Stoße verschieden sind, etwa $MC>mc$ ist; so wird in dem Körper von der Masse m die Größe der Bewegung ganz, in dem andern aber ein eben so großer Theil getilgt. In beiden wird also nach dem Stoße die Größe der Bewegung $MC-mc$ übrig bleiben, welche sich gleichförmig über alle Theile verbreitet; folglich ist in diesem Falle

$x(M+m) = MC-mc$ und

$$(2) \quad x = \frac{MC-mc}{M+m} = C - \frac{m(C+c)}{M+m} = -c + \frac{M(C+c)}{M+m}.$$

Mit dieser Geschwindigkeit werden dann beide Körper mit einander sich nach derjenigen Richtung fortbewegen, welche die Masse M vor dem Stoße hatte. Dabei ist $\frac{Mm(C+c)}{M+m}$ der Verlust an Größe der Bewegung bei M und eben so groß ist der Gewinn bei m im Sinne der Bewegung von M. Dieselben Resultate folgen aus (1), wenn man c negativ nimmt. Ist $M=m$; so wird $x=\frac{1}{2}(C-c)$.

3) Stößt endlich ein Körper von der Masse M mit der Geschwindigkeit C auf eine ruhende Masse m gerade und central; so wird sich die Größe der Bewegung über beide Körper gleichförmig verbreiten, welche dann die Bewegung nach der Richtung des vor dem Stoße bewegten Körpers mit der Geschwindigkeit

$$(3) \quad x = \frac{MC}{M+m} = C - \frac{mC}{M+m}$$

gemeinschaftlich fortsetzen, was auch aus (1) und (2) für $c = 0$ hervorgeht.

Dieser Ausdruck gibt zu erkennen, daß eine noch so kleine Größe der Bewegung wie MC eine noch so große Masse m in Bewegung setzen muß, wenn keine Hindernisse der Bewegung eintreten.

§. 227. Wenn zwei vollkommen elastische Körper zusammenstoßen, so wird, da die Theilchen dort, wo der Stoß geschieht, nachgeben, nemlich bis auf eine gewisse Grenze ausweichen können, die Einwirkung sich nicht plötzlich über die ganzen Körper verbreiten und dann wirken die verdrängten Theilchen beider Körper, um wieder ihre vorige Lage einzunehmen, mit derselben Stärke auf den zusammendrückenden Körper zurück. Es sei vor dem Stoße mc die Größe der Bewegung bei dem einen Körper, MC die bei dem andern und nach dem Stoße v die Geschwindigkeit des ersten und V die des zweiten.

Haben die Bewegungen beider Körper dieselbe Richtung; so wird der hintere so lange auf den vordern wirken, bis ersterer nach vorigem §. $\frac{Mm(C-c)}{M+m}$ an Größe der Bewegung verloren und der zweite gewonnen hat. Da nun die dadurch zusammengedrückten Theilchen beider Körper mit gleicher Stärke zurückdrücken, so wird bei dem hintern auch noch, der Elasticität wegen, ein solcher Theil der Größe der Bewegung getilgt und bei dem andern zugegeben; es hat also der hintere Körper nach dem Stoße

$$MV = MC - \frac{2Mm(C-c)}{M+m}$$

als Größe der Bewegung und der vordere

$$mv = mc + \frac{2Mm(C-c)}{M+m}$$

zu derselben, woraus

$$(4) \quad \begin{cases} V = C - \frac{2m(C-c)}{M+m} \text{ und} \\ v = c + \frac{2M(C-c)}{M+m} \end{cases}$$

folgt.

Für beide Körper ist nach dem Stoße die Größe der Bewegung

$$MC - \frac{2Mm(C-c)}{M+m} + mc + \frac{2Mm(C-c)}{M+m} = MC + mc$$

dieselbe wie vor dem Stoße und so groß, als wenn beide Körper vollkommen hart, also unelastisch wären. Die Änderung der Geschwindigkeit in beiden Körpern ist aber das Doppelte von der, welche durch den Stoß erfolgen würde, wenn beide Körper vollkommen unelastisch wären. Auch sind die Summen der Producte aus dem Quadrate jeder Geschwindigkeit in ihre Masse vor und nach dem Stoße einander gleich, nemlich gleich

$$MC^2 + mc^2.$$

Wird $M = m$ gesetzt; so ist $V = c$ und $v = C$; d. h. wenn zwei vollkommen elastische Körper von gleichen Massen in einer Richtung sich so fortbewegen, daß der hintere an den vordern gerade und central stößt, so verwechseln diese Körper nach dem Stoße ihre Geschwindigkeiten.

2) Bewegen sich beide Körper nach gerade entgegengesetzter Richtung gegen einander, so findet man durch ähnliche Schlüsse wie in 1) mit Rücksicht auf (2) vorigen §.

$$(5) \qquad \begin{cases} V = C - \dfrac{2m(C+c)}{M+m}, \\ v = -c + \dfrac{2M(C+c)}{M+m}, \end{cases}$$

was sich aus (4) ergibt, wenn man c negativ nimmt.

Die ganze Größe der Bewegung in beiden Körpern nach dem Stoße ist $MC - mc$, also so, als wenn sie unelastisch wären.

Aus den Formeln (4) und (5) für die Geschwindigkeiten können mehre Schlüsse gezogen werden, welche zu machen, den Anfängern selbst überlassen bleiben mag, z. B. für die Fälle

$M = m$; $M = m$ und $C = c$; $MC \gtreqless m(C+2c)$; $C = c$ und $M \gtreqless 3m$,

u. s. w.

3) Wenn ein vollkommen elastischer Körper von der Masse M auf einen ruhenden vollkommen elastischen von der Masse m gerade und central stößt; so hat man nach (4) oder (5) für $c = 0$

$$(6) \qquad V = \frac{C(M-m)}{M+m}, \qquad v = \frac{2MC}{M+m}.$$

Sind die Massen gleich, so ist $V = 0$ und $v = C$; d. h. in diesem Falle bleibt der stoßende Körper liegen und der andere geht mit der Ge-

schwindigkeit des erstern weiter fort. Ist die ruhende Masse m unendlich groß oder festgehalten, so ist

$$V = -C \text{ und } v = 0;$$

d. h. der stoßende Körper M kehrt nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit, die er vor demselben hatte, zurück.

§. 228. Aus den bisher angestellten Untersuchungen über den geraden und centralen Stoß zweier Körper erhellet, daß für ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße eigentlich nur zwei Formeln zu erwägen kommen, aus welchen alle übrigen abgeleitet werden können.

Für die vollkommen harten Körper ist nemlich

$$\text{(I)} \qquad x = C - \frac{m(C-c)}{M+m} = c + \frac{M(C-c)}{M+m}$$

und für die vollkommen elastischen

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} V = C - \dfrac{2m(C-c)}{M+m} = 2x - C \text{ und} \\ v = c + \dfrac{2M(C-c)}{M+m} = 2x - c. \end{cases}$$

Alle bisher bekannten festen Körper der Natur liegen zwischen diesen Grenzen. Bei dem Zusammenstoßen derselben geschieht die Einwirkung auf einander auf eine ähnliche Art; folglich wird man allgemein für die Geschwindigkeiten der Körper folgende Formeln aufstellen können:

$$\text{(III)} \qquad V = C - \frac{\alpha m(C-c)}{M+m} \text{ und } v = c + \frac{\alpha M(C-c)}{M+m}.$$

Der Werth von α wird größer als die Einheit, aber auch immer kleiner als 2 sein müssen. Bewegt sich der Körper von der Masse m vor dem Stoße dem andern entgegengesetzt, so ist in allen diesen Formeln c negativ zu nehmen.

§. 229. Es seien **A**, **B** und **D** drei vollkommen elastische Körper von den Massen M, μ und m und dabei $M > \mu > m$. Der erste **A** stoße auf den ruhenden **B** und dieser dann auf den ruhenden **D** gerade und central; so wird der Körper **D** nach dem Stoße eine größere Geschwindigkeit erhalten, als wenn **A** mit seiner Geschwindigkeit unmittelbar auf **D** gestoßen hätte.

Denn ist C die Geschwindigkeit des ersten Körpers **A** vor dem Stoße, so erhält **B** wegen §. 227 nach dem Stoße die Geschwindigkeit

$$v' = \frac{2MC}{M+\mu},$$

und **D** nach dem Stoße des Körpers **B** die Geschwindigkeit

$$v = \frac{2\mu v'}{\mu+m} = \frac{2\mu}{\mu+m} \cdot \frac{2MC}{M+\mu} = \frac{4M\mu C}{(M+\mu)(\mu+m)}.$$

Hätte aber der Körper **A** unmittelbar auf **D** gestoßen, so würde dann die Geschwindigkeit des letztern

$$V = \frac{2MC}{M+m}$$

sein. Nun ist

$$v = \frac{4MC\mu(M+m)}{(M+\mu)(\mu+m)(M+m)}$$

und

$$V = \frac{2MC(M+\mu)(\mu+m)}{(M+\mu)(\mu+m)(M+m)}.$$

Diese beiden Ausdrücke haben einen gleichen Nenner und im Zähler einen gleichen Factor $2MC$; es wird also da, wo der andere Factor größer ist, auch der Ausdruck größer sein.

In v ist dieser Factor $= 2\mu(M+m) = 2M\mu + 2\mu m$,

„ V „ „ „ $= (M+\mu)(\mu+m)$

$= M\mu + \mu^2 + Mm + \mu m.$

Zieht man diesen Ausdruck von jenem ab, so erhält man die Differenz

$$(M-\mu)(\mu-m)$$

positiv, daher ist $v > V$.

Ferner hat nach (6) §. 227

A vor dem Stoße auf **B** die Geschwindigkeit $C = C$,

nach „ „ „ **B** „ „ „ $w_1 = \frac{C(M-\mu)}{M+\mu}$,

B vor „ „ „ **D** „ „ „ $w_2 = \frac{2MC}{M+\mu}$,

nach „ „ „ **D** „ „ „ $w'_2 = \frac{2MC}{M+\mu} \cdot \frac{\mu-m}{\mu+m}$

und **D** erhält durch **B** die Geschwindigkeit $v = \frac{4M\mu C}{(M+\mu)(\mu+m)}$.

Für $M = \mu = m$ ist $w_1 = w'_2 = 0$, $w_2 = v = C$;

d. h. es geht blos **D** mit der Geschwindigkeit C des Körpers **A** weiter, während **A** und **B** in Ruhe versetzt werden.

§. 230. Eine Kugel bewege sich nach der Richtung **AC** (Fig. 142) mit der Geschwindigkeit C und stoße einen unbeweglichen Körper, der die Ebene **KL** darbietet, in **B** zwar central, aber schief; man soll die Geschwindigkeit und Richtung der Kugel nach dem Stoße angeben.

Man ziehe den Halbmesser **CB**, dann **Ba** parallel zu **CA**, so ist ersterer senkrecht auf **LK**, daher $aBC = ACf = \varphi$ der Winkel, unter welchem die Kugel auf **KL** schief trifft. Schneidet man ferner $CE = C$ ab, und zerlegt diese Geschwindigkeit in die auf einander senkrechten $CF = C\cos\varphi$ und $CG = C\sin\varphi$, so wird durch die Geschwindigkeit **CF** ein gerader und centraler Stoß hervorgebracht, während die zu **KL** parallele **CG** die Kugel in dieser Richtung blos abzulenken strebt.

Werden beide Körper für unvollkommen elastisch angenommen, so hat man in Formel (III) §. 228 für $C\cos\varphi$ und ein unendlich großes m

$$V = -(\alpha - 1)\, C\cos\varphi$$

für die Geschwindigkeit, womit die Kugel nach dem Stoße in der Richtung **Cf** zurückprellen würde, wenn nicht die Geschwindigkeit $CG = C\sin\varphi$ vorhanden wäre.

Wird sonach V durch **Cf** vorgestellt und das Parallelogramm **CGef** construirt, so gibt **Ce** die Richtung und zugleich die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße, wofür bei der Annahme, daß $Ce = V'$ und der Winkel $eCf = \varphi'$ ist,

$$\text{(a)} \qquad V' = \sqrt{CG^2 + V^2} = C\sqrt{\sin^2\varphi + (\alpha-1)^2\cos^2\varphi}$$

und

$$\text{(b)} \qquad \cos\varphi' = \frac{V}{V'} = \frac{(\alpha-1)\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + (\alpha-1)^2\cos^2\varphi}}$$

erhalten wird.

Man nennt die Senkrechten **fB** das Einfallsloth, den Winkel

$$ACf = aBC = \varphi$$

den Einfalls- und jenen

$$eCf = cBC = \varphi'$$

den Abprellwinkel.

Aus diesen beiden Formeln folgt:

1) Für $\alpha = 2$; $V' = C$ und $\cos\varphi' = \cos\varphi$, also $\varphi' = \varphi$; d. h. bei vollkommener Elasticität beider Körper ist die Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße dieselbe, wie auch der Einfalls- dem Abprellwinkel gleich.

2) Für $\alpha < 2$ oder $\alpha - 1 < 1$ ist offenbar $V' < C$ und wegen

$$\frac{\alpha - 1}{\sqrt{\sin^2\varphi + (\alpha-1)^2\cos^2\varphi}} < 1$$

ergibt sich $\cos\varphi' < \cos\varphi$, mithin $\varphi' > \varphi$. Bei unvollkommener Elasticität ist sonach die Abprellgeschwindigkeit kleiner als die Einfallsgeschwindigkeit und umgekehrt der Abprellwinkel größer als der Einfallswinkel.

Mit Hilfe der Gl. (a) und (b) läßt sich der Elasticitätsgrad für verschiedene Körper durch Versuche bestimmen.

Zu diesem Zwecke gebe man der Ebene KL eine Neigung φ gegen den Horizont und stütze dieselbe so fest, daß sie bei dem Auftreffen der Kugel — die man nach der Richtung AC vertical fallen läßt — nicht gebogen wird, wonach dann auch der Einfallswinkel $fCA = \varphi$ ist. Ferner stelle man nahe zu AC eine verticale Wand PQ auf, an welche die Kugel nach ihrem Abprellen von B bei B′ anstoßen muß. Diese Puncte werden sich bemerkbar machen, wenn die Ebenen KL und PQ mit Kreide oder einer sonstigen unelastischen feinen Schichte belegt sind.

Hält man an jedem der Puncte B und B′ die Ebenen KL und PQ berührende Kreisscheiben von der Größe des größten Kreises der Kugel, sodann an C ein Lineal CD horizontal, so wird man $CC = a$ und die Verticale $CG' = b$ genau messen können. Das rechtwinklige Dreieck C′GC, in welchem der Winkel $C'CG' = 90° - (\varphi + \varphi')$ ist, gibt

$$\text{(c)} \qquad \cos(\varphi + \varphi') = \frac{b}{a}$$

und die Gleichung (b) endlich

$$\text{(d)} \qquad \alpha = 1 + \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi'}.$$

Fällt C′ unter CD, so ist b negativ und der aus (c) berechnete Winkel von 180° abgezogen, gibt $\varphi + \varphi'$.

Könnte CC′ nicht als gerade Linie angesehen werden, sondern als eine vom Mittelpuncte der Kugel beschriebene Parabel Cγ, wobei die Kugel auf β trifft; so hat man für $CG' = x$, $G'\gamma = y$, $G'CC' = 90° - (\varphi + \varphi')$ als Wurfwinkel, und V' als Wurfgeschwindigkeit nach §. 216. Gl. 3.

$$y = x\operatorname{cotg}(\varphi + \varphi') - \frac{gx^2}{2V'^2\sin^2(\varphi+\varphi')}.$$

Eliminirt man hieraus mit Hilfe der Gl. (a) und (b) φ' und V'; so findet man

$$\text{(e)} \qquad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{x}{h}\left(\operatorname{cotg}\varphi - \frac{y}{x}\right)}}{\left(\operatorname{cotg}\varphi - \frac{y}{x}\right)\sin 2\varphi},$$

worin $h = \frac{C^2}{2g}$ die Fallhöhe AC vorstellt.

Auf diese Art könnte man aus Versuchen mit gleichen und verschiedenen Materien der Ebene nnd der Kugel, bei verschiedenen Fallgeschwindigkeiten der letztern und verschiedenen Neigungen der erstern, eine für manche technische Anwendung brauchbare Tafel der Elasticitätsgrade α vieler Materien berechnen, nur müßte zu jedem Resultate die Materie des gestoßenen und stoßenden Körpers (der Ebene und der Kugel), wie auch das Gewicht Q des letztern und dessen Stoßgeschwindigkeit $C\cos\varphi$ beigefügt werden, um zugleich die Stärke des Stoßes (§. 224. 5) $MC\cos\varphi$ für $M = \frac{Q}{g}$ (§. 79) zu haben, weil wahrscheinlich α mit der Stärke des Stoßes bei denselben Materien verschieden sein wird.

B. Maß der Ziehkräfte.

§. 231. Zur Auffindung des Maßes unveränderlicher Ziehkräfte können wir jede solche Kraft nach §. 198 als eine continuirliche Stoßkraft ansehen, welche jedoch in jedem unendlich kleinen Zeittheile blos unendlich kleine Geschwindigkeiten zu erzeugen vermag.

1) Sind demnach P und P' zwei unveränderliche Ziehkräfte, welche gleichen Massen in derselben unendlich kleinen Zeit τ die Geschwindigkeiten x und x' ertheilen; so ist (§. 224. 1.)

$$P : P' = x : x'.$$

Da nun in allen folgenden Zeittheilchen τ dieselbe Geschwindigkeit x durch P und x' durch P' erzeugt wird, so ist, wenn man $n\tau = 1$ annimmt, $nx = G$ die Beschleunigung der Kraft P und $nx' = G'$ die Beschleunigung der Kraft P', mithin wegen

$$P : P' = nx : nx'$$

auch

$$P : P' = G : G'.$$

2) Erzeugen die Kräfte P und P' bei den Massen M und M' in derselben Zeit gleiche Geschwindigkeiten; so läßt sich wie in §. 224. 2)

$$P : P' = M : M'$$

nachweisen.

3) Ist P'' eine dritte Kraft, welche der Masse M die Beschleunigung G' ertheilt, so ist vermöge 1) und 2)

$$P : P'' = G : G', \text{ und}$$
$$P'' : P' = M : M', \text{ also}$$
$$P : P' = MG : M'G';$$

d. h. unveränderliche (absolute) Ziehkräfte verhalten sich wie die Producte der Massen in die ihnen beigebrachten Beschleunigungen.

4) Ist $P'=1$ für $M'=1$ und $G'=1$, so ergibt sich

$$P = MG,$$

wonach das Maß einer absoluten Kraft das Product der Masse in die derselben ertheilte Beschleunigung ist.

5) Für $M=1$ ist $P=G$ oder die Kraft, welche auf die Einheit der Masse wirkt, hat die Beschleunigung selbst zum Maße.

§. 232. Nach 3) (vorig. §.) ist auch

$$G:G' = \frac{P}{M} : \frac{P'}{M'}.$$

Die Quotienten $\frac{P}{M}$ und $\frac{P'}{M'}$ nennt man die beschleunigenden Kräfte zum Unterschiede der bewegenden Kräfte P und P' und wie man sieht, verhalten sich die Beschleunigungen wie die beschleunigenden Kräfte.

Sind Q und Q' respective die Gewichte der Massen M und M'; so ist nach §. 13

$$M:M' = Q:Q',$$

mithin auch

$$G:G' = \frac{P}{Q} : \frac{P'}{Q'}.$$

1) Nach dieser Proportion kann man die Beschleunigung G einer Kraft P finden, welche auf eine Masse vom Gewichte Q wirkt, wenn die Beschleunigung G' einer Kraft P' für eine andere Masse vom Gewichte Q' bekannt ist. So findet man, wenn $G'=g=31$ Fuß die Beschleunigung der Schwere vorstellt, wo also $P'=Q'$ ist,

$$G = g\,\frac{P}{Q}.$$

Diese Gleichung drückt den wichtigen Satz aus: die Beschleunigung einer absoluten Kraft ist das Product der Beschleunigung der Schwere in den Quotienten, den diese Kraft durch das Gewicht der bewegten Masse dividirt gibt; wobei Kraft und Masse sich auf einerlei Gewichtseinheit beziehen.

2) Setzt man in 4) (vorig. §.) g für G, so kann P nur das Gewicht Q der Masse M sein, und man erhält

$$M = \frac{Q}{g} = \frac{Q}{31};$$

d. h. die Masse eines Körpers ist das Verhältniß ihres Gewichtes zur Beschleunigung der Schwere.

Ferner ist $Q = g$ für $M = 1$, oder das Gewicht der Masseneinheit wiegt 31 jener Gewichtseinheit (Wiener Pfund), die wir hier angenommen haben.

Damit kommt die Annahme in §. 79 überein.

3) Endlich gibt 4) vorig. §. noch

$$G = \frac{P}{M};$$

d. h. die Beschleunigung einer absoluten Kraft ist das Verhältniß der Kraft zur bewegten Masse.

§. 233. Setzt man in den in §. 211 und 212 aufgestellten Formeln für die gleichförmig veränderliche Bewegung materieller Puncte den in 1) des vorigen §. gefundenen Werth der Beschleunigung; so sind dann diese Formeln für die Bewegung wirklicher Körper eingerichtet. Man hat nemlich

$$(1) \qquad v = c' \pm g \frac{P}{Q} \cdot t,$$

$$(2) \qquad s = ct \pm g \frac{P}{Q} \cdot \frac{t^2}{2},$$

$$(3) \qquad v^2 = c^2 \pm 2g \frac{P}{Q} \cdot s$$

oder wenn keine anfängliche Geschwindigkeit c vorhanden ist,

$$(1') \qquad v = g \frac{P}{Q} \cdot t,$$

$$(2') \qquad s = g \frac{P}{Q} \cdot \frac{t^2}{2},$$

$$(3') \qquad v^2 = 2g \frac{P}{Q} \cdot s.$$

Zur Erläuterung des hier Vorgetragenen sollen einige Beispiele folgen.

I. Auf einer horizontalen Ebene **AB** (**Fig. 143**) sei ein Körper **D** vom Gewichte q durch eine Schnur mit einem andern frei herabhängenden **E** vom Gewichte p verbunden; man soll die gemeinschaftliche Bewegung beider Körper bestimmen.

Läßt man das Gewicht der Schnur und das der Rolle außer Acht, berücksichtigt aber die Reibung des Körpers **D** auf **AB**, welche für den Reibungscoefficienten k bekanntlich den Werth kq hat und dem Gewichte p entgegenwirkt; so ist die bewegende Kraft $P = p - kq$ und das Gewicht der ganzen zu bewegenden Masse $Q = p + q$, sofort nach §. 232. 1)

$$G = g \cdot \frac{P}{Q} = \frac{31(p - kq)}{p + q}.$$

Für $p = 20$, $q = 100$, $k = \frac{1}{10}$ ist

$G = 2{\cdot}583$; also $v = Gt = 2{\cdot}583t$, $s = G\frac{t^2}{2} = 1{\cdot}292t^2$,

$v^2 = 2Gs = 5{\cdot}167 \cdot s$, u. s. w.

II. Ein Körper vom Gewichte Q erhält auf einer horizontalen Ebene durch eine horizontale Stoßkraft die Geschwindigkeit c; es fragt sich, mit Rücksicht der Reibung des Körpers auf der Ebene, um seine fernere Bewegung.

Für den Reibungscoefficienten k ist die Reibung, welche als eine unveränderliche Kraft die Bewegung verzögert, $P = kQ$, also die Beschleunigung derselben $G = g\frac{P}{Q} = gk$.

Ist daher v in der Zeit t die Geschwindigkeit des Körpers und s sein zurückgelegter Weg; so wird

$$v = c - kgt, \quad s = ct - gk \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Für $v = 0$ oder $t = \frac{c}{kg}$ kommt der Körper in Ruhe und hat bis dahin den Weg $s = \frac{c^2}{2gk}$ auf der Ebene durchlaufen.

III. Wenn (**Fig. 144**) eine Schnur ohne Ende, deren Gewicht p ist, über die in einer verticalen Lage befestigte Rolle **R** gezogen wird, und an beiden Seiten derselben gleich große Gewichte angebracht werden, so halten diese einander Gleichgewicht. Sind aber die beiden Gewichte

nicht einander gleich, so muß, wenn man alle Bewegungshindernisse beseitigt, das größere Gewicht sinken, folglich das andere in die Höhe gezogen werden. Ist P das größere und Q das kleinere Gewicht, so ist $P-Q$ die bewegende Kraft oder Überwucht, $P+Q+p$ das Gewicht der bewegten Masse, also

$$G = \frac{g(P-Q)}{P+Q+p}.$$

Man hat sonach

$$v = \frac{g(P-Q)}{P+Q+p} \cdot t \quad \text{und}$$

$$s = \frac{g(P-Q)}{P+Q+p} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Läßt man die Schnur unter P und Q hinweg und nimmt für den obern Theil derselben einen Seidenfaden, dessen Gewicht p als unbedeutend hinweggelassen werden kann, so hat man

$$v = \frac{g(P-Q)}{P+Q} \cdot t,$$

$$s = \frac{g(P-Q)}{P+Q} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Auf dieser Einrichtung beruht wesentlich die Atwood'sche Fallmaschine, durch welche man alle Gesetze des freien Falles im verjüngten Maßstabe darzustellen, sofort auch aus dem beobachteten Wege s in einer gewissen Zeit t den Werth von g zu bestimmen vermag.

IV. Zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit einer Geschützkugel bedient man sich verschiedener Mittel, unter andern auch, daß man das Geschütz möglichst nahe vor einem gleichförmig dichten Erdhaufen aufstellt, die Kugel darauf schießt und aus der Eindringungstiefe derselben ihre Anfangsgeschwindigkeit berechnet. Der Vorgang hiebei ist folgender.

Es sei abcd (Fig. 145) der Erdhaufen, auf welchen die Kugel mit der Geschwindigkeit c trifft und in der Richtung AN eindringt. Die Eindringungsbewegung wird eine verzögerte sein, weil das Erdreich als widerstrebende Kraft sich fortwährend der Kugel entgegensetzt. Denn da das Erdreich vor der Kugel weder leicht noch schnell genug seitwärts auszuweichen vermag, sofort immer mehr verdichtet werden muß; so setzt es der Kugel eine, mit der Eindringungstiefe wachsende, widerstehende, also veränderliche Kraft entgegen.

Gewöhnlich wird angenommen, daß diese Kraft nach Potenzen der Eindringungstiefen mit constantem Exponenten wächst, welchen man durch Versuche bestimmt. Man läßt nemlich die Kugel durch Gewichte p und p' in dasselbe Erdreich hineindrücken, mißt die Tiefen a und a' bis zum vordersten Puncte der Kugel und berechnet aus $p:p'=a^r:a'^r$ den Exponenten r. Ist demnach die abgeschossene Kugel bis B auf die Tiefe $AB=s$ eingedrungen, so ist daselbst die widerstehende Kraft P wegen $P:p=s^r:a^r$

$$P=p.\frac{s^r}{a^r}.$$

Da die Kraft P während der Bewegung in einem unendlich kleinen Raume $BB'=s'$ für unveränderlich und sonach die Bewegung daselbst als gleichförmig verzögert angesehen werden kann; so hat man für dieselbe, wenn Q das Gewicht der Kugel, v ihre Geschwindigkeit in B und v' jene in B' vorstellt,

$$G=g.\frac{P}{Q}=\frac{gps^r}{Qa^r}, \text{ sofort}$$

$$v^2-v'^2=\frac{2gp}{Qa^r}.s^r.s'=A.s^r.s'.$$

Denkt man sich nun $AB=s$ in unendlich kleine gleiche Theile $Aa_1=a_1a_2=a_2a_3=\ldots=a_{n-1}B=s'=\frac{s}{n}$ getheilt und bezeichnet die Geschwindigkeiten in a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1} bezüglich durch v_1, v_2, v_3, ... v_{n-1}; so hat man in der so eben aufgestellten Gleichung blos für v, v', s nach und nach c, v_1, s'; v_1, v_2, $2s'$; v_2, v_3, $3s'$; ... v_{n-1}, v, $(n-1)s'$ zu setzen, um für die Bewegung in

Aa_1, a_1a_2, a_2a_3, ... $a_{n-1}B$ die Gleichungen

$$c^2-v_1^2=As'^{r+1},\quad v_1^2-v_2^2=A.2^r.s'^{r+1},$$

$$v_2^2-v_3^2=A.3^r.s'^{r+1};\ \ldots v_{n-1}^2-v^2=A(n-1)^r s'^{r+1}$$

zu erhalten.

Addirt man diese Gleichungen und berücksichtigt, daß für ein unendlich großes n

$$1^r+2^r+3_r+\ldots+(n-1)^r=\frac{n^{r+1}}{r+1}$$

ist, so gibt die Summe

$$c^2-v^2=A.\frac{(ns')^{r+1}}{r+1}=\frac{2gp}{Qa^r}.\frac{(ns')^{r+1}}{r+1}$$

oder wegen $ns' = s$

$$(1) \quad c^2 - v^2 = \frac{2gp}{Qa^r} \cdot \frac{s^{r+1}}{r+1}.$$

1) Ist das Eindringen der Kugel in N beendigt, so ist $v = 0$, also für $AN = b$

$$(2) \qquad c^2 = \frac{2gp}{Qa^r} \cdot \frac{b^{r+1}}{r+1}.$$

2) Ist d der Durchmesser und q das specifische Gewicht der Kugel, so ist $Q = \frac{1}{6}d^3\pi.q$; ferner kann man, mit Berücksichtigung, daß die Gewichte, durch welche verschiedene Kugeln in dasselbe Erdreich auf eine gleiche Tiefe hineingedrückt werden, mit den größten Kreisflächen der Kugeln zunehmen müssen, den Widerstand p gegen eine Kugel in der Tiefe a einem Cylinder von constanter Höhe f gleich setzen, dessen Durchmesser und specifisches Gewicht mit jenem der Kugel übereinkommt, so daß also $p = \frac{1}{4}d^2\pi.fq$ ist *).

Substituirt man daher für Q und p diese Werthe in (2), so ist

$$(3) \qquad c^2 = \frac{3gf}{(r+1)da^r} b^{r+1},$$

woraus die Anfangsgeschwindigkeit c berechnet werden kann.

Für eine andere Kugel von demselben specifischen Gewichte, deren Durchmesser d', Anfangsgeschwindigkeit c' und Eindringungstiefe b' ist, hat man eben so

$$c'^2 = \frac{3gf}{(r+1)d'a^r} \cdot b'^{r+1},$$

folglich

$$(4) \qquad b^{r+1} : b'^{r+1} = dc^2 : d'c'^2.$$

---

*) Soll diese Voraussetzung annehmbar sein, so muß für mehre Kugeln, deren Durchmesser d, d', d'', ... sind, und welche durch die Gewichte p, p', p'', ... auf dieselbe Tiefe a in die Erde eingedrückt werden, nahe genug

$$f = \frac{p}{\frac{1}{4}d^2\pi q} = \frac{p'}{\frac{1}{4}d'^2\pi q} = \frac{p''}{\frac{1}{4}d''^2\pi q} = \ldots \text{ stattfinden.}$$

Fünfter Abschnitt.

Die Bewegung auf vorgeschriebenem Wege, das einfache Pendel und die gleichförmige Kreisbewegung.

I. Die Bewegung auf vorgeschriebenem Wege.

§. 234. Ein Körper vom Gewichte Q befinde sich auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel φ und werde durch eine zur Länge derselben parallele Kraft p auf- oder abwärts gezogen; es soll diese Bewegung bestimmt werden.

Nach §. 131 ist $Q \sin\varphi$ das relative Gewicht des Körpers und $Q \cos\varphi$ dessen senkrechter Druck auf die schiefe Ebene, sofort $kQ\cos\varphi$ die Reibung für den Reibungs-Coefficienten k.

Zieht die Kraft p aufwärts, so wirkt ihr sowohl das relative Gewicht als auch die Reibung entgegen, während bei dem Zuge der Kraft abwärts ihr die Reibung allein entgegen, das relative Gewicht aber zum Vortheile wirkt.

Die bewegende Kraft ist sonach $P = p \mp Q\sin\varphi - kQ\cos\varphi$, die Beschleunigung derselben $G = \frac{gP}{Q} = g\left(\frac{p}{Q} \mp \sin\varphi - k\cos\varphi\right)$, somit in der Dauerzeit t für die Geschwindigkeit v und den zurückgelegten Weg s

$$(1)\quad \begin{cases} v = gt\ \left(\frac{p}{Q} \mp \sin\varphi - k\cos\varphi\right), \\ s = \frac{gt^2}{2}\ \left(\frac{p}{Q} \mp \sin\varphi - k\cos\varphi\right), \\ v^2 = 2gs\ \left(\frac{p}{Q} \mp \sin\varphi - k\cos\varphi\right); \end{cases}$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem p auf- oder abwärts zieht.

Soll der Körper sich blos durch sein relatives Gewicht längs der schiefen Ebene herabbewegen, so ist $p=0$ und für das untere Zeichen

$$(2)\quad \begin{cases} v = gt\ (\sin\varphi - k\cos\varphi), \\ s = \frac{gt^2}{2}(\sin\varphi - k\cos\varphi), \\ v^2 = 2gs(\sin\varphi - k\cos\varphi). \end{cases}$$

Wird bei dieser Bewegung in irgend einer Zeit t der zurückgelegte Weg s gemessen, so erhält man die Beschleunigung der Schwere

$$g = \frac{2s}{t^2(\sin\varphi - k\cos\varphi)}.$$

Wäre jedoch der Reibungs-Coefficient k nicht bekannt, so wird man für noch einen Winkel φ' der schiefen Ebene aus beobachtetem s' und t'

$$g = \frac{2s'}{t'^2(\sin\varphi' - k\cos\varphi')}$$

haben, und aus der Vergleichung dieser beiden Ausdrücke zuerst k, dann aus einem derselben g berechnen.

§. 235. Führt man in den Formeln (2) nach Fig. 76 die Höhe $BC=a$, Grundlinie $AB=b$ und die Länge $AC=c$ der schiefen Ebene ein, indem man $\sin\varphi = \frac{a}{c}$, $\cos\varphi = \frac{b}{c}$ setzt; so hat man

$$(3)\quad \begin{cases} v = gt\ \frac{a-kb}{c}, \\ s = \frac{gt^2}{2}\,\frac{a-kb}{c}, \\ v^2 = 2gs\,\frac{a-kb}{c}. \end{cases}$$

Hieraus erhält man ohne Reibung oder für $k=0$

$$(\mathrm{I})\quad v = gt.\frac{a}{c},$$

$$(\mathrm{II})\quad s = \frac{gt^2}{2}\cdot\frac{a}{c},$$

$$(\mathrm{III})\quad v^2 = 2gs.\frac{a}{c}.$$

Diese letztern Formeln bieten folgende Bemerkungen dar.

1) Die Geschwindigkeit des Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich zu jener, welche der Körper durch den freien Fall in eben derselben Zeit erlangen würde, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

2) Nach Formel (II) verhält sich auch der Weg auf der schiefen Ebene zu dem, welchen der Körper in derselben Zeit durch den freien Fall zurücklegen würde, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

3) Wenn man in Formel (III) $s = c$ setzt; so sieht man, daß die auf der schiefen Ebene erlangte Geschwindigkeit eben so groß ist, als wenn der Körper durch die Höhe der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre.

4) Ist T die Zeit, welche der Körper braucht, um auf der schiefen Ebene den Weg $s = c$ zurückzulegen, so ist nach Formel (II) $T = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{2}ag}}$; ist aber für den freien Fall t die Zeit, während welcher der Körper von der Höhe a herabfällt; so wird

$$t = \sqrt{\frac{a}{\frac{1}{2}g}}; \text{ also } T : t = \frac{c}{\sqrt{ag}} : \sqrt{\frac{a}{g}} = c : a;$$

d. h. die Zeit des schiefen Falles verhält sich zu der des verticalen von derselben Höhe wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

5) Bei verschiedenen schiefen Ebenen von einerlei Höhe verhalten sich für $s = c$ die Dauerzeiten der Bewegungen wie die Längen der schiefen Ebenen. Dieser Satz fließt aus Formel (II).

6) Ist (Fig. 146) $BD = s$ der in der Zeit t zurückgelegte Weg des Körpers auf der schiefen Ebene BA vom Neigungswinkel φ; so wird $t^2 = \frac{2s}{g \sin \varphi}$ und wenn x den in derselben Zeit durch den freien Fall zurückgelegten Weg bezeichnet,

$$t^2 = \frac{2x}{g}; \quad \text{folglich } \frac{2s}{g \sin \varphi} = \frac{2x}{g} \text{ oder } x = \frac{s}{\sin \varphi}.$$

Errichtet man daher in D eine Senkrechte DC, welche die Verticale BC in C durchschneidet; so ist $BCD = \varphi$, also

$$BC = \frac{BD}{\sin \varphi} = x.$$

Ist T die Zeit, in welcher der Körper auf der schiefen Ebene DC den Weg DC zurücklegt; so wird, weil $DCA = 90° - \varphi$ ist,

$$T^2 = \frac{2CD}{g \cdot \cos\varphi}.$$

Es ist aber $\frac{CD}{\cos\varphi} = BC$; folglich

$$T^2 = \frac{2BC}{g} = t^2, \text{ nemlich } T = t.$$

Die Wege BC, BD, DC, welche in gleichen Zeiten beschrieben werden, pflegt man gleichdauernde Wege zu nennen.

Ist daher BC der verticale Durchmesser eines Kreises, und zieht man aus den Endpuncten B und C was immer für Sehnen; so muß, wenn diese die Durchschnitte von schiefen Ebenen vorstellen, ein Körper jede derselben in gleichen Zeiten durchlaufen; d. h. alle diese Sehnen werden gleichdauernde Wege sein und die Zeit, um sie zurückzulegen, ist derjenigen gleich, in welcher der Körper durch den freien Fall den verticalen Durchmesser BC beschreiben würde.

§. 236. Wenn ein materieller Punct oder Körper auf einer Curve, (Fig. 147) die in einer verticalen Ebene liegt, von A gegen B durch seine Schwere bewegt wird; so ist seine Geschwindigkeit in irgend einem Puncte D nach der Richtung der Tangente dieselbe, welche er bei dem freien Falle von A nach C im letztern Puncte erlangen würde.

Denn denkt man sich die Curve AD in unendlich kleine Theile

$$Aa_1,\ a_1a_2,\ a_2a_3,\ \ldots\ a_{n-1}D$$

getheilt, so kann jeder solche Theil als eine gerade Linie oder schiefe Ebene angesehen werden, zu welchen, wenn die horizontalen Geraden

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ \ldots\ CD$$

gedacht werden,

$$Ab_1,\ b_1b_2,\ b_2b_3,\ \ldots\ b_{n-1}C$$

die Höhen sind.

Vermöge 3) vorigen §. sind aber die bei der Bewegung von A bis a_1, von a_1 bis a_2, von a_2 bis a_3, ... von a_{n-1} bis D erzeugten Geschwindigkeiten respective denen gleich, welche von A bis b_1, von b_1 bis b_2, von b_2 bis b_3,... von b_{n-1} bis C durch den freien Fall erzeugt werden, daher auch die Summen der beiden Reihen von Geschwindigkeiten einander gleich sind.

Nun ist die Summe der letzteren Geschwindigkeiten die Fallgeschwindigkeit in C, oder $= \sqrt{2g.AC}$, und da erstere Geschwindigkeiten nach den Längen der schiefen Ebenen oder nach den Tangenten der Curve gerichtet sind, daher bei der Bewegung in der Curve nichts von ihren Größen verlieren (§. 105); so ist ihre Summe, gleich der Geschwindigkeit des materiellen Punctes nach der Richtung der Tangente in D, eben so groß als jene Fallgeschwindigkeit, nemlich $= \sqrt{2g.AC}$.

Eben so ist mit Beziehung auf §. 212 leicht zu begreifen, daß ein Körper, welcher sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g.AC}$ nach der Richtung der Tangente in D aufwärts bewegt, dabei in derselben verzögerten Bewegung fortschreitet, als seine frühere von A bis D beschleunigt war, daher in derselben Zeit nach A gelangen muß, als er von da bis D gebraucht hatte.

III. Das einfache Pendel.

§. 237. Ein Faden CD (Fig. 148) ohne Schwere, der mit dem einen Ende an einem festen Puncte C gehalten wird und dessen anderes Ende D einen materiellen Punct festhält, wird im Zustande der Ruhe nach der Verticalen CD ausgespannt sein und diese Richtung immer einzunehmen suchen, wenn derselbe in eine andere Lage CA gebracht wird. Denn in dieser Lage zerlegt sich das Gewicht Q des materiellen Punctes, welches durch AQ vorgestellt sein mag, in zwei auf einander senkrechte Kräfte Q_1 und Q_2, wovon letztere in der Richtung des Fadens denselben stets spannt, während erstere denselben in die Lage CD herabführt, wobei der materielle Punct den Kreisbogen AD beschreibt und zwar so, als ob er außer Verbindung mit dem Faden in dieser krummen Linie herabfiele; daher seine Geschwindigkeit in jedem Puncte nach der Richtung der Tangente der zugehörigen Fallhöhe entspricht (vorig. §.).

Setzt man den Winkel $DCA = \alpha$, so hat man die bewegende Kraft nach der Richtung der Tangente $Q_1 = Q \sin \alpha$, welche bei der beschleunigten Bewegung abwärts wegen Abnahme des Winkels α abnimmt, und sonach in D Null wird. Nach dem Anlangen des materiellen Punctes in D wird er mit der daselbst erhaltenen größten Geschwindigkeit nach der horizontalen Tangente DF in dem Kreisbogen DB mit verzögerter Bewegung bis B auf gleiche Höhe mit A aufwärts steigen und von da wieder bis A zurückkehren, u. s. w.

Diese Vorrichtung für die Hin- und Herbewegung eines materiellen

Punctes an einem unschweren Faden (welches auch ein Seidenfaden mit einer kleinen Kugel sein kann) nennt man ein *einfaches Pendel*, einen ganzen Hin- oder Hergang **ADB** desselben eine *Schwingung* und seine Abweichung von der Verticalen **CD**, nemlich den Winkel **DCA** oder **DCB** den *Elongations-* oder *Schwingungs-Winkel*. Ist ein System von Körpern zum Schwingen eingerichtet, so heißt es ein *zusammengesetztes* oder *physisches* Pendel, das aber, wie wir weiter unten sehen werden, auf ein einfaches zurückgeführt werden kann.

§. 238. Da das Pendel das bequemste und zugleich genaueste Mittel zur Zeitmessung ist und daher, wie oben erwähnt wurde, zur Regulirung des gleichförmigen Ganges der Uhren dient; so soll hier die Zeit einer Schwingung des einfachen Pendels bestimmt werden.

Dazu betrachten wir die Schwingung von **A** bis **M**, theilen den Bogen **AM** in unendlich kleine Theile und bemerken den Theil **M′M**. Da derselbe mit einer von **M′** bis **M** zunehmenden Geschwindigkeit während einer Zeit τ durchlaufen wird; so gibt es in einem Zwischenpuncte **N** eine Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g.Eq}$ (§. 236), mit welcher der materielle Punct den Raum **M′M** in derselben Zeit τ gleichförmig durchläuft, so daß $v\tau = M'M$, also

$$\tau = \frac{M'M}{\sqrt{2g.Eq}}$$

gesetzt werden kann.

Beschreibt man nun über **ED** als Durchmesser aus **c** den Halbkreis **Em′D**, zieht die Horizontalen **M′m′**, **Nn**, **Mm**, dann die Verticalen **MR** und **mr**, ferner zu **N** den Halbmesser **CN = CD = CA**, und zu **n** den Halbmesser $cn = \frac{ED}{2}$; so hat man in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken **M′MR** und **NCq**, deren Seiten wechselweise auf einander senkrecht sind,

$$M'M : MR = NC : Nq \text{ oder } M'M = \frac{MR.CN}{Nq}.$$

Ferner hat man

$$qn = \sqrt{Dq.qE}, \text{ also } \frac{1}{\sqrt{Eq}} = \frac{\sqrt{Dq}}{qn}$$

und in den ähnlichen rechtwinklichen Dreiecken **cqn** und **mrm′**

$$cn : qn = \text{arc } mm' : mr \text{ oder wegen } mr = MR$$

$$MR = \frac{qn.\text{arc } mm'}{cn}.$$

Läßt man das Pendel in nicht größern Elongationswinkeln DCA als 15 Graden schwingen, so ist ohne merklichen Fehler AE = chord AD, also auch Nq = chord ND, somit wegen $ND = \sqrt{2CN.Dq}$ auch

$$\sqrt{2CN.Dq} = Nq.$$

Multiplicirt man die hier aufgestellten fünf Gleichungen; so hat man

$$\tau = \frac{1}{2cn}\sqrt{\frac{CN}{g}}.\,\text{arc}\,mm'.$$

Da in diesem Ausdrucke die Zeit der Bewegung des materiellen Punctes in dem Elemente MM' dem Producte der constanten Größe $\frac{1}{2cn}\sqrt{\frac{CN}{g}}$ in das zugehörige Bogenelement m'm des Kreises Em'D gleich ist; so muß die Zeit der Bewegung durch alle Elemente von A bis M dem Producte jener Constanten in die Summe der Kreiselemente von E bis m gleich sein. Ist daher t' diese Zeit der Schwingung von A bis M und setzt man CN = CD = CA = l; so ist

$$t' = \frac{1}{2cn}\sqrt{\frac{l}{g}}.\,\text{arc}\,Em'm.$$

Hieraus erhält man für die Zeit t der Schwingung ADB, wenn man für die halbe Schwingung von A bis D

$\frac{t}{2}$ statt t', arc Em'D = cn.π statt arc Em'm setzt,

$$(1) \qquad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wo π das Kreisverhältniß, g die Beschleunigung der Schwere und l die Länge des Pendels bedeutet.

1) Für ein anderes in kleinen Bogen schwingendes Pendel, dessen Länge L und Schwingungszeit T ist, hat man eben so

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

folglich durch Vergleich mit (1)

$$l : L = t^2 : T^2;$$

d. h. die Pendellängen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten.

2) Macht in einer gewissen Zeit das erstere Pendel n und das letztere in derselben Zeit N Schwingungen; so ist

$$nt = NT \text{ oder } n^2 : N^2 = T^2 : t^2,$$

daher vermöge der vorigen Proportion

$$n^2 : N^2 = L : l;$$

d. h. die Quadrate der gleichzeitigen Anzahl Schwingungen zweier Pendel verhalten sich wie umgekehrt ihre Längen.

Dadurch läßt sich aus der bekannten Länge eines Pendels und aus der Anzahl seiner Schwingungen in einer gewissen Zeit die Länge eines andern Pendels, dessen Anzahl Schwingungen in derselben Zeit beobachtet worden ist, bestimmen.

§. 239. Das Pendel, welches in jeder Secunde eine Schwingung macht, nennt man Secundenpendel. Die Länge desselben ergibt sich aus Formel (1) (vorig. §.) für $t = 1$

$$(2) \qquad l = \frac{g}{\pi^2}.$$

Da g mit der geographischen Breite zunimmt (§. 214), so muß sich eben so l ändern. Für Wien, wo $g = 31{\cdot}03$ ist, hat man aus Formel (2) $l = 3{\cdot}144$ Fuß *).

Übrigens läßt sich die Länge l des Secundenpendels unabhängig von g finden, wenn man ein anderes von der Länge L zu Hilfe nimmt, welches in n Secunden N Schwingungen macht; denn man hat dann nach 2) vorigen §.

$$(3) \qquad l = \frac{N^2}{n^2} \cdot L.$$

III. Die gleichförmige Kreisbewegung.

§. 240. Wenn ein Körper sich nach einer Richtung AB (Fig. 149) gleichförmig bewegt, so wird er diese Bahn, ohne Einwirkung einer, in anderer Richtung wirkenden Kraft nicht verlassen können. Soll daher der Körper von einem Puncte A an in einem Kreise AEF gleichförmig umlaufen, wo er in jedem Augenblicke der Tangente des Kreises zu folgen, das Bestreben hat und also davon immer abgelenkt werden muß, um im Kreise zu bleiben; so kann diese stets gleiche Ablenkung nur entweder durch eine continuirliche Kraft geschehen, oder der Körper muß durch einen Fa-

*) Für die geographische Breite φ ist $l = 3{\cdot}145\,(1 - 0{\cdot}002837 \cos 2\varphi)$ Wiener Fuß.

den, eine Stange oder durch eine feste, nach dem Kreisumfange gebildete Rinne in gleichem Abstand vom Mittelpuncte C erhalten werden, wo aber dann diese Verbindungsmittel nach auswärts mit jener Kraft gespannt oder gedrückt werden. Würde sonach ein solches Verbindungsmittel plötzlich beseitigt, so würde dieses das Abfliegen des Körpers vom Kreisumfange nach der Tangente daselbst zur Folge haben. Man nennt deshalb auch diese, bei der gleichförmigen Kreisbewegung erzeugte Kraft, Flieh- oder Centrifugalkraft, die wir nun bestimmen wollen.

Es sei Q das Gewicht des Körpers, der mit seinem Schwerpuncte auf dem Umfange des Kreises vom Halbmesser $CA = r$ mit der Geschwindigkeit c gleichförmig umläuft, indem er auf diesem Umfange, durch eine feste Verbindung mit dem Mittelpuncte C, zu bleiben gezwungen wird. Könnte der Körper in irgend einem Puncte A der Richtung der Tangente AB folgen, so würde er in einer unendlich kleinen Zeit τ den Weg $AD = c\tau$ durchlaufen. Allein durch seine feste Verbindung mit C muß er während dieser Zeit den Bogen AE durchlaufen, also um DE von der Tangente abgelenkt sein und da dieselbe Ablenkung von der Tangente in jedem folgenden Augenblicke stattfinden muß; so muß das Verbindungsmittel, welches den Körper im Kreise erhält, durch eine constante Kraft P gespannt werden, die denselben im freien Zustande in der Zeit τ durch einen Weg ED zu bewegen vermöchte.

Man hat demnach (§. 233)

$$DE = g \frac{P}{Q} \cdot \frac{\tau^2}{2}.$$

Vermöge der Eigenschaft des Kreises ist aber

$$AD^2 = DE.DF$$

oder, weil EF von DF unendlich wenig verschieden ist, auch

$$AD^2 = DE.EF$$

und daraus wegen $AD = c\tau$, $EF = 2r$

$$DE = \frac{c^2\tau^2}{2r}.$$

Durch den Vergleich beider Ausdrücke für DE erhält man endlich

$$(1) \qquad P = \frac{c^2 Q}{gr}$$

und daraus, wenn die der Geschwindigkeit c zugehörige Fallhöhe $\frac{c^2}{2g} = h$ gesetzt wird, (§ 214)

$$P : Q = 2h : r;$$

d. h. die Fliehkraft verhält sich zum Gewichte des im Kreise umlaufenden Körpers wie die seiner Geschwindigkeit zugehörige doppelte Fallhöhe zum Halbmesser des Kreises.

Ist M die Masse des Körpers, so ist wegen $\frac{Q}{g} = M$ (§. 232)

$$(2) \qquad P = \frac{c^2}{r} M.$$

Bei gleichförmiger Rotation bringt man gewöhnlich statt c die Geschwindigkeit für den Halbmesser 1 in Rechnung und nennt sie die Winkelgeschwindigkeit. Bezeichnet man dieselbe mit ω, so ist wegen

$\omega : c = 1 : r$ offenbar $c = \omega r$, sofort

$$(3) \qquad P = \omega^2 . rM.$$

Ist aber t die Zeit eines ganzen Kreisumlaufes, so wird $2r\pi = ct$, oder $c = \frac{2r\pi}{t}$, mithin

$$(4) \qquad P = \frac{4r\pi^2}{t^2} \cdot \frac{Q}{g} = \frac{4r\pi^2}{t^2} \cdot M.$$

Die Formeln (3) und (4) geben zu erkennen, daß die Fliehkraft desto größer ist, je größern Abstand der Schwerpunct der umlaufenden Masse von der Drehaxe hat und noch mehr, mit je größerer Winkelgeschwindigkeit oder in je kürzerer Zeit das Umlaufen geschieht. Man muß daher bei großen und schnell umlaufenden Rädern die Construction und Verbindung der Theile so einrichten, daß das Losreißen und Abfliegen derselben nicht eintreten kann.

Der Umstand, daß für $r = 0$ auch $P = 0$ wird, beweist blos, daß bei einem um eine Schweraxe rotirenden Körper sich die Fliehkräfte gegenseitig aufheben, somit keinen Druck auf die Axe auszuüben vermögen. Sind demnach bei Maschinen — insbesondere bei Schwungrädern — die Massen um ihre Umlaufsaxen so vertheilt, daß diese zugleich eine Schweraxe ist; so kann bei dem Umlaufe weder ein Schwanken der Zapfen in den Pfannen, noch ein ungleichförmiges Abnützen derselben entstehen.

Durch die Fliehkraft erklärt sich die große Wirkung der Handschleuder, ferner daß ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß selbst im verticalen Kreise geschwungen nichts von der Flüssigkeit verliert, wenn diesfalls die Beschleunigung $\frac{c^2}{r}$ der Fliehkraft größer als die Beschleunigung g der Schwere ist; daß ein, an einem schnell herumgedrehten Hebel angesteck-

ter Körper sich immer mehr von der Drehaxe entfernt und daher eine Spirale beschreibt.

Endlich ist die ellipsoidische Gestalt unsers Erdkörpers sowohl als auch das Zunehmen der Beschleunigung der Schwere mit der geographischen Breite eine Folge der Fliehkraft. Für den einfachen Beweis des Letztern wollen wir die Erde als eine vollkommene Kugel pQp'E (Fig. 150) vom Halbmesser r annehmen und die Zeit ihrer täglichen Rotation um ihre Axe pp' durch t bezeichnen. Ist nun Q das Gewicht eines Körpers und g' die Beschleunigung der Schwere an den Polen der Erde, oder in jedem Puncte derselben, wenn sie nicht rotirte; so erhält man zu einem Puncte A, dessen geographische Breite φ ist, die durch die Rotation in der Richtung eines jeden Halbmessers BA erzeugte Fliehkraft nach (4)

$$P = \frac{4AB.\pi^2.Q}{g't^2} = \frac{4\pi^2.r\cos\varphi}{g't^2}.Q.$$

Wird diese Kraft durch AP vorgestellt, dann in die beiden Kräfte P' nach CA und P'' darauf senkrecht zerlegt, so wirkt nur erstere der Schwere in AC entgegen. Man erhält für dieselbe

$$P' = P\cos\varphi = \frac{4\pi^2 r\cos^2\varphi}{g't^2}.Q$$

und für ihre Beschleunigung

$$\gamma = \frac{P'g'}{Q} = \frac{4\pi^2 r\cos^2\varphi}{t^2}.$$

Wenn also an den Polen Q das Gewicht eines Körpers und g' die Beschleunigung der Schwere ist, so ist in A, der Rotation wegen, das Gewicht desselben Körpers

$$Q - P' = Q\left(1 - \frac{4\pi^2 r\cos^2\varphi}{g't^2}\right)$$

und die Beschleunigung der Schwere daselbst

$$(a) \qquad g = g' - \gamma = g' - \frac{4\pi^2 r\cos^2\varphi}{t^2}.$$

Am Äquator oder für $\varphi = 0$ wird die Beschleunigung der Schwere

$$(b) \qquad g_1 = g' - \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

am kleinsten, wo aber auch die Fliehkraft der Schwere gerade entgegenwirkt.

Subtrahirt man die Ausdrücke (a) und (b) von einander, so ist auch

$$(c) \qquad g = g_1 + \frac{4\pi^2 r}{t^2}\sin^2\varphi = g_1 + \frac{2\pi^2 r}{t^2} - \frac{2\pi^2 r}{t^2}\cos 2\varphi.$$

Letztere Gleichung hat ganz die Form wie in der Note zu §. 214. Für den Äquator-Halbmesser $r = 20172326$ W. F., $g_1 = 31{\cdot}1084$ W. F. und $t = 86164$ Sec. gibt die Formel (b) am Äquator die Beschleunigung der Schwere $g_1 = 31{\cdot}1084 - 0{\cdot}1073 = 31{\cdot}1084\ (1 - \frac{1}{289}) = 31{\cdot}0011$ etwas größer als in genannter Note, was in der Annahme der Kugelgestalt für die Erde statt der eines Ellipsoids liegt.

Da $17^2 = 289$ ist, so würde bei 17mal schnellerer Rotation der Erde die Beschleunigung, sofort auch das Gewicht der Körper im Äquator Null sein.

§. 241. Wenn ein Pendel CA (Fig. 151) nicht hin- und herschwingt, sondern die Fläche eines geraden Kegels beschreibt, dessen Spitze der Befestigungspunct C und dessen Grundfläche der horizontale Kreis ABDA ist; so nennt man es ein Centrifugalpendel.

Zur Bestimmung der Zeit t eines ganzen Umschwunges dieses Pendels sei $CA = l$ die Länge desselben und die in A befindliche kleine Kugel habe das Gewicht Q. Bei dem Umschwunge der Kugel im Kreise ABDA wird sie eine Fliehkraft

$$P = \frac{4AE\pi^2}{t^2} \cdot \frac{Q}{g}$$

annehmen (§. 240), welche, mit dem vertical wirkenden Gewichte Q der Kugel vereint, den Faden in solcher Richtung spannt, daß derselbe mit der Verticalen CE stets denselben Winkel $ACE = \alpha$ einschließt. Diese Spannung ist sonach die Resultirende von P und Q, und da C ein Punct der Resultirenden ist; so hat man nach den Lehren der Statik

$$P \,.\, CE = Q \,.\, AE \quad \text{oder}$$

$$P = Q \,.\, \frac{AE}{CE}.$$

Vergleicht man beide Werthe von P und setzt $CE = h = l \cos\alpha$, so ist

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}};$$

d. h. wenn die Länge des gewöhnlichen Pendels der Höhe des Centrifugalpendels gleich ist, so ist die Zeit eines Umschwunges des letztern das Doppelte der Schwingungszeit des erstern.

Das Centrifugalpendel wird ebenfalls zur Regulirung des Ganges der Uhren, wesentlich aber als Regulator bei Dampf- und andern Maschinen angewendet.

Sechster Abschnitt.

Von den mechanischen Arbeiten oder mechanischen Wirkungen und von den Trägheitsmomenten.

I. Die mechanischen Arbeiten oder mechanischen Wirkungen.

§. 242. Bisher sind die Kräfte immer nur nach ihren Wirkungen für einen bestimmten Augenblick gemessen worden, die Stoßkraft durch das Product der Masse in die ihr ertheilte Geschwindigkeit (§. 224), die Ziehkraft durch das Product der Masse in die Beschleunigung derselben (§. 231). Wird aber die gesammte Leistung einer Kraft betrachtet, indem sie einen Widerstand längs eines Weges in bestimmter Zeit überwindet oder vernichtet; so nennt man dies die mechanische Arbeit oder die mechanische Wirkung der Kraft.

Bei der Bewegung von Maschinen hat die Kraft meist drei mechanische Arbeiten zu verrichten. Ein Theil derselben überwindet den Widerstand, welcher das Fortschaffen einer Last auf gewissem Wege, oder das Zerschneiden, Zermalmen, Abfeilen u. s. w. von Körpern verursacht und verrichtet somit die nützliche Arbeit; ein anderer Theil der Kraft vollbringt die schädliche Arbeit, indem durch denselben die, aus der Berührung der Maschinentheile entstehenden Widerstände, wie die Reibung, Steifigkeit der Seile, u. dgl. überwunden werden; endlich der dritte Theil überwindet die Trägheit der Massen sowohl der bewegten Maschinentheile als die der Last. Nur durch den Überschuß der anzuwendenden Kraft über die beiden ersten Theile wird die Bewegung hervorgebracht,

weswegen dieser Überschuß auch die Überwucht heißt und die eigentliche bewegende Kraft ist.

Leicht sieht man, daß bei Arbeiten mittels Maschinen jeder Theil der bewegenden Kraft nicht immer dem von ihm zu überwindenden Widerstande gleich sein kann; auch beschreiben beide nicht immer gleiche Wege.

§. 243. Nachdem also bei der mechanischen Arbeit die Kraft dem Widerstande fortwährend entgegengeführt werden muß, um mit demselben in jedem Augenblicke während der Bewegung im Gleichgewichte zu sein; so kann man mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten oder nach dem Carteſischen Gesetze das Maß für die mechanische Arbeit allgemein aufstellen. Denn ist P eine constant wirkende Kraft, die einen constanten Widerstand W überwindet und beschreibt in der Zeit t erstere den Weg s, letztere den Weg w; sind ferner $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die in unendlich kleinen Zeittheilen zurückgelegten Wege der Kraft und $w_1, w_2, w_3, \ldots$ die gleichzeitigen Wege des Widerstandes; ist also $s = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$, $w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$; so hat man nach dem Carteſischen Gesetze

$$Ps_1 = Ww_1,\quad Ps_2 = Ww_2,\quad Ps_3 = Ww_3,\quad \text{u. s. f.;}\quad \text{folglich}$$

$$P(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots) = W(w_1 + w_2 + w_3 + \ldots)$$

$$\text{oder}\quad Ps = Ww.$$

Für eine andere Kraft P', die in derselben Zeit t den Weg s zurücklegt und einen Widerstand W' auf seinem Weg w' überwindet, hat man

$$P's = W'w'.$$

Da also die Kräfte P und P' unter völlig gleichen Umständen gleiche Zeit arbeiten und gleiche Wege zurücklegen, so müssen sie sich wie die von ihnen bewirkten mechanischen Arbeiten verhalten. Bezeichnet man letztere mit E und E'; so ist

$$P : P' = E : E';$$

also auch mit Rücksicht der vorigen Gleichungen

$$(1)\qquad E : E' = Ps : P's = Ww : W'w';$$

d. h. die mechanischen Arbeiten verhalten sich wie die Producte der Kräfte oder der Widerstände in die bezüglich gleichzeitig zurückgelegten Wege.

Wenn man sich vorstellt, daß für die Kraft P, während sie den Weg s zurücklegt, ein Gewicht Q mittels eines über eine feste Rolle gelegten Seiles auf die verticale Höhe h erhoben wird, also $E = Ps = Qh$ und für eine andere Kraft P', die, indem sie den Weg s beschreibt, ein Ge-

wicht Q' auf die Höhe h' erhebt, eben so $E' = P's = Q'h'$ ist, so wird

$$(2) \qquad E : E' = Qh : Q'h'.$$

Setzt man nun die mechanische Arbeit $E' = 1$, bei der ein Widerstand $W' = 1$ oder ein Gewicht $Q = 1$ in der Zeit $t = 1$ um $w' = 1$ fortgeführt, oder auf die verticale Höhe $h' = 1$ erhoben wird; so hat man

$$(3) \qquad E = Ps = Ww = Qh;$$

d. h. das Maß einer mechanischen Arbeit oder mechanischen Wirkung ist das Product der Kraft oder des Widerstandes in den bezüglich durchlaufenen Weg, oder das Product des Gewichtes in die verticale Höhe, auf welche es erhoben wird.

Man bezeichnet dieses Maß oder Product mit den bei demselben angenommenen Längen- und Gewichtseinheiten, welche wie Exponenten darüber gesetzt werden. So wird, wenn Meter und Kilogramm diese Einheiten sind, ein solches Product Meter-Kilogramm gelesen und durch

$$E = Ps^{mk} = Ww^{mk} = Qh^{mk}$$

dargestellt. Sind Fuß und Pfund diese Einheiten, so sagt man Fuß-Pfunde und setzt

$$E = Ps^{1\text{ℓ}} = Ww^{1\text{ℓ}} = Qh^{1\text{ℓ}}.$$

Z. B. für $Q = 800^k$ und $h = 4^m$ ist $E = 3200^{mk}$ eine mechanische Arbeit der Kraft, von der man sagen kann, daß entweder in der Secunde 3200 Kilogramme auf die Höhe von 1 Meter, oder 1 Kilogramm auf die Höhe von 3200 Meter gehoben wird.

Sehr häufig wird auch die mechanische Arbeit oder mechanische Wirkung durch eine Einheit, die man Pferdekraft nennt, ausgedrückt. Im Mittel nimmt man an, daß ein Pferd im horizontalen Zuge eine mechanische Arbeit von 75^{mk} oder in Wiener Maß und Gewicht von $424^{1\text{ℓ}}$ in der Secunde verrichtet; wonach also jene mechanische Arbeit $E = 3200^{mk} = 42\frac{2}{3}$ Pferdekräften ist.

Zur Erläuterung des in diesem und im vorigen §. Gesagten, wird hinsichtlich des ersten und zweiten Theiles der bewegenden Kraft folgendes Beispiel dienen.

An einem doppelarmigen Hebel wirken Kraft und Last vertical. V sei die Kraft, welche die Last Q und die Reibung überwindet, P' der Theil für die Last, P'' der für die Reibung, also $V = P' + P''$. Ferner seien A und a die Hebelsarme der Kraft und Last, α der Halbmesser des Zapfens, endlich q das Gewicht des Hebels.

Beschreibt die Last den Weg s in der Secunde und die Kraft gleichzeitig den Weg s'; so ist

$$(a) \qquad P's' = Qs$$

die nützliche Arbeit.

Für den verticalen Druck $R = V + Q + q$ ist die Reibung (§. 145) $R' = k'R$; daher, wenn die Reibung am Umfange des Zapfens den Weg s'' und P'' gleichzeitig den Weg s' beschreibt,

$$(b) \qquad P''s' = R''s'' = s''k'(V + Q + q)$$

die schädliche Arbeit.

Addirt man (a) zu (b) und bestimmt V aus dieser Summe, so hat man

$$(c) \qquad V = \frac{Q(s + s''k') + s''k'q}{s' - s''k'}$$

und die gesammte mechanische Arbeit $= Vs''$.

Berücksichtigt man, daß wegen $s : s' : s'' = a : A : \alpha$,

$$s = \frac{a}{\alpha}\, s'' \text{ und } s' = \frac{A}{\alpha}\, s''$$

ist; so erhält man aus (c) auch

$$V = \frac{Q(a + \alpha k') + \alpha k'q}{A - \alpha k'}$$

wie in (4) §. 146 für $b = 0$.

§. 244. Wenn eine constante Kraft P einer Masse M vom Gewichte $Q = gM$ in einer gewissen Zeit, wofür wir ebenfalls die Secunde annehmen, die Geschwindigkeit v beibringt und die Zurücklegung des Weges s bewirkt; so hat man bekanntlich

$$v^2 = \frac{2gPs}{Q} = \frac{2P}{M}\, s.$$

Daraus folgt die mechanische Arbeit oder mechanische Wirkung der Kraft

$$E = Ps = \frac{Mv^2}{2}.$$

Soll durch die fortwährende Einwirkung der constanten Kraft P auf die Masse M mit Hilfe einer Maschine keine beschleunigte, sondern eine gleichförmige Bewegung entstehen, oder der sogenannte Beharrungszustand der Maschine eintreten; so muß durch den vorhandenen Widerstand oder durch die Trägheit der Massen die von der Kraft erzeugte Geschwindigkeits-Vermehrung v fortwährend vernichtet werden. Man kann dann mit Bezug auf die letzte Gleichung sagen:

Die mechanische Arbeit oder mechanische Wirkung einer Kraft in der Secunde, welche der, während die-

ser Zeit erlangten und von der Trägheit der zu bewegenden Masse immer wieder vernichteten Geschwindigkeit v entspricht, ist das Product der halben Masse in das Quadrat dieser Geschwindigkeit.

Man pflegt oft auch das Product der Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit die lebendige Kraft zu nennen, indem man unter todten und lebendigen Kräften einen Unterschied macht, wenn sie Gleichgewicht oder eine Bewegung bewirken, was aber jetzt nicht mehr nöthig ist.

Durch den so eben aufgestellten Satz läßt sich angeben, ob und welcher Verlust an mechanischer Wirkung bei dem Stoße der Körper entsteht.

Wenn zwei Körper von den Massen M und m mit den Geschwindigkeiten C und c an einander stoßen, indem der erstere dem zweiten gefolgt war und ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße V und v sind; so ist die mechanische Wirkung vor dem Stoße

$$\frac{MC^2}{2}+\frac{mc^2}{2} \quad \text{und nach demselben} \quad \frac{MV^2}{2}+\frac{mv^2}{2}.$$

Soll bei dem Stoße ein Verlust an mechanischer Wirkung eingetreten sein und bezeichnen wir denselben mit W; so ist

$$W=\frac{MC^2}{2}+\frac{mc^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{mv^2}{2}$$

oder nach der Substitution für V und v aus (III) §. 228

$$\text{(I)} \quad W=\frac{\alpha(2-\alpha)Mm(C-c)^2}{2(M+m)}.$$

Haben sich die Körper vor dem Stoße gegen einander bewegt, so ist, wenn man $-c$ statt c setzt,

$$\text{(II)} \quad W=\frac{\alpha(2-\alpha)Mm(C+c)^2}{2(M+m)}.$$

Für den Fall, daß der Körper von der Masse m vor dem Stoße in Ruhe, also $c=0$ war, ist

$$\text{(III)} \quad W=\frac{\alpha(2-\alpha)MmC^2}{2(M+m)}.$$

Man sieht hieraus, daß der Verlust an mechanischer Wirkung nach (II) am größten, nach (I) am kleinsten ist. Ferner ist jener Verlust für $\alpha=1$, d. i. bei vollkommen unelastischen Körpern am größten, für $\alpha=2$ oder bei vollkommener Elasticität derselben in allen drei Fällen aber Null. Man wird daher bei Maschinen, wo zufällige Stöße eintreten können,

zu den zusammenstoßenden Körpern solche wählen, welche sich der vollkommenen Elasticität am meisten nähern.

Beispiel. Bei einer Stampfmühle sei das Gewicht eines Stößers (Stempels) $Q = 200\,\text{℔}$ und die Geschwindigkeit des eingreifenden Daumens $c = 5'$; es soll der Verlust an mechanischer Wirkung, welcher durch den Stoß des Daumens an den ruhenden Stößer entsteht, bestimmt werden.

Lösung. Da die Masse m der Radwelle und des daran befindlichen Rades zusammen gegen die Masse M des Stößers sehr groß ist; so hat man für den Verlust an mechanischer Wirkung nach Formel (III)

$$W = \frac{\alpha(2-\alpha)MC^2}{2}$$

oder wegen

$$M = \frac{Q}{g} = \frac{200}{31},\quad c = 5$$

$$W = \alpha(2-\alpha).80{\cdot}6^{1\,\text{℔}}.$$

Wird nach dem Stoße der Stößer auf die Höhe $h = \frac{3}{4}'$ gehoben, so ist die ganze anzuwendende mechanische Wirkung für einen Stößer

$$E = Qh + \alpha(2-\alpha).80{\cdot}6^{1\,\text{℔}} = [150 + \alpha(2-\alpha).80{\cdot}6]^{1\,\text{℔}}.$$

Für unelastische Körper oder $\alpha = 1$ folgt daraus

$$E = 230{\cdot}6^{1\,\text{℔}},\ \text{wovon}\ 80{\cdot}6^{1\,\text{℔}}$$

schädliche Arbeit sind.

§. 245. Die bewegenden Kräfte oder Beweger (Motoren) von Maschinen sind die Kräfte der Menschen und Thiere, der Stoß und Druck des fließenden Wassers, die Elasticität der verdichteten atmosphärischen Luft, die Ausdehnung derselben durch Wärme, die Bewegung der Luft oder der Windstrom, die Elasticität der Wasserdämpfe, der Druck gespannter Federn, angehängter Gewichte, u. s. w.

Ist P die unveränderliche Kraft, welche ein Beweger auf den Angriffspunct der Maschine ausübt, v die unveränderliche Geschwindigkeit derselben, T die tägliche Arbeitszeit, endlich E der tägliche Effect, so ist

$$E = PvT.$$

Für lebende Geschöpfe als Beweger darf T nicht über 8 bis 10 Stunden mit Einrechnung der Ruhezeiten angenommen werden, welche um so öfter und auf längere Dauer eintreten müssen, mit je größerer Anstrengung oder Geschwindigkeit gearbeitet wird.

Unter den Kräften der lebenden Geschöpfe, von denen allein hier einiges gesagt werden soll, ist die Kraft des Menschen eine der vorzüglichsten, weil sie verschieden angewendet werden kann, wie zum Tragen, Ziehen, Stoßen, Drücken und Treten. Vortheilhaft ist ihre Wirkung, wenn sie keine gezwungene, bald ermüdende Leibesstellung erfordert und der Mensch bei dem Drücken, Stoßen und Ziehen mit der Muskelkraft zugleich auch sein Gewicht verbinden kann. Es sind daher zur Bewegung von Maschinen sitzende Stellungen unvortheilhaft. — Die Thiere wirken meist durch Ziehen, manchmal auch durch ihr Gewicht und nur einige Gattungen sind zum Tragen geeignet.

Es ist kein Zweifel, daß ein lebendes Geschöpf, ohne oder bei sehr geringer Geschwindigkeit seine größte Kraft durch Druck oder Zug auszuüben vermag und im Gegentheil die größte Geschwindigkeit annehmen kann, wenn es leer, d. i. ohne ein Hinderniß überwältigen zu müssen, arbeitet. Da in diesen beiden Fällen der Effect Null wird, weil jedesmal einer seiner Factoren, nemlich die Geschwindigkeit oder die Kraft Null ist und mit dem Wachsen der Geschwindigkeit von Null an die Kraft anfangs schneller, dann aber langsamer abnimmt; so gibt es eine Kraft und eine Geschwindigkeit, mit welchen beiden der Effect sein Maximum erreicht. Nach dieser Ansicht haben einige Mathematiker die Leistungen der lebenden Beweger aufzustellen versucht, worunter die folgende Theorie von Euler die allgemeinste Anwendung fand.

Ist nemlich Q die größte Kraft, welche ein lebendes Geschöpf durch seine Muskelkraft ruhend im Gleichgewicht erhält und V die größte Geschwindigkeit, die es ohne Hinderniß anzunehmen vermag, P aber die Kraft, mit welcher es mit der Geschwindigkeit v arbeitet; so wird

$$(1) \qquad P = Q\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2, \text{ also der Effect}$$

$$(2) \qquad E = Pv = Q\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2 . v$$

angenommen.

Betrachtet man v für die Geschwindigkeit, bei welcher der Effect ein Maximum ist, so muß E für $v \pm \alpha$ einen kleinern Werth erhalten und sonach

$$\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2 . v > \left(1 - \frac{v \pm \alpha}{V}\right)^2 (v \pm \alpha),$$

oder nach gehöriger Reduction

$$0 > \pm\alpha\left(1 - \frac{v}{V}\right)\left(1 - \frac{3v}{V}\right) - \frac{\alpha^2}{V}\left(2 + \frac{3v}{V}\right) \pm \frac{\alpha^3}{V^2}$$

stattfinden.

Nun kann diese Ungleichung für sehr kleine Werthe von α offenbar nur bestehen, wenn ihr zweiter Theil stets negativ bleibt, und da dies nothwendig das Verschwinden des Coefficienten der ersten Potenz von α seines doppelten Zeichens wegen bedingt, so hat man

$$1 - \frac{3v}{V} = 0$$

und daraus die Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{3} V$$

für den größten Effect, welcher nach Formel (2)

$$E = \frac{4}{27} QV$$

ist, während sich nach Formel (1) die zugehörige Kraft

$$P = \frac{4}{9} Q$$

ergibt.

Soll z. B. eine Last auf einem längern horizontalen Wege durch Pferde fortgezogen werden und wird die größte Zugkraft des Pferdes $Q = 270$ Kilogr., seine größte Geschwindigkeit $V = 4$ Met. angenommen; so wird für den größten Effect $v = 1\frac{1}{3}^{m}$ und

$$P = \frac{4}{9} . 270^{k} = 120^{k},$$

sofort dieser Effect selbst

$$E = \frac{4}{27} QV = 160^{km}$$

in der Secunde sein. Würde man $v = 2^{m}$ annehmen, so ergäbe sich

$$P = \frac{270^{k}}{4} = 67\tfrac{1}{2}^{k}, \quad E = 135^{km}$$

viel kleiner, und überdies müßten für gleiche Anstrengung der Pferde die Anzahl derselben für gleiche Last in diesem gegen jenen Fall wie $120 : 67\frac{1}{2}$ oder $16 : 9$ angenommen werden.

Indessen sind die theoretischen Bestimmungen der Kräfte und Wirkungen lebender Beweger nicht immer sicher, selbst die Erfahrungsresultate derjenigen Kraftanstrengungen und Geschwindigkeiten für das Maximum der Effecte können bei lebenden Bewegern von einerlei Gattung nur als Mittelresultate angesehen werden, indem auf die Leistungen derselben Körperbeschaffenheit, Nahrungsart, Art der Arbeit und Gewohnheit, die-

selbe zu verrichten, ferner Klima, Jahrszeit, u. a. m. entschiedenen Einfluß, um dieselben verschieden zu machen, nehmen.

Hier folgen einige Erfahrungsresultate über die Arbeiten der Menschen und Thiere, wobei alles in Kilogrammen (k), Meter (m) und Kilogramm-Meter (km) ausgedrückt ist, zu deren Verwandlungen in W. Pfunde, W. Fuß und W. Pfund-Fuß die angegebenen Zahlen respective mit 1·786, 3·164 und 5·65 zu multipliciren sind.

A. Leistungen des Menschen.

Gewicht eines Mannes im Mittel 65 bis 70 k.
Mittlere Geschwindigkeit eines Mannes 0·75 m.

Art der Arbeit.	Geförderte Last od. mittl. Anstrengung	Geschwindigkeit in der Secunde	Arbeit	Tägliche Arbeitszeit	Tägliche Nutzarbeit
	k	m	km	Stund.	km
a. Horizontaler Transport.					
Ein Mann geht unbelastet fort, daher die Arbeit die Fortbewegung seines Körpers	65	1·5	97·5	10	3510000
Desgleichen (täglich 30346 Meter weit)	70			8	2124000
Ein Reisender trägt eine Last auf dem Rücken	40	0·75	30	7	756000
Ein Soldat	19·5	0·99	19·3	6	417000
Ein Lastträger	25	0·66	16·5	6	356400
Ein Arbeiter trägt Materialien auf seinem Rücken, und kehrt leer zurück, um andere zu holen	65	0·5	32·5	6	702000
Ein Mann führt mit einem Schubkarren Baumaterialien zu und kehrt jedesmal leer zurück	60	0·5	30	10	1080000
Desgleichen	72·8	0·66	48	6	1036800
b. Verticale oder schiefe Förderung.					
Ein Mann hebt	29·1	0·316	9·2	8	265000
Ein Arbeiter hebt Gewichte mit den Händen	20	0·17	3·4	6	73440

Art der Arbeit.	Geförderte Last od. mittl. Anstrengung	Geschwindigkeit. Arbeit in der Secunde		Tägliche Arbeitszeit	Tägliche Nutzarbeit
	k	m	km	Stund.	km
Ein Mann steigt auf einer sanften Auffahrt od. einer gewöhnlichen Treppe ohne Last in die Höhe	65	0·15	9·75	8	280800
Ein Arbeiter schafft mittels eines Schubkarrens Lasten über eine Auffahrt von $\frac{1}{12}$ Steigung hinauf und kehrt leer zurück	60	0·02	1·2	10	43200
Ein Arbeiter hebt Lasten mittels Seil und Rolle, wobei er das Seil leer niedergehen läßt	18	0·2	3·6	6	77760
Ein Arbeiter hebt mit einer Schaufel auf eine mittlere Höhe von 1·6 Meter	27	0·4	1·08	10	38880
c. Arbeiten an Maschinen.					
Ein Arbeiter zieht oder drückt im Fortschreiten nach horizontaler Richtung	12	0·6	7·2	8	207360
Ein Arbeiter zieht horizontal am Wagen mittels über Schultern und Brust laufender Zugbänder	11·45	0·6	6·87	8	198000
Ein geübter Arbeiter zieht und drückt abwechselnd nach verticaler Richtung	5	1·1	5·5	8	158400
Ein Mann zieht und drückt lothrecht am Schwengel	11·1	0·75	8·3	7	210000
Ein Arbeiter an einem Spillrade in gleicher Höhe mit der Axe ziehend oder drückend	60	0·15	9·0	8	259200
Ein Arbeiter am untern Theile eines Laufrades unter 24°	12	0·7	8·4	8	251120
Ein Arbeiter dreht an der Kurbel	8	0·75	6·0	8	172800
Desgleichen	14	0·84	11·76	8	338700
Desgleichen	14·56	1·1	16·1	10	579900

Die Kräfte eines Mannes verhalten sich bei dem Kurbeldrehen, Wasserpumpen, Läuten und Rudern, wie 100:167:227:248.

Ein Mann gräbt in mittelfester Erde in einem Arbeitstage 3·414 Kubikmeter oder 108 Wiener Kubikschuhe Erde aus und ladet sie auf Schubkarren.

Die Arbeit eines Weibes gegen die eines Mannes ist wie 4:5.

d. Leistungen von kurzer Dauer.

Leute von gewöhnlicher Stärke können mit einer Kraft von 50^k, sehr starke mit 200 bis 300^k drücken. — Mittels eines um die Hüften gelegten Gürtels und eines daran befestigten Traghandes kann ein Mensch ohne Schwierigkeit 500^k, ein sehr starker über 1000^k heben. — Ein Mann hebt mit der Hand, wenn die Last zwischen seinen Füßen liegt und er sie mit Haken anfassen kann, 112^k, vorausgesetzt, daß er sich ein wenig vorwärts beugt.

B. Leistungen des Pferdes.

Das Gewicht eines Pferdes wird im Mittel 250 bis 280^k, für stärkere zu 350^k angenommen.

Die Geschwindigkeit eines Pferdes beim Ziehen im kurzen Schritte beträgt $1·25^m$, — im gestreckten Schritte $1·55^m$, — im kurzen Trabe $2·4^m$, — im scharfen Trabe $3·65^m$. — Die Geschwindigkeit des Pferdes schwankt zwischen 6·3 bis 27^m auf kurze Strecken — zwischen 2·2 bis $12·6^m$ auf größere Entfernungen und im Trabe.

Art der Arbeit.	Geförderte Last od. mittl. Anstrengung	Geschwindigkeit in der Secunde	Arbeit in der Secunde	Tägliche Arbeitszeit	Tägliche Nutzarbeit
	k	m	km	Stund.	km
Ein Pferd trägt im Schritte	120	1·1	132	10	4752000
„ „ „ „ Trabe	80	2·2	176	7	4435000
„ „ „ 37932 Meter weit	84	1·32	110·7	8	3186288

Bei einigermaßen steilem Aufsteigen verliert das Pferd die Hälfte seiner nützlichen Arbeit.

Art der Arbeit.	Geförderte Last od. mittl. Anstrengung	Geschwindigkeit in der Secunde	Arbeit	Tägliche Arbeitszeit	Tägliche Nutzarbeit
	k	m	km	Stund.	km
Ein Pferd zieht einen belasteten Karren im Schritte	700	1·1	770	10	27720000
Ein Pferd zieht ein Fuhrwerk im Trabe	350	2·2	770	4·5	12474000
Ein Pferd schafft auf einem Karren Lasten fort, und kehrt leer zurück, um neue zu holen	700	0·6	420	10	15120000
Ein Pferd übt an einem gewöhnlichen Fuhrwerk einen Zug aus	70	0·9	73	10	2268000

Ein Pferd zieht auf einer gewöhnlichen guten Straße mit einer Geschwindigkeit 0·63 bis 0·95^{m} etwa 560 bis 1000^{k}, auf steilem Wege hingegen und nur auf kurze Zeit nicht mehr als 730^{k}. — Es zieht auf horizontaler Straße und bei 8stündiger Tagesarbeit auf gleichem thonartigem Wege mit einer Kraft von 162^{k}, auf kreidigem ungleichem Wege mit 117^{k}, auf holperigem Wege mit 67^{k}, auf ausgefahrenem Kieswege mit 80·5^{k}, auf mit Sandsteinen gepflastertem und ausgefahrenem Wege mit 101^{k}, auf gutem Kieswege mit 115^{k}, auf gut gepflasterter Straße mit 134^{k}, auf mit eng gefügten harten Steinen belegtem Wege mit 162^{k} und legt dabei jede Stunde 3983^{m} zurück.

Ein Pferd zieht an einem englischen Eilwagen mit der Geschwindigkeit von 2·529^{m} 3·372^{m} 4·215^{m},

bei einer Neigung der Bahn von			
$\frac{1}{20}$ mit einer Kraft von	121·5^{k}	134·4^{k}	154·0^{k},
$\frac{1}{26}$ „ „ „ „	97·4	99·1	102·0,
$\frac{1}{30}$ „ „ „ „	75·0	88·0	90·7,
$\frac{1}{40}$ „ „ „ „	72·8	75·0	75·0,
$\frac{1}{60}$ „ „ „ „	50·4	54·3	58·2.

Ein Pferd arbeitet im Zuge	90·7	1·11	100·36	8	2890000
„ „ „ „ „	108·6	1·11	120·2	6	2596000
„ „ am Göpel im Schritte	45	0·9	40·5	8	1166400
„ „ „ „ „ Trabe	30	2·0	60·0	4·5	972400

Hier soll der Durchmesser des Pferdelaufes wo möglich 11^m sein, weil sonst die Zugkraft nicht gleichmäßig auf beiden Seiten des Pferdes wirkt und dieses beim Wenden Schwierigkeiten findet.

C. Leistungen des Ochsen.

Das mittlere Gewicht des Ochsen beträgt etwa 350^k, seine mittlere Anstrengung etwa $0{\cdot}75^m$.

Ein Ochse arbeitet am Göpel im Schritte 65^k geförd. Last bei mittlerer Anstrengung und $0{\cdot}6^m$ Geschwindigkeit, also $39{\cdot}0^{km}$ in der Secunde und in 8 Stunden täglicher Arbeitszeit 1123200^{km} Nutzarbeit.

Die nützliche Arbeit des Ochsen beim horizontalen geradlinigen Zuge wird hinsichtlich des Pferdes von Einigen $= 1$, von Andern $= \frac{3}{4}$, $= \frac{2}{3}$, und selbst $= \frac{1}{2}$ angenommen; beim Aufwärtssteigen leistet der Ochse eben so viel als das Pferd.

D. Leistungen des Maulesels.

Das Gewicht des Maulesels ist 200 bis 300^k, seine mittlere Geschwindigkeit $0{\cdot}9$ bis $1{\cdot}05^m$. — Seine Leistung beim Ziehen ist 40 bis 60^k mit $1{\cdot}05^m$ Geschwindigkeit oder 42 bis 63^{km} in der Secunde, 8 Stunden täglich. Er trägt 100^k täglich 22600^m weit oder 190 bis 230^k wohl auch 17000^m weit.

II. Die Trägheitsmomente.

§. 246. Wenn zwei verschiedene Massen M und m durch gleiche constante Kräfte bezüglich die Geschwindigkeiten C und c erhalten; so sind die diesen Massen eigenthümlichen mechanischen Wirkungen $\frac{MC^2}{2}$ und $\frac{mc^2}{2}$ einander gleich, wenn

$$(1) \qquad MC^2 = mc^2$$

stattfindet, d. i. wenn sich die Massen wie umgekehrt die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten verhalten.

Nach der daraus folgenden Gleichung

$$m = \frac{MC^2}{c^2}$$

kann für eine Masse M eine andere Masse m angebracht werden, ohne dadurch eine Änderung in der Bewegung zu erhalten. Man nennt dies die Reduction der Massen.

Geschieht die Bewegung der Massen M und m durch gleiche constante Kräfte in Kreisen von den Halbmessern R und r; so ist wegen

$$C:c = R:r \text{ auch}$$

$$MC^2 : mc^2 = MR^2 : mr^2,$$

also mit Rücksicht der Gleichung (1)

$$(2) \qquad MR^2 = mr^2.$$

Man nennt das Product der Masse in das Quadrat ihres Abstandes von der Drehaxe das Trägheits- oder Drehungs-Moment der Masse. Bezüglich der Gleichungen (1) und (2) kann man sonach den Satz aufstellen: Die mechanischen Wirkungen von zwei Massen sind gleich, wenn sie gleiche Trägheitsmomente haben und umgekehrt.

Aus (2) folgt die von dem Abstande R auf den r reducirte Masse

$$m = \frac{MR^2}{r^2}.$$

§. 247. Im vorigen §. wurde angenommen, als hätten alle Puncte einer Masse gleiche Abstände von der Drehaxe, was nur bei einem materiellen Puncte und noch bei einer gleichförmig beschwerten, zur Drehaxe parallelen Geraden der Fall ist. Bei wirklichen Massen hat aber jedes Element der Masse einen andern Abstand, sofort auch ein anderes Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment einer Masse ist demnach die Summe der Trägheitsmomente der Elemente. Setzt man diese Summe gleich dem Producte der Masse in das Quadrat irgend eines Abstandes, so hat jeder Punct in diesem Abstande die Eigenschaft, daß die in demselben vereinigte Masse dasselbe Drehungsmoment wie die wirkliche ausgedehnte gibt. Man nennt deswegen auch einen solchen Punct den Mittelpunct der Masse oder den Mittelpunct der Trägheit.

Zur Auffindung desselben seien m_1, m_2, m_3, ... die einzelnen Massen eines Systems oder die Elemente einer Masse, r_1, r_2, r_3, ... die Abstände dieser Massen von der Drehaxe und z sei der Abstand des Punctes von der Drehaxe, in welchem alle Massen bei ungeänderten Trägheitsmomenten vereint werden können; so hat man die Gleichungen

$$z^2 m_1 = r_1^2 m_1,\ z^2 m_2 = r_2^2 m_2,\ z^2 m_3 = r_3^2 m_3, \ldots$$

deren Summe

$$z^2(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + r_3^2 m_3 + \ldots$$

oder

$$(1) \qquad z^2 M = \Sigma r_1^2 m_1$$

ist, wobei

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.$$

die Masse des ganzen Systems oder des Körpers bedeutet.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad z = \frac{\sqrt{\Sigma r_1^2 m_1}}{M};$$

d. h. der Abstand des Mittelpunctes der Trägheit von der Drehaxe ist gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten, den die Summe der Trägheitsmomente durch die der sämmtlichen Massen dividirt gibt.

Bei der Bestimmung der Trägheitsmomente von Körpern, die von gleichartiger Materie sind, kann man, wie aus (1) zu erkennen ist, statt der Massen die zugehörigen Inhalte setzen. Eben so kann man die Trägheitsmomente von Linien und Flächen bestimmen, indem man ihre Längen- und Flächen-Ausdehnungen für die Massen in Rechnung bringt.

§. 248. Vor Allem wollen wir die Beziehung suchen, welche zwischen dem Trägheitsmomente einer Masse für eine Axe und dem derselben Masse für eine andere, zu jener parallelen Drehaxe besteht.

Es sei T das bekannte Trägheitsmoment einer Masse M (Fig. 152) in Bezug einer Drehaxe **AB** und T' jenes derselben Masse für eine andere Drehaxe **A'B'**, die zu jener parallel ist. Denkt man sich durch diese beiden Axen eine Ebene **A'C** gelegt und auf diese durch **AB** eine senkrechte Ebene **BD** errichtet; ferner die Masse M in die Elemente $m_1, m_2, m_3, \ldots$ zertheilt, bezeichnet die Coordinaten derselben in Bezug der Ebene **BD** mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$, in Bezug der Ebene **A'C** mit $y_1, y_2, y_3, \ldots$, und ist endlich der Abstand beider Drehaxen oder $AA' = pp' = d$, so wird für ein Element m_1, wegen

$$m_1 p^2 = x_1^2 + y_1^2 \text{ und } m_1 p_1^2 = (x_1 + d)^2 + y_1^2$$

$$(x_1^2 + y_1^2) m_1$$

das Trägheitsmoment bezüglich der Axe **AB** und

$$[(x_1 + d)^2 + y_1^2] m_1$$

jenes bezüglich der Axe **A'B'**. Da nun die Trägheitsmomente aller Elemente diesen ähnlich sind; so hat man

$$T = (x_1^2 + y_1^2)m_1 + (x_2^2 + y_2^2)m_2 + (x_3^2 + y_3^2)m_3 + \ldots,$$

$$T' = [(x_1 + d)^2 + y_1^2]m_1 + [(x_2 + d)^2 + y_2^2]m_2 +$$
$$+ [(x_3 + d)^2 + y_3^2]m_3 + \ldots$$
$$= (x_1^2 + y_1^2)m_1 + (x_2^2 + y_2^2)m_2 + (x_3^2 + y_3^2)m_3 + \ldots$$
$$+ 2d(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots) + d^2(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots),$$

folglich

$$T' = T + 2d\Sigma x_1m_1 + d^2\Sigma m_1.$$

Man hat aber, wenn S der Schwerpunct der Masse M und

$$SQ = NP = X$$

dessen Abstand von der Ebene BD ist, nach §. 86

$$\Sigma m_1x_1 = XM,$$

sofort

$$(1) \qquad T' = T + 2d.XM + d^2M.$$

Fällt der Schwerpunct in die Ebene BD oder auf die Axe AB, so ist $X = 0$, doch in beiden Fällen nicht T dasselbe. Nehmen wir den letztern Fall, nemlich die Drehaxe AB als durch den Schwerpunct gehend an; so ist

$$(2) \qquad T' = T + d^2M;$$

d. h. das Trägheits-Moment einer Masse auf eine Axe bezogen gleicht dem, welches sich auf eine parallele Schweraxe bezieht, vermehrt um das Product der Masse in das Quadrat des Abstandes beider Axen von einander.

Trägheits-Momente gerader Linien, ebener Flächen und Körper.

§. 249. Wenn eine Gerade M'M (Fig. 153) sich um eine Axe AB dreht, die durch ihren Mittel- oder Schwer-Punct S geht und mit derselben den Winkel α einschließt; so wird jede Hälfte dieser Geraden einen Kegel beschreiben, dessen Spitze S ist.

Zur Auffindung des Trägheits-Momentes der Geraden M'M setzen wir ihre Länge oder Masse M'M $= l$, also SM $= \frac{1}{2}l$ und theilen letztere Hälfte in unendlich kleine n gleiche Theile. Ist $pq = \frac{l}{2n}$ der $(m+1)$te solche Theil, also $Sp = m.pq = \frac{ml}{2n}$, so hat man für das Trägheits-Moment dieses Theiles

$$pq \,.\, pr^2 = \frac{l}{2n}\left(\frac{ml}{2n}\sin\alpha\right)^2 = \frac{l^3}{8n^3}\sin^2\alpha.m^2.$$

Für $m=1, 2, 3, \ldots n$ erhält man daraus die Trägheits-Momente aller Theile von S bis M, sofort, wenn das Trägheits-Moment der Geraden M′M mit Mz^2 bezeichnet wird,

$$\tfrac{1}{2}Mz^2=\frac{l^3\sin^2\alpha}{8n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=\frac{l^3\sin^2\alpha}{8n^3}\cdot\frac{n^3}{3},$$

also

$$(1)\quad Mz^2=\frac{l^2\sin^2\alpha}{12} \text{ und wegen } M=l$$

$$z=\frac{l\sin\alpha}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Für eine Drehaxe A′B′, welche zu AB im Abstande SL$=d$ parallel ist, hat man sonach (§. 248)

$$(2)\quad Mz'^2=Mz^2+d^2M=l\left(\frac{l^2\sin^2\alpha}{12}+d^2\right).$$

Ist die Drehaxe M′N zur vorigen parallel; so wird $d=\frac{1}{2}l\sin\alpha$, mithin

$$(3)\quad Mz''^2=\tfrac{1}{3}l^2\sin^2\alpha.$$

Wenn die Drehaxe AB auf M′M senkrecht, nemlich $\alpha=90°$ ist, so gibt die Formel (1) das Drehungs-Moment

$$(4)\quad Mz^2=\frac{l^2}{12},$$

welches dasselbe bleibt, wenn die Drehaxe in S zugleich auf die Bildebene senkrecht ist und daher M′M sich gleichsam um den Punct S dreht.

Man erhält sonach für eine in L auf die Bildebene senkrechte Axe aus (4) vermöge §. 248 das Drehungs-Moment

$$Mz'^2=l\left(\frac{l^2}{12}+d^2\right),$$

welches auch aus (2) für $\alpha=90°$ erhalten wird.

Setzt man für den senkrechten Abstand LK$=r$, den die Gerade M′M von der Drehaxe in L hat und zugleich KM$=l'$ und KM′$=l''$, so ist

$$l=l'+l'',\ \text{SK}=\frac{l'-l''}{2},$$

folglich wegen $d^2=r^2+\text{SK}^2$

$$Mz'^2=(l'+l'')\left[\frac{(l'+l'')^2}{12}+r^2+\tfrac{1}{4}(l'-l'')^2\right]$$

$$=\tfrac{1}{3}(l'^3+l''^3)+(l'+l'')r^2, \text{ oder}$$

$$(5)\quad Mz'^2=l'\left(\tfrac{1}{3}l'^2+r^2\right)+l''\left(\tfrac{1}{3}l''^2+r^2\right).$$

Ist die Drehaxe in M′ auf die Bildebene senkrecht; so ist $r=0$, $l''=0$ und $l'=l$, also diesfalls

$$(6) \qquad Mz''=\tfrac{1}{3}l^3,$$

wie für $\alpha=90°$ in Formel (3).

§. 250. Wenn die Gerade M′M (Fig. 154) was immer für eine Lage gegen die Drehaxe AB hat und ihr Trägheits-Moment gefunden werden soll; so denke man sich durch AB eine Ebene AE gelegt, fälle die Senkrechten M′E′ und ME, dann aus E′ und E auf die Drehaxe die Senkrechten AE′, BE und ziehe endlich noch E′F′ und EF parallel zur Drehaxe. Über das erhaltene Rechteck E′E errichte man das senkrechte Parallelepiped E′EMN′ und lege durch M′ zur Grundfläche das parallele Rechteck M′NPL; so ist MM′N der Winkel, den die Gerade M′M mit der Drehaxe einschließt. Für $BE=a$, $AE'=b$, $EM=a'$, $E'M'=b'$, $M'M=l$ wird also

$$MN=\sqrt{(a'-b')^2+(a-b)^2} \text{ und}$$

$$\sin MM'N=\frac{1}{l}\sqrt{(a'-b')^2+(a-b)^2}.$$

Zieht man durch den Schwerpunct S parallel zu AB die Drehaxe A′B′; so ist auf diese bezogen das Trägheitsmoment nach (1) vorigen §.

$$Mz^2=\frac{l^3}{12}\sin^2 MM'N=\frac{l}{12}[(a-b)^2+(a'-b')^2],$$

folglich das Trägheits-Moment für die Drehaxe AB (§. 248)

$$Mz'^2=Mz^2+SD^2.M.$$

Es ist aber wegen $SC=\frac{a'+b'}{2}$ und $DC=\frac{a+b}{2}$

$$\text{sofort } SD^2=\frac{(a'+b')^2}{4}+\frac{(a+b)^2}{4} \text{ und}$$

$$(7) \qquad Mz'^2=l\left[\frac{(a-b)^2+(a'-b')^2}{12}+\frac{(a'+b')^2+(a+b)^2}{4}\right]$$

$$=l\frac{a^2+ab+b^2+a'^2+a'b'+b'^2}{3}.$$

Ist MM′ senkrecht auf die Axe AB (Fig. 154. a), also DC senkrecht auf beide Geraden; so erhält man, wenn

$$CD=r,\quad CM=l',\quad CM'=l''$$

gesetzt wird, wegen

$$a=b=r,\quad a'=l',\quad b'=-l'',\quad l=l'+l''$$

aus (7) genau wieder (5).

Hat aber die Gerade **M'M** die Lage **MN'** (Fig. 154) parallel zur Ebene **AE**, die durch die Drehaxe gelegt ist, so ist $b' = a'$, mithin das Trägheits-Moment

$$(8) \qquad Mz''^2 = l\left(\frac{a^2+b^2+ab}{3} + a'^2\right).$$

§. 251. Das Rechteck **EFGH** (Fig. 155) drehe sich um die Axe **AB**, welche in einer durch **EF** gelegten Ebene **EFCD** befindlich ist; man soll das Trägheits-Moment dieses Rechteckes bestimmen.

Es sei die Senkrechte $\mathbf{CE} = a$, $\mathbf{DF} = b$ und die Höhe des Rechteckes $\mathbf{EH} = \mathbf{FG} = h$. Theilt man letztere in n gleiche Theile, so wird das Rechteck, dessen Fläche N sein mag, in n kleine Rechtecke

$$\mathbf{uv} = \frac{N}{n}$$

getheilt, die man wie gerade Linien ansehen kann. Ist **uv** von **E** gerechnet das $m$te Element, somit

$$\mathbf{Eu} = \frac{mh}{n},$$

so hat man nach Formel (8) des vorigen §. das Trägheits-Moment dieses Elementes

$$\frac{N}{n}\left(\frac{a^2+b^2+ab}{3} + \frac{m^2h^2}{n^2}\right).$$

Setzt man $m = 1, 2, 3, \ldots n$ und addirt die erhaltenen Trägheits-Momente, so ergibt sich jenes des Rechteckes **EHGF**

$$T = N\,\frac{a^2+b^2+ab+h^2}{3}.$$

Eben so ist für das Rechteck **EFG'H'**, dessen Höhe $\mathbf{FG'} = h'$ und Masse N' ist,

$$T' = N'\,\frac{a^2+b^2+ab+h'^2}{3}.$$

Bezeichnet M die Masse des ganzen Rechteckes **HH'G'G**, so ist wegen $(h+h') : h = M : N$

$$N = \frac{Mh}{h+h'} \quad \text{und eben so} \quad N' = \frac{Mh'}{h+h'}.$$

Substituirt man dies für N und N' in T und T' und addirt sodann letztere Ausdrücke, so hat man als Trägheits-Moment für das ganze Rechteck

$$(1) \qquad Mz^2 = \frac{M(a^2+ab+b^2+h^2-hh'+h'^2)}{3}.$$

Ist die Drehare CD parallel zu EF; so ist $a = b$, sofort das Trägheits-Moment

$$(2) \qquad Mz'^2 = M\left(a^2 + \frac{h^2 - hh' + h'^2}{3}\right).$$

Durchschneidet die Drehare wie A'B' die verlängerte Gerade EF und ist sie zugleich senkrecht auf dem Rechtecke HG'; so ändert sich in dem Ausdrucke (1) nichts, nur ist die Grundlinie des Rechteckes

$$EF = b - a = c.$$

Ist CE die Drehare, so ist $a = 0$ und b die Grundlinie, mithin diesfalls das Trägheits-Moment

$$(3) \qquad Mz''^2 = \frac{M(b^2 + h^2 - hh' + h'^2)}{3}.$$

Ist endlich die Drehare im Mittelpuncte des Rechteckes auf demselben senkrecht und setzt man

$$EF = HG = c, \quad H'H = G'G = h_1,$$

so ist in (3) $b = \frac{1}{2}c$, $h' = h = \frac{1}{2}h_1$, sofort

$$(4) \qquad Mz'''^2 = \frac{M(c^2 + h_1^2)}{12}, \text{ u. s. w.}$$

§. 252. Um das Trägheits-Moment einer Kreisfläche ABDE (Fig. 156), deren Inhalt oder Masse M ist, zu bestimmen, wenn die Drehare in ihrem Mittelpuncte C auf derselben senkrecht ist, theile man den Halbmesser $CD = CA = r$ in n gleiche Theile und beschreibe durch die Theilungspuncte concentrische Kreise. Ist $vu = \frac{r}{n}$ der $m+1$te Theil, also $Cu = \frac{m}{n}r$, so kann man vermöge des unendlich kleinen Unterschiedes der beiden Umfänge des angezeigten unendlich schmalen Ringes denselben für ein Rechteck ansehen, dessen Grundlinie $2 . Cu . \pi$ und Höhe vu, dessen Inhalt somit $= \frac{2mr^2}{n^2}\pi$ und Trägheits-Moment

$$\frac{2mr^2\pi}{n^2} . Cu^2 = \frac{2m^3r^4\pi}{n^4} \text{ ist.}$$

Für $m = 1, 2, 3, \ldots n$ erhält man die Trägheits-Momente aller Elemente, also durch ihre Summe das Trägheits-Moment der ganzen Kreisfläche

$$Mz^2 = \frac{2r^4\pi}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = r^2\pi . \frac{r^2}{2}$$

oder weil $r^2\pi$ die Masse M der Kreisfläche vorstellt,

$$(1) \qquad Mz^2 = M.\frac{r^2}{2}, \text{ und } z = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Geschieht die Drehung um einen Punct L, der um $CL = a$ von C entfernt ist, so hat man (§. 248)

$$(2) \qquad Mz'^2 = M\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right).$$

Für die Drehung um einen Punct D des Umfanges ist $a = r$, und

$$(3) \qquad Mz''^2 = M.\frac{3}{2}r^2, \text{ u. s. w.}$$

§. 253. Ein Parallelepiped (Fig. 157) von der Masse M, Länge l und Höhe $h + h' = H$ drehe sich um eine Axe AB, welche an der Grundfläche liegt und senkrecht auf der Höhe ist. Man soll das Trägheits-Moment bestimmen.

Theilt man die Länge l in n sehr kleine Theile und führt zur Grundfläche parallele Schnitte, so wird dadurch das ganze Parallelepiped in n Elemente zerlegt, deren jedes als eine ebene Fläche von der Masse $\frac{M}{n}$ angesehen werden kann. Ist uv das $(m+1)$te dieser Elemente, somit $\frac{m}{n}l$ sein Abstand von der Drehaxe, so hat man für das Trägheits-Moment desselben nach §. 251 (2)

$$\frac{M}{n}\left(\frac{m^2l^2}{n^2} + \frac{h^2 - hh' + h'^2}{3}\right).$$

Setzt man $m = 1, 2, 3, \ldots n$ und addirt dann, so erhält man das Trägheits-Moment des Parallelepipeds auf die Axe AB bezogen

$$(1) \qquad Mz^2 = \frac{M(l^2 + h^2 - hh' + h'^2)}{3}.$$

Geht die Axe durch die Mitte der Höhe, so ist $h' = h = \frac{1}{2}H$, sofort

$$(2) \qquad Mz'^2 = \frac{M(l^2 + \frac{1}{4}H^2)}{3}.$$

Geschieht die Drehung um ab, so ist $h' = 0$ und $h = H$, daher

$$(3) \qquad Mz''^2 = \frac{M(l^2 + H^2)}{3}.$$

Ist die Axe eine Schwerlinie parallel zu **AB**, so hat man zwei Parallelepipede, jedes von der Länge $\frac{l}{2}$ und Masse $\frac{M}{2}$, daher nach (2) das Trägheits-Moment eines jeden

$$\frac{M}{2.3}\left(\frac{l^2}{4}+\frac{H^2}{4}\right),$$

also das des ganzen Parallelepipeds

$$(4) \qquad Mz'''^2=\frac{M(l^2+H^2)}{12}.$$

Ist endlich **A'B'** die Drehaxe im Abstande r von **AB**; so ist das Quadrat ihres Abstandes vom Schwerpuncte

$$\left(r+\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{H}{2}-h\right)^2,$$

sofort nach §. 248

$$(5) \qquad Mz''^2=M\left[\frac{l^2+H^2}{12}+\left(r+\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{H}{2}-h\right)^2\right]$$

$$=M\left[\frac{l^2+H^2}{3}+h^2-Hh+r^2+rl\right].$$

§. 254. Eben so findet man das Trägheits-Moment eines Cylinders, der sich um seine Axe dreht, die Masse M, Höhe l und r zum Halbmesser der Grundfläche hat, indem man denselben durch die Theilung seiner Länge in n gleiche Elemente zerlegt, die man als Kreise von der Masse $\frac{M}{n}$ ansehen kann. Es ist daher das Trägheits-Moment eines solchen Elementes nach §. 252 (1)

$$\frac{M}{n}\cdot\frac{r^2}{2},$$

sofort das des ganzen Cylinders

$$(1) \qquad Mz^2=M.\frac{r^2}{2}.$$

Ist die Drehaxe zur Axe des Cylinders in der Entfernung a parallel; so ist

$$(2) \qquad Mz'^2=M\left(\frac{r^2}{2}+a^2\right).$$

Für einen hohlen Cylinder, dessen äußerer Halbmesser R, innerer r ist, hat man bezüglich auf seine eigene Axe das Trägheits-Moment

$$Mz''^2=\frac{M'R^2}{2}-\frac{M''r^2}{2},$$

wo $M' = R^2\pi l$ die Masse des äußern und $M'' = r^2\pi l$ jene des innern Cylinders ist.

Substituirt man diese Werthe für M' und M'' und berücksichtigt, daß die Masse des hohlen Cylinders $M = (R^2 - r^2)\pi l$ ist; so hat man für das gesuchte Trägheits-Moment

$$(3) \qquad Mz''^2 = \frac{M(R^2 + r^2)}{2}.$$

§. 255. Zur Bestimmung des Trägheits-Momentes einer Kugel (Fig. 158), welche sich um einen Durchmesser AB dreht, denken wir uns den Halbmesser $CA = r$ in n gleiche Theile getheilt und in den Theilungspuncten auf AB senkrechte Kreise geführt; dann ist die Halbkugel in cylindrische Elemente, die $\frac{r}{n}$ zur Höhe haben, zerlegt. Ist $CF = \frac{m}{n}\,r$, mithin $FE^2 = r^2 - \frac{m^2r^2}{n^2}$, so hat man für das Trägheits-Moment des dargestellten Elementes nach §. 254 (1)

$$FE^2 . \pi . \frac{r}{n} . \frac{FE^2}{2} = \frac{r^5}{n}\pi\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)^2 = \frac{r^5\pi}{n}\left(1 - \frac{2m^2}{n^2} + \frac{m^4}{n^4}\right).$$

Daraus ergeben sich für $m = 1, 2, 3, \ldots n$ die Trägheits-Momente der Elemente von C bis A und aus deren Summe folgt das der Halbkugel

$$\tfrac{1}{2}Mz^2 = \frac{r^5\pi}{n}\left[n - \frac{2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + \frac{1}{n^4}(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4)\right]$$

$$= \frac{r^5\pi}{n}\left(n - \frac{2n}{3} + \frac{n}{5}\right) \quad \text{oder}$$

$$(1) \qquad Mz^2 = \frac{8r^5\pi}{15} = M \cdot \frac{2}{5}r^2.$$

Für eine Axe, die zu AB in dem Abstande a parallel ist, hat man das Trägheits-Moment

$$(2) \qquad Mz'^2 = M\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right), \text{ u. s. f.}$$

Siebenter Abschnitt.

Bewegung der Maschinen mit Rücksicht aller Widerstände und der Trägheits-Momente.

§. 256. Um die Bewegungsgesetze eines materiellen Pendels, d. h. eines Körpers oder eines festen Systems materieller Puncte, das sich um eine durch C (Fig. 159) gehende horizontale Axe frei schwingt, zu suchen, sei S der Schwerpunct des Systems und CB eine verticale Schwerlinie. Wird CB um den Winkel α in die Lage CA, also S nach S′ gebracht und ist P das Gewicht des Systems, V sein Trägheits-Moment in Bezug der Axe C und der Abstand des Schwerpunctes von C, nemlich $CS = CS' = a$; so hat man $P \sin \alpha$ die bewegende Kraft in S′ und $\frac{V}{a^2}$ die dahin reducirte Masse, sofort die Beschleunigung

$$G = g \cdot \frac{a^2 P \sin \alpha}{V}.$$

Soll nun dieses Pendel durch Vereinigung seiner Masse in einem Puncte A für $CA = L$ als ein einfaches von derselben Schwingungszeit dargestellt werden können, wo für letzteres Pendel $g \sin \alpha$ die Beschleunigung in A, also

$$G' = g \cdot \frac{a}{L} \sin \alpha$$

in S′ ist; so muß $G = G'$ sein und dies gibt

$$(1) \qquad L = \frac{V}{aP};$$

d. h. ein materielles Pendel kann für dieselbe Schwingungszeit als ein einfaches angesehen werden, dessen

Länge der Quotient des Trägheits-Momentes durch das statische Moment ist. Man nennt deswegen auch den Vereinigungspunct A der Masse des materiellen Pendels, um ein gleichschwingendes einfaches zu geben, den Schwingungspunct. Für die Schwingungszeit hat man sonach

$$(2) \qquad t = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{\frac{V}{gaP}}.$$

Aus der Gleichung (1) folgt noch

$$(3) \qquad V = LaP,$$

wonach das Trägheits-Moment eines schwingenden Systems das Product der beiden Abstände seines Schwingungs- und seines Schwerpunctes von der Drehaxe in sein Gewicht oder seine Masse ist. Hieraus zeigt sich auch, daß der Mittelpunct der Trägheit (§. 247) von der Drehaxe den Abstand $\sqrt{La}$ hat.

Den Abstand a des Schwerpunctes gibt die Statik, den Abstand L des Schwingungspunctes findet man aus $L = \frac{n^2 l}{N^2}$ nach §. 239 (3), wo N die Anzahl Schwingungen des Systems in n Secunden und l die Länge des Secundenpendels vorstellt.

Ist V_0 das Trägheitsmoment des materiellen Pendels in Bezug einer zur Drehaxe parallelen Schweraxe; so ist §. 248

$$V = V_0 + a^2 P \text{ und daher wegen (3)}$$

$$L = \frac{V_0 + a^2 P}{aP}.$$

Schwingt aber das Pendel um eine, durch den Schwingungspunct B gehende parallele Axe und ist diesfalls

$$V' = V_0 + z^2 P$$

das Trägheits-Moment, ferner L' der Abstand des Schwingungspunctes von dieser Axe; so wird

$$L' = \frac{V_0 + z^2 P}{zP}.$$

Eliminirt man V_0 aus beiden Gleichungen, so hat man

$$La - (a - z)(a + z) = L'z$$

und daraus wegen $a + z = L$

$$L = L';$$

d. h. bei einem materiellen Pendel wird die Schwingungszeit durch Verwechslung des Schwingungspunctes mit dem Aufhängpuncte nicht verändert, auch

wird dabei der frühere Aufhängpunct zum Schwingungspuncte. Ein solches für die Verwechslung der Axen eingerichtetes Pendel nennt man Reversionspendel.

§. 257. Betrachten wir die Bewegung §. 233. III, welche durch zwei an den Endpuncten einer über eine Rolle gelegten Schnur angebrachte Gewichte P und Q entsteht, wenn jetzt die Zapfenreibung, Steifigkeit der Schnur und das Trägheits-Moment der Rolle berücksichtigt wird.

Ist r der Halbmesser der Rolle, q ihr Gewicht, δ der Durchmesser der Schnur, p ihr Gewicht und c der Steifigkeits-Coefficient; ist ferner α der Halbmesser der Zapfen und k' der Zapfenreibungs-Coefficient, so wird die Kraft am Umfange der Rolle zur Überwindung der Reibung (§. 153. 3) und Steifigkeit (§. 152)

$$f = \frac{(r+\alpha k')\,Q + \alpha k'(p+q)}{r-\alpha k'} + \frac{c\delta^2}{r}Q,$$

also die bewegende Kraft

$$F = P - f.$$

Da ferner $\frac{q}{g}.\frac{1}{2}r^2$ das Trägheits-Moment der Rolle nach §. 254 (1), daher diese Masse auf den Umfang der Rolle reducirt $= \frac{\frac{1}{2}q}{g}$ oder als Gewicht $= \frac{1}{2}q$ ist; so wird $P+Q+p+\frac{1}{2}q$ die auf den Umfang der Rolle reducirte Masse, daher daselbst die Beschleunigung

$$G = g.\frac{P-f}{P+Q+p+\frac{1}{2}q}, \text{ sofort}$$

$$v = Gt, \quad s = G\frac{t^2}{2}, \quad v^2 = 2Gs, \text{ u. s. w.}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ω und den Weg σ ist sonach

$$\omega = \frac{G}{r}t, \quad \sigma = \frac{G}{r}\cdot\frac{t^2}{2}, \quad \omega^2 = \frac{2G}{r}.\sigma.$$

§. 258. Wenn man das Gewicht P am Umfange einer Welle (Fig. 160) zu bestimmen hat, welches einem damit verbundenen Schwungrade nach t Secunden eine Winkelgeschwindigkeit ω ertheilt und R das Gewicht des Schwungringes ohne Speichen, mV das der m Speichen, W das der Welle sammt dem Seile, $2q$ das der beiden Zapfen; ferner r der Halbmesser der Welle, α jener der Zapfen und k' der Zapfenreibungs-Coefficient ist; so wird die zur Überwindung der Reibung erforderliche Kraft (§. 159. a)

$$F = \alpha k'\frac{R+mV+W+2q}{r-\alpha k'},$$

folglich die bewegende Kraft

$$P - F = P - \frac{ak'N}{r - ak'} \text{ für } R + mV + W + 2q = N.$$

Ist nun l die Länge und a die Breite einer Speiche, dann b die Breite des Schwungringes in der Richtung seines Halbmessers, so ist §. 254. (3)

$$\frac{R}{g} \cdot \frac{(r+l+b)^2 + (r+l)^2}{2r^2}$$

die auf den Umfang der Welle reducirte Masse des Schwungringes, nach §. 253 (5) für $H = a$, $h = \frac{1}{2}a$

$$\frac{mV}{g} \cdot \frac{l^2 + 3lr + 3r^2 + \frac{1}{4}a^2}{3r^2} \quad \text{die der } m \text{ Speichen,}$$

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{r^2}{2r^2} \quad \text{jene der Welle und nach §. 254 (1)}$$

$$\frac{2q}{g} \cdot \frac{a^2}{2r^2} \quad \text{die der beiden Zapfen.}$$

Wird die Summe dieser reducirten Massen $= \frac{Q}{g}$, also ihr Gewicht $= Q$ gesetzt, so hat man die Beschleunigung

$$G = g.(P - \frac{ak'N}{r - ak'}) : (P + Q),$$

daher die Geschwindigkeit am Umfange der Welle $= Gt$ und die Winkelgeschwindigkeit

$$\text{(a)} \qquad \omega = \frac{Gt}{r} = gt(P - \frac{ak'N}{r - ak'}) : r(P + Q)$$

und daraus

$$\text{(1)} \qquad P = \frac{gt \frac{ak'}{r - ak'} N + r\omega Q}{gt - r\omega}.$$

Ist P eine reine Kraft oder Masse, so muß diese im Divisor von (a) der Nulle gleich gesetzt werden, dann ist

$$\text{(2)} \qquad P = \frac{ak'}{r - ak'} . N + \frac{r\omega Q}{gt}.$$

§. 259. Ist P eine Last, welche auf der Welle durch irgend eine am Umfange derselben wirkende Kraft aufgewunden wird und macht dabei die Welle mit dem Schwungrade während t Secunden n Umdrehungen; so fragt es sich, wenn zu Ende dieser Zeit die Kraft plötzlich zu wirken aufhört, wie lange die von da an verzögerte drehende Bewegung noch statt-

finden wird und wie viel Umdrehungen bis zum Stillstande geschehen werden.

Da mit Rücksicht der Reibung und Steifigkeit des Seiles von der Dicke δ, wenn c den Steifigkeits-Coefficienten vorstellt, die verzögerte Kraft

$$F=\frac{rP+ak'(P+N)}{r-ak'}+\frac{c\delta^2}{r}.P$$

(§. 159. a) und §. 152), ferner $P+Q$ das Gewicht der auf den Umfang der Welle reducirten Masse und $\frac{2r\pi.n}{t}$ offenbar die Anfangsgeschwindigkeit der verzögerten Bewegung ist; so wird für die Zeit T, wo diese Bewegung aufhört, (§. 213)

$$\frac{gF}{P+Q}.T=\frac{2r\pi n}{t}$$

und daraus die gesuchte Zeit

$$(1)\qquad T=\frac{2nr\pi}{gt}\cdot\frac{P+Q}{F}.$$

Bezeichnet x die Anzahl Umdrehungen bis zum Stillstande, so ist (§. 213)

$$2r\pi.x=\frac{gF}{P+Q}\cdot\frac{T^2}{2},$$

woraus nach der Substitution für T

$$(2)\qquad x=\frac{n^2r\pi}{gt^2}\cdot\frac{P+Q}{F}\text{ folgt.}$$

Ist x gegeben, so kann man daraus N, somit auch das Gewicht R des Schwungringes bestimmen.

§. 260. Eine frei hängende Last Q soll auf einer Welle vom Halbmesser r durch eine am Hebelsarme R vertical abwärts wirkende Kraft P aufgewunden und r so bestimmt werden, daß die anfängliche Beschleunigung der Last den größten Werth erhalte.

Ist W das Gewicht der Welle, V das des damit verbundenen Rades vom Halbmesser R, α der Halbmesser der Zapfen, k' der Reibungs-Coefficient und läßt man die Steifigkeit des Seiles unberücksichtigt; so ist die bewegende Kraft am Umfange des Wellrades

$$P-F=P-\frac{Q(r+ak')+ak'(W+V)}{R-ak'}=\frac{PR-ak'(P+Q+W+V)-rQ}{R-ak'}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\frac{R}{r}$, läßt dann im Nenner die kleine Größe $\frac{rak'}{R}$ hinweg und setzt $PR - ak'(P+Q+V+W) = A$; so hat man die bewegende Kraft am Umfange der Welle

$$f = \frac{A - rQ}{r}.$$

Für die Reduction der Gewichte auf den Umfang der Welle, wenn das Trägheits-Moment des Rades $V' = V.\varkappa^2$ und auch P ein Gewicht ist, hat man

$$\frac{(Q+\frac{1}{2}W)r^2 + V' + PR^2}{r^2},$$

mithin die Beschleunigung

$$(1) \qquad G = \frac{Ar - Qr^2}{(Q+\frac{1}{2}W)r^2 + V' + PR^2}.$$

Soll nun r der Werth sein, der G zu einem Größten macht, so erhält man ihn, wenn man $r \pm e$ statt r setzt, dann den Ausdruck nach Potenzen von e in eine Reihe auflöst, und den Coefficienten der ersten Potenz mit Null vergleicht. (Man sehe Aufgabe §. 182). Dadurch erhält man die Gleichung

$$r^2 + \frac{2Q(V' + PR^2)}{A(Q+\frac{1}{2}W)}.r = \frac{V' + PR^2}{Q + \frac{1}{2}W}$$

und daraus

$$(2) \qquad r = \frac{V' + PR^2}{A(Q+\frac{1}{2}W)}\left[-Q + \sqrt{Q^2 + A^2\frac{Q+\frac{1}{2}W}{V' + PR^2}}\right].$$

Ist P eine reine Kraft, d. i. ohne Masse, so ist das mit R^2 verbundene $P = 0$ zu setzen.

§. 261. Mittels eines Räderwerkes (Fig. 161) werde eine Last Q durch eine Kraft P aufgewunden; es soll die Beschleunigung dieser Bewegung bestimmt werden.

Es sei B der Halbmesser des Kraftrades und b jener der Lastwelle; ferner seien r_1, r_2 die Halbmesser der Getriebe, R_1, R_2 die der ergriffenen Räder und α, α_1, α_2 die der Zapfen; endlich seien V, V_1, V_2 die Gewichte der Wellen mit den daran befindlichen Rädern und Getrieben und

$$V\varkappa^2,\ V_1\varkappa_1^2,\ V_2\varkappa_2^2$$

die Trägheits-Momente dieser Massen.

Bezeichnet nun ohne Reibung der Zähne und Triebstecken an einander Q_2 die Kraft am Umfange R_2, um die Last Q, Q_1 die Kraft am Umfange

R_1, um Q_2 und F die Kraft am Umfange von B, um Q_1 zu überwinden; sind ferner Q'_2, Q'_1 die Widerstände, in die Q_2 und Q_1 übergehen, wenn die Reibung an den Zähnen und Triebstecken berücksichtigt wird und k', k die Coefficienten der Zapfen- und schleifenden Reibung; so hat man (§. 159. 1) und §. 165)

$$Q_2R_2 = Qb + \alpha_2 k'(Q_2 + Q + V_2),\quad Q'_2 = Q_2(1+\tfrac{1}{2}k^2),$$
$$Q_1R_1 = Q'_2r_2 + \alpha_1 k'(Q'_2 + Q_1 + V_1),\quad Q'_1 = Q_1(1+\tfrac{1}{2}k^2),$$
$$FB = Q_1r_1 + \alpha k'(Q'_1 + F + V).$$

Bestimmt man nach der Ordnung dieser Gleichungen zuerst Q_2, dann Q'_2, ferner Q_1, dann Q'_1 und endlich F; so hat man $P - F$ als die bewegende Kraft am Umfange B und diese auf den der letzten Welle b reducirt (§. 164)

$$K = \frac{R_1R_2B}{r_1r_2b}(P - F).$$

Reducirt man die Masse V zuerst auf den Umfang r_1 oder R_1, dann auf den r_2 oder R_2 und endlich auf b; so hat man nach dieser Ordnung die Massen

$$\frac{V\varkappa^2}{r_1^2},\quad \frac{V\varkappa^2R_1^2}{r_1^2r_2^2},\quad \frac{V\varkappa^2R_1^2R_2^2}{r_1^2r_2^2b^2}.$$

Eben so sind die Massen V_1 und V_2 auf b reducirt

$$\frac{V_1\varkappa_1^2R_2^2}{r_2^2b^2} \text{ und } \frac{V_2\varkappa_2^2}{b^2}.$$

Sonach hat man für alle dahin reducirten Massen

$$N = \frac{V\varkappa^2R_1^2R_2^2}{r_1^2r_2^2b^2} + \frac{V_1\varkappa_1^2R_2^2}{r_2^2b^2} + \frac{V_2\varkappa_2^2}{b^2} + Q.$$

Wäre P ebenfalls ein Gewicht, so käme hier noch

$$\frac{PB^2R_1^2R_2^2}{r_1^2r_2^2b^2} \text{ hinzu.}$$

Man hat nun die gesuchte Beschleunigung

$$G = g.\frac{K}{N}.$$

§. 262. Zur Aufstellung der Theorie des Fuhrwerkes wollen wir uns an das in dem Werke: ***Expérience sur le tirage des voitures etc. par Morin, Capitaine d'Artillerie*** beobachtete Verfahren halten und zugleich einige Andeutungen aus Kaiser's Handbuch der Mechanik benützen.

Für das vierräderige Fuhrwerk (Fig. 162) seien R' und R'' die Widerstände an den Berührungspuncten der Vorder- und Hinterräder mit der Fahrbahn **MN** bei der Bewegung des Fuhrwerkes, F sei der Widerstand, den die Zugkraft zu überwinden hat, F' der fortgepflanzte Zug vom Vorder- gegen das Hintergestell, β der Neigungswinkel der Fahrbahn gegen den Horizont, α der Winkel der Zugkraft F gegen die Fahrbahn, L die durchlaufene Strecke des Wagens auf letzterer, h das Totalgefäll auf dieser Strecke, P das Gewicht des Wagens nebst Belastung ohne Räder und **S** der Schwerpunct dieses Gewichtes; ferner seien p' und p'' die Gewichte, r' und r'' die Halbmesser der Vorder- und Hinterräder, ρ' und ρ'' die Halbmesser ihrer Axen, endlich k' der Axenreibungs-Coefficient.

Verlängert man die Richtung der Kraft F, bis sie in **B** die durch den Schwerpunct gezogene Verticale schneidet und denkt sich **B** als Angriffspunct der Kraft F; so sieht man, daß diese, da sie nicht durch den Schwerpunct geht, nebst der fortschreitenden auch eine drehende Bewegung um diesen Punct hervorbringen müßte (§. 201), wenn nicht die Drehung durch den Widerstand des Bodens aufgehoben würde, wodurch aber die gewöhnlichen Drücke durch die Last und Kraft auf die Axen Veränderungen erfahren.

Um diese Axendrücke zu bestimmen, zerlegen wir zuerst F an **B** in zwei Seitenkräfte, in die zur Fahrbahn parallele f' und die verticale f'', wodurch

$$f' = \frac{F\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}, \quad f'' = \frac{F\sin\alpha}{\cos\beta} \text{ wird.}$$

Durch das Versetzen von f'' nach **S** erhält man $P - f''$ als die daselbst wirkende Kraft. Zieht man durch **S** die Gerade **DD'** parallel zur Fahrbahn, bis sie die, aus den Mittelpuncten **C** und **C'** der Axen gezogenen Verticalen begrenzt; so ist für $SD = a$, $SD' = b$, $a + b = l$, wenn der verticale Druck auf **C** mit π' und auf **C'** mit π'' bezeichnet wird,

$$\pi' + \pi'' = P - f'', \quad \pi' a - \pi'' b = 0$$

und daraus

$$\pi' = P' - \frac{bF\sin\alpha}{l\cos\beta}, \quad \pi'' = P'' - \frac{aF\sin\alpha}{l\cos\beta},$$

wobei $P' = \frac{bP}{l}$ und $P'' = \frac{aP}{l}$ die Drücke von der Last P auf **C** und **C'** vorstellen.

Fällen wir ferner aus S auf f' die Senkrechte $SG = q$ und machen auch ihre Verlängerung $SG' = q$; so kann man ſtatt der Kraft f' nach §. 201 drei gleichgeltende Kräfte annehmen, wovon die eine f' in der zur Fahrbahn parallelen Richtung SD durch den Schwerpunct geht, mithin blos die fortſchreitende Bewegung des Wagens bewirkt, während die beiden andern Kräfte, jede $= \frac{1}{2}f'$ in G und G′ als parallel entgegengeſetzt, eine drehende Bewegung um S hervorzubringen ſtreben. Da aber dieſes Beſtreben dasſelbe bleibt, wenn ſtatt dieſer in G und G′ die gleichen Kräfte in H und H′ vertical entgegengeſetzt angebracht werden und dabei $SH = SH' = q$ iſt, ſo hat man ſodann $\frac{1}{2}f'$ in H, welche das ganze Syſtem zu heben, alſo die Axen aufwärts, und $\frac{1}{2}f'$ in H′, welche die Axen abwärts zu drücken ſucht. Bezeichnen ſonach x' und x'' die Kräfte des Erhebens, x_1 und x_2 die des Herabdrückens der Axen C und C′, ſo hat man die Gleichungen

$$x' + x'' = \tfrac{1}{2}f', \qquad x_1 + x_2 = \tfrac{1}{2}f',$$
$$x' . HE - x'' . HE' = 0, \qquad x_1 . H'E - x_2 . H'E' = 0$$

und daraus wegen

$$HE = a\cos\beta - q,\ HE' = b\cos\beta + q,$$
$$H'E = a\cos\beta + q,\ H'E' = b\cos\beta - q,$$

$$x' = \frac{\frac{1}{2}f'(b\cos\beta + q)}{l\cos\beta}, \qquad x_1 = \frac{\frac{1}{2}f'(b\cos\beta - q)}{l\cos\beta},$$

$$x'' = \frac{\frac{1}{2}f'(a\cos\beta - q)}{l\cos\beta}, \qquad x_2 = \frac{\frac{1}{2}f'(a\cos\beta + q)}{l\cos\beta}.$$

Endlich wird die Kraft F, da ſie auf das Vordergeſtell unmittelbar wirkt, die Vorderaxe mit

$$y' = F\sin(\alpha + \beta)$$

heben und mit

$$F\cos(\alpha + \beta)$$

horizontal drücken, während die Kraft F' die Hinteraxe mit

$y'' = F'\sin\beta$ hebt und mit $F'\cos\beta$ horizontal drückt.

Nimmt man daher π', x', x_1, y', dann π'', x'', x_2, y'' in dem Sinne ihrer Auf- oder Abwärtswirkung zuſammen und ſetzt

$$q\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{l\cos^2\beta} + \frac{b\sin\alpha}{l\cos\beta} + \sin(\alpha+\beta) = \gamma,$$

$$q\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{l\cos^2\beta} - \frac{a\sin\alpha}{l\cos\beta} = \gamma';$$

so erhält man den Abwärtsdruck

der Vorderaxe $P_1 = P' - \gamma F$ und jenen

„ Hinteraxe $P_2 = P'' + \gamma' F - F' \sin\beta$,

somit den ganzen Druck

der Vorderaxe $Q' = \sqrt{P_1^2 + F^2 \cos^2(\alpha+\beta)}$,

„ Hinteraxe $Q'' = \sqrt{P_2^2 + F'^2 \cos^2\beta}$

und daher die Reibung an ersterer $= k'Q'$, an letzterer $= k'Q''$.

Da nun bei der Bewegung des Wagens auf dem Wege L die Kräfte oder Widerstände

$$R',\ R'',\ F',\ F,\ k'Q',\ k'Q'',\ P'+p',\ P''+p''$$

bezüglich die Wege

$$L,\ L,\ L,\ L\cos\alpha,\ \frac{\rho' L}{r'},\ \frac{\rho'' L}{r''},\ h = L\sin\beta,\ h = L\sin\beta$$

zurücklegen, so hat man nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten für das Vordergestell die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad FL\cos\alpha = R'L + F'L \pm (P'+p')h + \frac{k'\rho'}{r'} LQ'$$

und für das Hintergestell

$$\text{(b)} \qquad F'L = R''L \pm (P''+p'')h + \frac{k'\rho''}{r''} LQ'',$$

wo das obere Zeichen bei steigender, das untere bei fallender Fahrbahn zu nehmen ist.

Werden in diesen bei den Gleichungen die Werthe von Q' und Q'', dann die von P_1 und P_2 substituirt; so erhält man nach der Elimination von F' aus beiden Gleichungen zur Bestimmung von F eine so zusammengesetzte Gleichung, daß wir dazu das in der Note zu §. 146 angegebene Verfahren hier anwenden wollen. Da nemlich bei der Kleinheit der Winkel α und β nahe $\sin\alpha$ und $\sin(\alpha+\beta)$ für Null, $\cos\beta$ und $\cos(\alpha+\beta)$ nahe für die Einheit angenommen werden können, sonach γ und γ' kleiner als die Einheit sind, ferner F im ungünstigen Falle noch nicht $\frac{1}{6}P'$ erreicht und F' noch kleiner ist; so kann man für angenäherte Werthe von F und F', die wir mit F_0 und F'_0 bezeichnen, $Q' = P'$ und $Q'' = P''$ annehmen. In diesem Falle werden die Gleichungen (a) und (b)

$$F_0\cos\alpha = R' + F'_0 \pm (P'+p')\frac{h}{L} + \frac{k'\rho'}{r'} \cdot P',$$

$$(c) \qquad F_0 = R'' \pm (P'' + p'') \frac{h}{L} + \frac{k'\rho''}{r''} \cdot P''.$$

Die letzte Gleichung gibt F_0' und aus der Summe beider folgt

$$(d) \quad F_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\left\{R' + R'' \pm (P + p' + p'') \frac{h}{L} + \frac{k'\rho'}{r'} P' + \frac{k'\rho''}{r''} P''\right\}.$$

Für $$\frac{F_0 \cos(\alpha+\beta)}{P' - \gamma F_0} = \delta, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} = \delta',$$

$$\frac{F_0' \cos\beta}{P'' + \gamma' F_0 - F_0' \sin\beta} = \delta_1, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\delta_1^2}} = \delta_1',$$

hat man der genannten Note gemäß

$$Q' = [\delta F \cos(\alpha+\beta) + P' - \gamma F]\delta',$$

$$Q'' = [\delta_1 F' \cos\beta + P'' + \gamma' F - F' \sin\beta]\,\delta_1',$$

daher für die Gleichungen (a) und (b), wenn man dieselben zugleich nach F und F' ordnet, dabei $\delta\cos(\alpha+\beta) - \gamma = \triangle$, $\delta_1 \cos\beta - \sin\beta = \triangle_1$ setzt,

$$F\left(\cos\alpha - \frac{k'\rho'\delta'}{r'}\triangle\right) - F' = R' \pm (P' + p')\frac{h}{L} + \frac{k'\rho'\delta'}{r'} P',$$

$$-F\frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\gamma' + F'\left(1 - \frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\cdot\triangle_1\right) = R'' \pm (P'' + p'')\frac{h}{L} + \frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\cdot P''.$$

Eliminirt man daraus F', so hat man für die Zugkraft

$$(1) \quad F = \frac{R' + R'' - \frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\triangle_1 R' \pm (P + p' + p'')\frac{h}{L} \mp (P' + p')\frac{h}{L}\cdot\frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\triangle_1}{\left(\cos\alpha - \frac{k'\rho'\delta'}{r'}\triangle\right)\left(1 - \frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\triangle_1\right) - \frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\gamma'} +$$

$$+ \frac{k'\left(\frac{\rho'\delta' P'}{r'} + \frac{\rho''\delta' P''}{r''}\right) - \frac{k'^2\rho'\rho''\delta'\delta_1'}{r'r''}\triangle_1 P'}{\left(\cos\alpha - \frac{k'\delta'\rho'}{r'}\triangle\right)\left(1 - \frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\triangle_1\right) - \frac{k'\rho''\delta_1'}{r''}\gamma'}.$$

§. 263. Nach Versuchen von *Morin* und Andern ist der Widerstand des Rades an der Fahrbahn dem Drucke gerad und dem Halbmesser des Rades umgekehrt proportional, so daß, wenn A einen Coefficienten bedeutet und zuerst das Vorder- und dann das Hintergestell genommen wird,

$$(a) \quad R' = A.\frac{P'+p'}{r'}, \quad R'' = A.\frac{P''+p''}{r''}, \text{ also}$$

$$R'+R'' = A\left(\frac{P'+p'}{r'}+\frac{P''+p''}{r''}\right) = R$$

gesetzt werden kann.

1) Ist die Belastung des Vorder- und Hintergestells im Verhältnisse der Halbmesser ihrer Räder, nemlich

$$\frac{P'+p'}{r'} = \frac{P''+p''}{r''} = \frac{P+p'+p''}{r'+r''}, \text{ so wird}$$

$$(b) \quad R'+R'' = 2A\frac{P+p'+p''}{r'+r''} = R_1 \text{ und } R' = R'' = A\frac{P+p'+p''}{r'+r''}.$$

2) Ist dagegen die Belastung des Vordergestelles im größern Verhältnisse, etwa

$$\frac{P'+p'}{r'} = \frac{P''+p''+2\theta}{r''}; \text{ so ergibt sich für } R \text{ in (a)}$$

$$(c) \quad 2A\frac{P''+p''+\theta}{r''} = R_2 \text{ und da auch in (b) } R_1 = 2A\frac{P''+p''}{r''} \text{ ist;}$$

so wird $\frac{R_2}{R_1} = \left(1+\frac{\theta}{P''+p''}\right) > 1$; d. h. um den Widerstand eines vierräderigen Fuhrwerkes nicht unnöthig zu vergrößern, soll man niemals das Vordergestell im größeren Verhältnisse als seinem Radhalbmesser entsprechend belasten.

§. 264. Setzt man für den Fall 1) vorig. §. den Werth von R' und R'' in die Gleich. (1) (§. 262) und läßt die mit $\frac{k'^2\rho'\rho''}{r'r''}$ multiplicirten Glieder als sehr klein hinweg; so hat man

$$(2) \quad F = \frac{(P+p'+p'')\left[\frac{A}{r'+r''}\left(2-\frac{k'\rho''\delta'_1}{r''}\triangle_1\right)\pm\frac{h}{L}\left(1-\frac{r'}{r'+r''}\cdot\frac{k'\rho''\delta'_1}{r''}\triangle_1\right)\right]}{\cos\alpha - k'\left[\frac{\rho'\delta'\triangle}{r'}+\frac{\rho''\delta'_1}{r''}(\triangle_1\cos\alpha+\gamma')\right]} +$$

$$+\frac{k'\left(\frac{\rho'\delta'}{r'}P'+\frac{\rho''\delta'_1}{r''}P''\right)}{\cos\alpha - k'\left[\frac{\rho'\delta'\triangle}{r'}+\frac{\rho''\delta'_1}{r''}(\triangle_1\cos\alpha+\gamma')\right]}.$$

Wird $\delta = \delta_1 = 0$ wegen der so kleinen Werthe von δ und δ_1, also $\delta' = \delta'_1 = 1$, ferner der kleinen Winkel α und β wegen

$\sin\alpha = \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) = 0$, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) = 1$ angenommen, wodurch

$$\gamma = \gamma' = \frac{q}{l}, \Delta = -\gamma = -\frac{q}{l}, \Delta_1 = 0$$

wird und setzt man überdies bei gleicher Felgenbreite der Vorder- und Hinterräder nahe

$$\frac{p'}{r'} = \frac{p''}{r''} = \frac{p'+p''}{r'+r''},$$

daher nach 1) vorig. §. auch

$$\frac{P'}{r'} = \frac{P''}{r''} = \frac{P}{r'+r''};$$

so verwandelt sich nach allen diesen Annahmen die Formel (2) in

$$(3) \quad F = \frac{P\left[\frac{2A+k'(\rho'+\rho'')}{r'+r''} \pm \frac{h}{L}\right] + (p'+p'')\left(\frac{2A}{r'+r''} \pm \frac{h}{L}\right)}{1 + \frac{k'q}{l}\left(\frac{\rho'}{r'} - \frac{\rho''}{r''}\right)},$$

woraus man sieht, daß q oder die Lage des Schwerpunctes auf F keinen Einfluß hat, wenn

$$\rho' : r' = \rho'' : r'', \text{ oder auch } \rho' = \rho'' \text{ und zugleich } r' = r''$$

ist.

Was endlich den lineären Coefficienten A betrifft, so hat man nach *Morin's* Versuchen für die Felgenbreite d in Wiener Zollen

$A = 3{\cdot}47 - 0{\cdot}142.d$ auf $4\frac{1}{2}$ bis $5\frac{1}{2}''$ tiefem Kies mit Sand untermengt,

$A = 2{\cdot}15 - 0{\cdot}071.d$ auf weicher Erde,

$A = 1{\cdot}36 - 0{\cdot}045.d$ auf festem, trockenem Rasenboden,

$A = 1{\cdot}24 - 0{\cdot}007.d$ auf wenig fester Kiesbahn,

$A = 1{\cdot}74 - 0{\cdot}010.d$ auf mittelmäßig unterhaltener, mit Koth bedeckter Schotterstraße,

$A = 0{\cdot}41 - 0{\cdot}006.d$ auf gut unterhaltener, mit Kies überführter, fest gewordener Bahn, deren Oberfläche kleine Geschiebe zeigt.

Überdies nimmt A auf Schotterstraßen und auf dem Pflaster mit der Fahrgeschwindigkeit zu.

§. 265. Bei schon vorhandenen Maschinen sucht man die mechanische Wirkung derselben häufig durch Versuche zu ermitteln, um entweder

die darüber aufgestellten Bewegungsformeln durch Correctionen verläßlicher zu machen, oder um auch schneller zur Kenntniß dieser Wirkung zu gelangen. Man hat hiezu mehr oder weniger angemessene Vorrichtungen erdacht.

Zur Messung der mechanischen Wirkung bei fortschreitender Bewegung, wie bei einem Fuhrwerke, oder zur Messung der Kräfte von Menschen und Thieren wendet man Gewichte, vortheilhafter aber die Federwage (Dynamometer) von ***Regnier*** an. Für veränderliche Bewegungen erhielt letztere eine solche Einrichtung, daß ein Stift die mechanische Wirkung für die beobachteten Zeiten und zurückgelegten Wege beschreibt. Mehr hierüber in Verdam's Grundsätzen der angewandten Werkzeugswissenschaft und Mechanik, in Kaiser's Handbuch der Mechanik u. m. a.

Für das Messen der mechanischen Wirkung bei drehenden Bewegungen von Wellen bedient man sich vorzugsweise der ***Prony***'schen Bremse. Es sei **A** (Fig. 163) die Welle, an welche die Bremse anzulegen ist, die zu diesem Zwecke aus zwei Stücken **BC** und **DE** besteht, zwischen denen die Welle mittels Schrauben **B** und **C** fest eingeklemmt wird. An dem Bremsenarme **DE** ist bei **D** eine Wagschale mit Gewichten oder wie Fig. 163. **a** ein Dynamometer angebracht. Damit aber bei der Drehung der Welle der Arm **DE** weder überschlagen noch durch zu großes Gegengewicht sinken könne, so sind in **F** und **G** zwei Widerlagen, zwischen welchen die Bewegung des Armes beschränkt ist.

Bevor man die Bremse anlegt, läßt man die Maschine gehen, beobachtet die Umdrehungsanzahl n der betreffenden Welle während einer gewissen Zeit t (Secunden) und bestimmt hieraus die Anzahl Umdrehungen während einer Secunde. Bringt man hierauf die Last außer Verbindung mit der Maschine, so würde sich dann die Welle bei freigelassener Maschine gleich schneller drehen. Damit aber die Umdrehungen auf jene Anzahl zurückgeführt werden, so legt man nun die Bremse so fest an, daß ihre Reibung am Umfange der Welle dasselbe statische Moment wie die Last darbietet. Es muß nemlich, wenn R die Reibung, r den Halbmesser der Welle, Q die Last und a ihren Hebelsarm bezeichnet, $Rr = Qa$ stattfinden. Wird ferner während der Drehung bei angelegter Bremse der Arm **DE** durch ein Gegengewicht in der Wagschale horizontal erhalten und ist Q_1 dieses Gegengewicht sammt dem Gewichte der Bremse, a_1 der horizontale Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes beider Gewichte vom Mittelpuncte der Welle; so wird wegen des Gleichgewichtes des Gegengewichtes sammt Bremse mit der Reibung

$$Q_1 a_1 = Rr, \text{ sofort } Qa = Q_1 a_1 = Rr.$$

Nun ist $2r\pi.\frac{n}{t}$ der Weg der Reibung in einer Secunde, somit

$$\frac{2r\pi n}{t}R=\frac{2\pi n}{t}Q_1a_1 \quad \text{, oder in Pferdekräften} \quad \frac{2\pi nQ_1a_1}{t.424}=\frac{2nQ_1a_1}{135.t}$$

die mechanische Arbeit der Welle.

Die Last selbst ist $Q=\frac{Q_1a_1}{a}$.

Wäre P die Kraft an der ersten Welle und davon der Theil F nöthig, um der Last Q mit Rücksicht der andern Hindernisse der Bewegung Gleichgewicht zu halten, daher $P-F$ die bewegende Kraft und $\mu(P-F)$ auf den Hebelsarm der Last reducirt, wo μ ein aus der Verbindung der Maschinentheile leicht zu bestimmender Verhältniß-Quotient ist. Ist ferner U das Gewicht der eben dahin reducirten Massen der Maschinentheile, so ist die Beschleunigung der Last $G=\frac{\mu g(P-F)}{U+Q}$. Bringt man nun während der Bewegung der Maschine, wo die Last die Geschwindigkeit $\frac{2a\pi}{t}.n$ hat, schnell die Kraft P hinweg oder ihre Welle außer Verbindung mit der Maschine; so wird bei der von jetzt an mit der Anfangsgeschwindigkeit $\frac{2a\pi}{t}.n$ eintretenden verzögerten Bewegung $\frac{\mu gF}{U+Q}$ ihre Beschleunigung sein. Ist sonach T die beobachtete Zeit dieser Bewegung bis zu ihrem Aufhören, so ist nach §. 213

$$\frac{gF\mu}{U+Q}.T=\frac{2a\pi}{t}.n.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung die Last Q, welche auch in F enthalten ist, so ergibt sich die mechanische Wirkung derselben $\frac{2a\pi}{t}.n.Q$, ohne Bremse.

Ein anderes Mittel ohne Bremse ist, wenn man in gleichen Zeiten t die Umdrehungsanzahlen n und n' der Lastwelle mit und ohne Last beobachtet, und aus den dafür geltenden Gleichungen

$$\frac{g\mu(P-F)}{U+Q}.\frac{t^2}{2}=2a\pi.n, \qquad \frac{g\mu(P-F}{U}).\frac{t^2}{2}=2a\pi.n',$$

wo F, aber nicht F', die Last Q enthält, sowohl P als Q bestimmt; denn man hat dann $\frac{2a\pi}{t}.n.P\mu$ und $\frac{2a\pi}{t}.n.Q$ bezüglich für die mechanische Arbeit an der Kraft- und Lastwelle.

Ist Q kein Gewicht, sondern blos ein Widerstand, wie am Bohrer einer Bohrmaschine, wie am Laufer einer Mahlmühle oder dgl., so ist auch im Nenner der ersten Gleichungen $Q = 0$ zu setzen.

Auf diese Art kann man bei einer bestehenden Maschine, die durch irgend einen Beweger getrieben wird, einen andern Beweger angeben, der dieselbe mechanische Wirkung hervorbringt. Z. B. die Maschine wäre durch Wasser getrieben und man wollte dieses durch eine Dampfmaschine als Beweger ersetzen; so muß man vorerst suchen, mit wie viel Pferdekräften die Welle des Schwungrades der anzulegenden Dampfmaschine arbeiten müssen wird.

Anmerkung. Über die Arbeiten verschiedener Maschinen findet man Erfahrungsresultate in Kaiser's Handbuch der Mechanik, Verdam's Werkzeugswissenschaft, *Aide-mémoire de mécanique pratique par Morin*, *cours de machines à l'usage des officiers d'Artillerie par Migout et Bergery* u. s. w.

Achter Abschnitt.

Wirkung des Stoßes geschwungener Körper.

§. 266. Wenn ein Körper von dem Gewichte P und der Masse $M = \frac{P}{g}$ (Fig. 164) um die Axe C aus der Lage CA in die verticale Lage CD frei schwingt und ihn bei B ein ruhender Körper von dem Gewichte p und der Masse $m = \frac{p}{g}$ am freien Weiterschwingen hindert; so wird er diesen letztern Körper hinwegstoßen und ihm eine gewisse Geschwindigkeit v, die zu bestimmen ist, beibringen.

Ist $\varkappa^2 M$ das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers, ω die seinem Elongationswinkel β entsprechende Winkelgeschwindigkeit, dann $CD = x$; so wird $\frac{\varkappa^2 M}{x^2}$ die auf D reducirte Masse desselben und $x\omega$ die Geschwindigkeit dieser Masse in B, folglich nach §. 228

$$(1) \qquad v = \frac{\alpha . x\omega . \frac{\varkappa^2 M}{x^2}}{\frac{\varkappa^2 M}{x^2} + m} = \frac{\alpha x \omega . \varkappa^2 M}{\varkappa^2 M + x^2 m},$$

wo α den Elasticitäts-Coefficienten vorstellt.

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit g, so ist auch

$$(2) \qquad v = \frac{\alpha . x\omega . \varkappa^2 P}{\varkappa^2 P + x^2 p}.$$

Bezeichnet L den Abstand des Schwingungspunctes **R** und a den des Schwerpunctes von **C**, so ist $\varkappa^2 P = aLP$ (§. 256), die Geschwindigkeit in $\mathbf{R} = \sqrt{2g \,.\, \mathbf{KN}} = \sqrt{2gL(1-\cos\beta)}$ (§. 236), sonach die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\beta)}{L}}$, folglich nach (2)

$$(3) \qquad v = \alpha . \frac{xaP\sqrt{2gL(1-\cos\beta)}}{aLP + x^2 p} . \quad *)$$

Fragt man hier um die Lage des Stoßpunctes **B** oder den Werth von x, damit v am größten wird, so braucht man in dem Bruche $\frac{x}{aLP + x^2 p}$ blos $x + e$ statt x zu setzen, dann denselben nach e in eine Reihe aufzulösen und den Coefficienten der ersten Potenz von e Null zu setzen. Man erhält dadurch

$$aLP - x^2 p = 0, \text{ also } x = \sqrt{\frac{aLP}{p}}$$

und für diesen Werth

$$(4) \qquad v = \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{2gaP}{p}(1-\cos\beta)},$$

unabhängig von L oder dem Schwingungspuncte.

§. 267. Nehmen wir dagegen den schwingenden Körper in Ruhe an und bestimmen seine Winkelgeschwindigkeit ω, welche ihm ein mit der Geschwindigkeit v anstoßender Körper von der Masse m ertheilt; so ist bei den vorigen Benennungen nach §. 227

$$x\omega = \alpha . \frac{vm}{\frac{\varkappa^2 M}{x^2} + m}, \text{ und daraus}$$

$$(1) \qquad \omega = \alpha . \frac{vxp}{aLP + x^2 p} .$$

---

*) Aus dieser Formel kann auch der Elasticitäts-Coefficient α berechnet werden, wenn v auf anderem Wege gefunden ist. Dazu hängt man den Körper m entweder an einen Faden in γ und mißt nach dem Stoße seinen Elongationswinkel $\mathrm{mym'}$, oder man läßt ihn frei abfliegen und berechnet aus seiner Wurfweite $\mathbf{EF} = l$ und Tiefe h nach §. 216

$$v = \sqrt{\frac{g}{2h}(C^2 + 4h^2)}.$$

Ist β der Elongationswinkel nach dem Stoße, sonach $\omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\beta)}{L}}$,

so erhält man aus Gleichung (1) die Geschwindigkeit, womit der Körper m an den M angestoßen hatte,

$$(2) \qquad v = \frac{(aLP + x^2p)\sqrt{2g(1-\cos\beta)}}{axp\sqrt{L}}.$$

Dringt aber m bei dem Stoße in den Körper M ein; so ist der Abstand des Schwingungspunctes nach dem Stoße

$$L' = \frac{aLP + x^2p}{aP + xp}, \text{ sonach } \omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\beta)}{L'}} \text{ und daher nach (1)}$$

$$(3) \qquad v = \frac{\sqrt{2g\,(aP + xp)\,(aLP + x^2p)\,(1-\cos\beta)}}{a \,.\, xp}.$$

Nach dieser Formel kann man die Anfangsgeschwindigkeit der Flinten- und Kanonenkugeln berechnen, welche gegen einen schwingenden Körper abgeschossen werden und welcher deswegen das balistische Pendel heißt. Dasselbe besteht aus einer Eisenstange, die an ihrem obern Ende um stählerne, zugeschärfte Zapfen schwingt und an ihrem untern einen mit Eisen beschlagenen Holzklotz festhält, worauf die Kugeln geschossen werden.

Statt des Holzklotzes wird oft das Geschützrohr mit seiner Seellinie senkrecht an der Stange befestigt und aus dem Schwingungswinkel dieses balistischen Pendels durch den Rückstoß bei dem Schusse die Geschwindigkeit der Kugel bei ihrem Austritte aus der Mündung berechnet. Ist nemlich von der Drehare gerechnet bei diesem Pendel sammt Rohr a der Abstand des Schwer-, L der des Schwingungspunctes, x jener der Seellinie des Rohres, ferner P das Gewicht des Pendels sammt Rohr, p das Gewicht der Kugel sammt Ladung, β der Elongationswinkel nach dem Schusse, endlich v die Geschwindigkeit, womit die Kugel das Rohr verläßt, so ist die anfängliche Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\,(1-\cos\beta)}{L}},$$

$x\omega$ die Rückstoßgeschwindigkeit in der Richtung der Seellinie, $\frac{aLP}{x^2}$ das auf den Abstand der Seellinie reducirte Gewicht des Pendels, daher, wenn F die senkrechte Durchschnittsfläche der Bohrung, f die größte

Kreisfläche der Kugel ist, $\frac{aLPx\omega}{x^2F}$ die Größe der Bewegung des Pendels auf einen Quadratzoll der erstern Fläche und $\frac{vp}{f}$ auf einen Quadratzoll der letztern. Da aber beide Größen der Bewegung von derselben Kraft herrühren, sonach gleich sind; so hat man

$$(4) \qquad v = \frac{aLP}{xp} \cdot \frac{f}{F}\omega = \frac{aP}{xp} \cdot \frac{f}{F}\sqrt{2gL(1-\cos\beta)}.$$

§. 268. Wenn ein Körper vom Gewichte q um eine horizontale Axe in C (Fig. 165) durch die Schwere und eine unveränderliche Kraft p den verticalen Winkel m zu beschreiben gezwungen wird, so fragt es sich, welche Winkelgeschwindigkeit derselbe in der horizontalen Lage CB erhält.

Es sei S der Schwerpunct des Körpers und A der Angriffspunct der Kraft, welche sich nach der Bewegung von CA bis CA′ in S′ und A′ befinden; dabei sei $CS = CS' = a$, $CA = CA' = r$. Zerlegen wir q in die auf einander senkrecht wirkenden Kräfte q' und q'', so ist

$$q' = q\cos(m - \varphi + \varphi')$$

und p auf S reducirt wird $= \frac{rp}{a}$, sofort $\frac{rp}{a} + q\cos(m-\varphi+\varphi')$ die bewegende Kraft in S′. Ferner ist $\frac{V}{a^2}$ für das Trägheitsmoment V des Körpers die auf S′ reducirte Masse, folglich, wenn v_{n-1} die Geschwindigkeit in S′ und v_n die Geschwindigkeit zu Ende des Weges $S's' = a\varphi'$ ist,

$$v_n^2 = v_{n-1}^2 + 2g\frac{\frac{rp}{a} + q\cos(m-\varphi+\varphi')}{V} a^2.a\varphi'$$

oder, wenn das statische Moment $aq = W$ gesetzt wird,

$$v_n^2 = v_{n-1}^2 + 2g\,\frac{rp + W\cos(m-\varphi+\varphi')}{V} a^2\varphi'.$$

Setzt man nun $\varphi = \varphi'$, $2\varphi'$, $3\varphi'$, $\ldots n\varphi'$ und gleichzeitig sowohl $v_{n-1} = 0$, v_1, v_2, v_3, $\ldots v_{n-1}$ als $v_n = v_1$, v_2, v_3, $\ldots v_n$; so erhält man nach und nach die Geschwindigkeitsgleichungen für die Bewegung in den Elementen von S bis s′, aus deren Summen sodann

$$v_n^2 = \frac{2g}{V}\Big\{rpn + W\big[\cos m + \cos(m-\varphi') + \cos(m-2\varphi') + \ldots + \cos[m-(n-1)\varphi']\big]\Big\}a^2\varphi'$$

hervorgeht. Die Reihe der Cosinus ist aber

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi' . \cos[m-\frac{1}{2}(n-1)\varphi']}{\sin\frac{1}{2}\varphi'} = \frac{\sin(m+\frac{1}{2}\varphi')-\sin[m-(n-\frac{1}{2})\varphi']}{2\sin\frac{1}{2}\varphi'},$$

oder da $\varphi = n\varphi'$ und φ' unendlich klein sind,

$$= \frac{\sin m - \sin(m-\varphi)}{\varphi'};$$

folglich

$$v_n^2 = 2g \frac{rp\varphi + W[\sin m - \sin(m-\varphi)]}{V} a^2$$

und für die Winkelgeschwindigkeit $\omega_n = \frac{v_n}{a}$

$$\omega_n^2 = 2g \frac{rp\varphi + W[\sin m - \sin(m-\varphi)]}{V}.$$

Für $\varphi = m$ erhält man daraus die Winkelgeschwindigkeit ω für die Drehung bis **CB**

$$(1) \qquad \omega^2 = 2g \frac{rpm + W\sin m}{V}.$$

Schlägt nun der Körper in **E** auf einen festen Gegenstand und ist $\mathbf{CD} = x$, so ist die Kraft des Schlages das Bewegungsvermögen der dahin reducirten Masse $\frac{V}{x^2}$ mit der Geschwindigkeit $x\omega$ multiplicirt oder

$$(2) \qquad \frac{V\omega}{x} = \frac{\sqrt{2gV(rpm \pm W\sin m)}}{x}.$$

Für einen Hammer, der durch sein eigenes Gewicht von **CA** bis **CB** fällt und in **E** aufschlägt, ist $p = 0$ und wenn man $V = aLq$, $W = aq$ substituirt, wo a und L die Abstände des Schwer- und Schwingungspunctes von der Drehaxe sind, so hat man für den Schlag

$$(3) \qquad \frac{V\omega}{x} = \frac{aq\sqrt{2gL\sin m}}{x};$$

d. h. das statische Moment multiplicirt mit der Fallgeschwindigkeit des Mittelpunctes der Trägheit dividirt durch den Abstand des Schlagpunctes gibt das Maß des Schlages.

§. 269. In dem Falle, wo ein schwingender Körper an einen festen Gegenstand stößt, erhält die Drehaxe einen mehr oder minder nachtheiligen Gegenstoß oder eine Prellung.

Man empfindet dieses oft in der Hand, wenn man mit derselben einen Stab gegen einen festen Gegenstand schlägt.

Um diesen Gegenstoß zu bestimmen, sei C (Fig. 166) die horizontale Drehaxe, um die der Körper in dem Momente, als er bei D an einen festen Gegenstand stößt, die Winkelgeschwindigkeit ω hat, $CD = x$ und $m_1 + m_2 + m_3$ die Masse des Körpers, wobei m_1 den Massentheil von A bis D, m_2 den von D bis C und m_3 jenen von C bis B vorstellen soll. Ferner sollen für die Drehung um C die Trägheitsmomente der ganzen Masse und jener Massentheile bezüglich V, $r_1^2 m_1$, $r_2^2 m_2$, $r_3^2 m_3$ sein, so daß bei der Schwingung m_1 in r_1, m_2 in r_2, m_3 in r_3 vereint gedacht werden kann. Da im Momente des Stoßes an D die Massen m_1, m_2, m_3 die Geschwindigkeiten $r_1\omega$, $r_2\omega$, $r_3\omega$ haben und daher nach dem Stoße um D mit den Größen der Bewegungen $m_1 r_1 \omega$, $m_2 r_2 \omega$, $m_3 r_3 \omega$ schwingen würden, wenn nicht die Axe bei C oder eine an deren Stelle angebrachte Kraft P es verhinderte, wobei m_1 und m_3 in dem einen, m_2 und P in dem entgegengesetzten Sinne um D zu drehen streben; so besteht die Momentengleichung

$$Dr_1 . m_1 r_1 \omega + Dr_3 . m_3 r_3 \omega = Dr_2 . m_2 r_2 \omega + DC . P,$$

woraus wegen

$$Dr_1 = r_1 - x, \quad Dr_3 = r_3 + x, \quad Dr_2 = x - r_2$$

$$[m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 - x(m_1 r_1 + m_2 r_2 - m_3 r_3)]\,\omega = xP$$

folgt. Nun ist

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = V$$

und weil m_1 und m_2 in dem einen, m_3 im entgegengesetzten Sinne um C schwingt, so hat man

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 - m_3 r_3 = W$$

als das statische Moment des Körpers in Bezug auf C, mithin

$$(V - xW)\,\omega = xP \quad \text{oder}$$

$$(1) \qquad P = (V - xW)\,\frac{\omega}{x}.$$

Ist v die Geschwindigkeit in D im Momente des Stoßes, so ist wegen $\omega = \frac{v}{x}$

$$(2) \qquad P = (V - xW)\,\frac{v}{x^2}.$$

Soll nun aber bei dem Schlage auf D die Drehaxe keinen Gegenstoß erleiden, also $P = 0$ sein, so hat man für diese Bedingung

$$(3) \qquad V = xW, \quad \text{oder}$$

$$(4) \qquad x = \frac{V}{W} = L;$$

d. h. die Drehaxe erhält keinen Gegenstoß, wenn der Aufschlagpunct zugleich der Schwingungspunct ist (§. 256.)

§. 270. Zum Schlusse wollen wir unsere Hebel-Pulverprobe betrachten, die einen Winkelhebel mit zwei rechtwinkligen Armen CA und CB bildet (Fig. 167), wovon der eine in A das Mörserchen trägt und an dem andern in B ein Gewicht befestigt ist.

Für die richtige Stellung der Probe muß erstlich bei einem, auf das Mörserchen gegebenen, der Pulverladung gleichgeltenden Gewichtchen das am Ende des Armes CA angebrachte, bewegliche Züngelchen in den Nullpunct H des in Zähne eingetheilten Kreisbogens HG einspielen; ferner muß, wenn statt dieses Gewichtchens auf das Mörserchen ein Rectificirgewicht p aufgesteckt ist, das Züngelchen bei m Graden des Bogens HG einspielen und der Hebel, wenn man ihn bei dem Rectificirgewichte von Nullgrad frei ausläßt, bis zum $2m$ten Grade herabdrehen. Da also das Rectificirgewicht bei m Graden mit der Hebelprobe im Gleichgewichte ist, so muß die drehende Bewegung von 0 bis m Graden beschleunigt, vom $m$ten Grade weiter dagegen verzögert sein.

1) Zur Untersuchung dieser rectificirten Stellung der Probe sei

$$CA = a, \quad CS = b,$$

wo S der Schwerpunct der Probe sammt Mörserchen ohne Rectificirgewicht ist, V sei diesfalls das Trägheitsmoment und L der Abstand des Schwingungspunctes von C. Bei dem Rectificirgewichte hat man, wenn CA um den Winkel $ACD = m$ herabgebracht wird, die Momentengleichung

$$(1) \qquad ap \cos m = bP \sin m.$$

Ferner ist das Trägheitsmoment (§. 256)

$$(2) \qquad V = LbP \text{ ohne Rectificirgewicht und}$$

$$(3) \qquad V' = LbP + a^2p \text{ mit demselben.}$$

Betrachtet man nun die Drehung durch das Rectificirgewicht bis zu dem Winkel $ACA' = \varphi$, so ist in A'

$$\frac{ap\cos\varphi - bP\sin\varphi}{a}$$

die bewegende Kraft und

$$\frac{LbP + a^2p}{a^2}$$

die dahin reducirte Masse, mithin

$$G = ag\,\frac{(ap\cos\varphi - bP\sin\varphi)}{LbP + a^2p}$$

oder bezüglich auf Gleichung (1)

$$G = \frac{ag\sin(m-\varphi)}{a\sin m + L\cos m} = a\gamma\sin(m-\varphi)$$

die Beschleunigung.

Für die weitere Drehung um den sehr kleinen Winkel $A'Ca' = \varphi'$ ist diese Beschleunigung für unveränderlich anzusehen, daher, wenn v_n und v_{n+1} die Geschwindigkeiten in A' und a' sind, wo $a\varphi'$ der zurückgelegte Weg ist,

$$v_{n+1}^2 = v_n^2 + 2a\gamma\sin(m-\varphi).a\varphi'$$

oder für die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_n = \frac{v_n}{a} \text{ und } \omega_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{a}$$

$$\omega_{n+1}^2 = \omega_n^2 + 2\gamma\sin(m-\varphi).\varphi'.$$

Werden nach dieser Gleichung die Geschwindigkeitsgleichungen für die Drehung um $ACA' = \varphi$ in den auf einander folgenden Winkelelementen $\varphi' = \frac{\varphi}{n}$ aufgestellt, indem man

$$\varphi = 0,\ \varphi',\ 2\varphi',\ \ldots\ n\varphi',$$

$$\omega_n = 0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_n,$$

also

$$\omega_{n+1} = \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots\ \omega_{n+1}$$

setzt, so gibt die Summe der erhaltenen Gleichungen

$$\omega_{n+1}^2 = 2\gamma\varphi'[\sin m + \sin(m-\varphi') + \ldots + \sin(m-n\varphi')].$$

Aber es ist $\frac{\frac{1}{2}\cos(m-n\varphi'+\frac{1}{2}\varphi') - \frac{1}{2}\cos(m+\frac{1}{2}\varphi')}{\sin\frac{1}{2}\varphi'}$ oder da $\varphi = n\varphi'$ und φ' unendlich klein sind,

$$\frac{\cos(m-\varphi)-\cos m}{\varphi'}$$

die Summe dieser Reihe; folglich

$$(4) \qquad \omega_{n+1}{}^2 = 2\gamma[\cos(m-\varphi)-\cos m].$$

Für $\varphi = m$ ist diese Winkelgeschwindigkeit $= 2\gamma(1-\cos m)$ am grösten, nimmt für $\varphi > m$ ab und geht für $\varphi = 2m$ in Null über, was zu erweisen war.

2) Ist auf die besagte Art die Probe richtig gestellt, dann das Rectificirgewicht abgenommen, das Mörserchen geladen und der Hebelsarm CA auf Nullgrad der Eintheilung gebracht, so wird abgefeuert. Durch den Rückstoß wird die Probe gedreht und diese Bewegung ist sehr verzögert, weil das Gewicht P immer stärker entgegenwirkt.

Für die Drehung um den Winkel $ACA' = \varphi$ ist $-\frac{bP\sin\varphi}{a}$ die bewegende Kraft in A' und $\frac{LbP}{a^2}$ die dahin reducirte Masse, daher

$$G = -\frac{ga\sin\varphi}{L}$$

die Beschleunigung daselbst, somit die Winkelbeschleunigung

$$\frac{G}{a} = -\frac{g\sin\varphi}{L}.$$

Bezeichnet man bei der Drehung um den sehr kleinen Winkel $A'Ca' = \varphi'$ mit ω_n die Winkelgeschwindigkeit am Anfange und mit ω_{n+1} die zu Ende; so ist

$$\omega_{n+1}{}^2 = \omega_n{}^2 - \frac{2g\sin\varphi}{L}\cdot\varphi'.$$

Beginnt nun die Probe ihre Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit c, so hat man

$$\varphi = 0,\ \varphi',\ 2\varphi',\ \ldots\ n\varphi' = \varphi,$$

$$\omega_n = c,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_n,$$

$$\omega_{n+1} = \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots\ \omega_{n+1}$$

zu setzen und erhält dadurch Gleichungen, deren Summe

$$\omega_{n+1}{}^2 = c^2 - \frac{2g}{L}(\sin\varphi' + \sin 2\varphi' + \ldots + \sin n\varphi')\varphi'$$

ist.

Es ist aber

$$\tfrac{1}{2}\frac{\cos\tfrac{1}{2}\varphi' - \cos(n\varphi' + \tfrac{1}{2}\varphi')}{\sin\tfrac{1}{2}\varphi'} = \frac{1-\cos\varphi}{\varphi'},$$

da $n\varphi' = \varphi$ und φ' unendlich klein sind, die Summe der Sinusreihe, daher

$$(5) \qquad \omega_{n+1}{}^2 = c^2 - \frac{2g}{L}(1-\cos\varphi) = c^2 - \frac{4g}{L}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Hat sich die Probe durch die Pulverkraft um den Winkel n gedreht, wo also $\omega_{n+1} = 0$ ist, so hat man

$$c = 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\sin\tfrac{1}{2}n.$$

Für eine andere Pulverkraft, welche die anfängliche Winkelgeschwindigkeit c' erzeugt und wo die Probe sich um den Winkel n' gedreht hat, ist

$$c' = 2\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\sin\tfrac{1}{2}n',$$

mithin

$$(6) \qquad c : c' = \sin\tfrac{1}{2}n : \sin\tfrac{1}{2}n';$$

d. h. die anfänglichen Geschwindigkeiten, also auch die Pulverkräfte verhalten sich, wie die Sinus der von ihnen hervorgebrachten halben Drehwinkel der Probe.

Demnach sind also die Pulverstärken nicht nach der Anzahl der auf der Probe angegebenen Grade zu vergleichen, sondern nach den Sinus der halben Winkel, die diesen Graden entsprechen. Um dies leicht auszuführen, so sind 200 Probegrade = 60 Winkelgraden, mithin geben N Probegrade $n = \frac{60}{200}N = 0{\cdot}3N$ Winkelgrade. Berechnet man sonach $\sin\frac{1}{2}n = \sin 0{\cdot}15\,N$ für $N = 1, 2, 3, \ldots 200$, und sagt dann für $N = 200$ soll $\sin\frac{1}{2}n = \sin 30'' = \frac{1}{2}$ den Werth 200 haben, so ist wegen $\frac{1}{2} : 200 = \sin 0{\cdot}15N : S$

$$(7) \qquad S = 400\sin 0{\cdot}15\,N$$

der Werth der Pulverkraft nach dem halben Sinus des Winkels der Drehung. Man kann die Werthe von S Sinusgrade nennen und sie mit den entsprechenden Werthen von N in eine Tafel zusammenstellen.

Hat z. B. eine Pulvergattung auf der Probe $N_1, N_2, \ldots N_m$, eine andere Gattung $N', N'', \ldots N^{(m)}$ Grade gegeben und nimmt man für die Stärke das arithmetische Mittel, also

$$P_1 = \frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_m}{m} \text{ für die erste,}$$

$$P' = \frac{N' + N'' + \ldots + N^{(m)}}{m}$$ für die zweite

Gattung, so hat man

(a) $P_1 : P' = (N_1 + N_2 + \ldots + N_m) : (N' + N'' + \ldots + N^{(m)})$.

Nimmt man aber für diese Grade die entsprechenden Sinusgrade, so ist für das erste Pulver

$$P_1 = \frac{400(\sin 0{\cdot}15\, N_1 + \ldots + \sin 0{\cdot}15\, N_m)}{m}$$

und für das zweite

$$P' = \frac{400(\sin 0{\cdot}15\, N' + \ldots + \sin 0{\cdot}15 N^{(m)})}{m}, \text{ also}$$

$P_1 : P' = (\sin 0{\cdot}15 N_1 + \ldots + \sin 0{\cdot}15 N_m) : (\sin 0{\cdot}15 N' + \ldots + \sin 0{\cdot}15 N^{(m)})$,

wo letzteres Verhältniß von jenem (a) um so mehr verschieden sein wird, je verschiedener N_1, N_2, ... N_m von N', N'', ... $N^{(m)}$ ist. Und nur dann werden beide Verhältnisse nahe gleich sein, wenn ohne merklichen Fehler die Bogen ihren Sinus gleich gesetzt werden können, nemlich

$\sin 0{\cdot}15\, N_1 = 0{\cdot}15\, N_1$, $\sin 0{\cdot}15\, N_2 = 0{\cdot}15\, N_2$, u. s. w.

Bei der Hebelprobe, wo die halben Schwingungswinkel niemals 30° erreichen, trifft dies nahe zu. Dagegen ist bei der Stangenprobe der Fehler bedeutend, wenn man die Stangengrade für die Pulverstärken nimmt. Denn sind c und c' die Anfangsgeschwindigkeiten, womit das Gewicht der Probe von zwei Pulvergattungen aufwärts geworfen wird, n und n' die erreichten Grade, denen respective die Höhen h und h' entsprechen; so ist wegen

$$c = \sqrt{2gh}, \quad c' = \sqrt{2gh'}$$

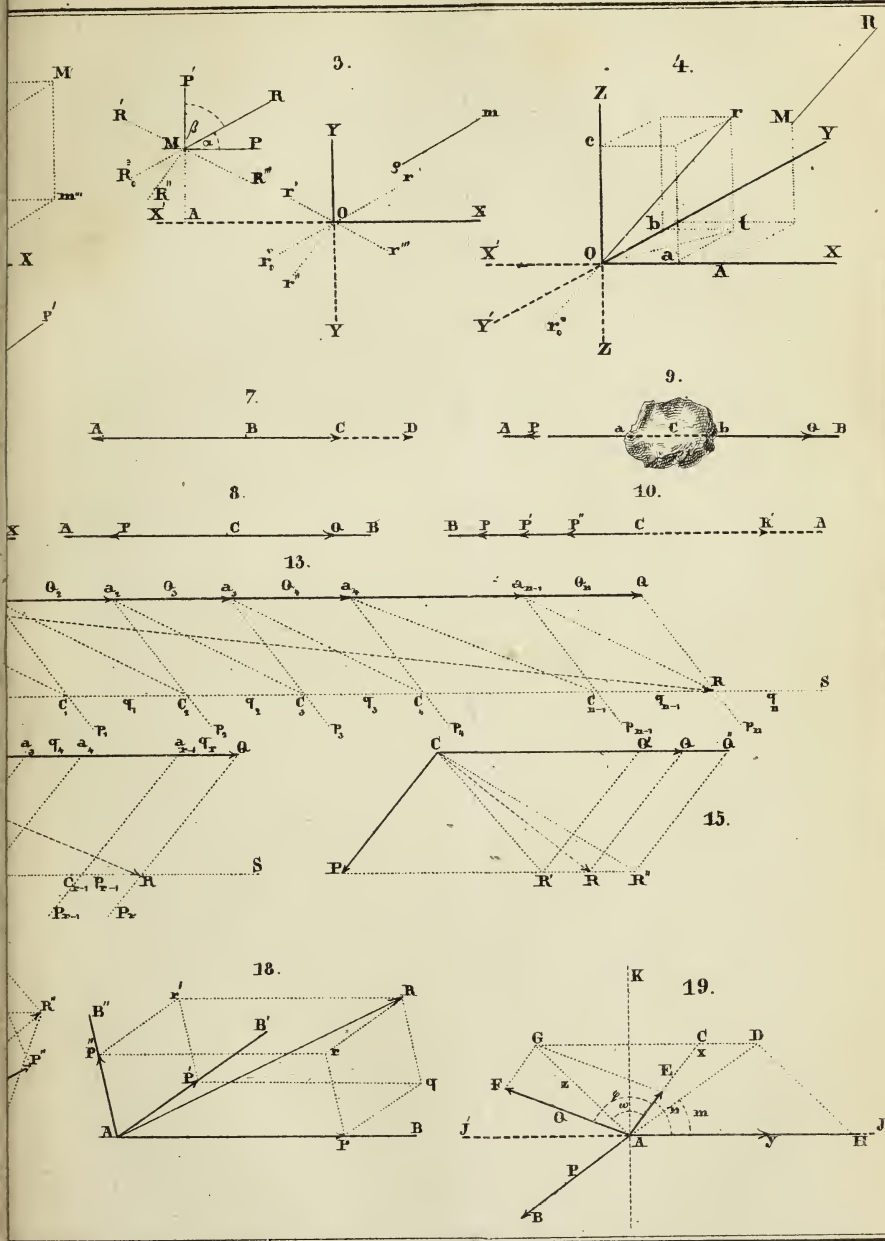
$$n : n' = h : h' \text{ und } c : c' = \sqrt{n} : \sqrt{n'},$$

wonach sich also die Pulverstärken wie die Quadratwurzeln aus der Anzahl Stangengrade verhalten. Man kann auch

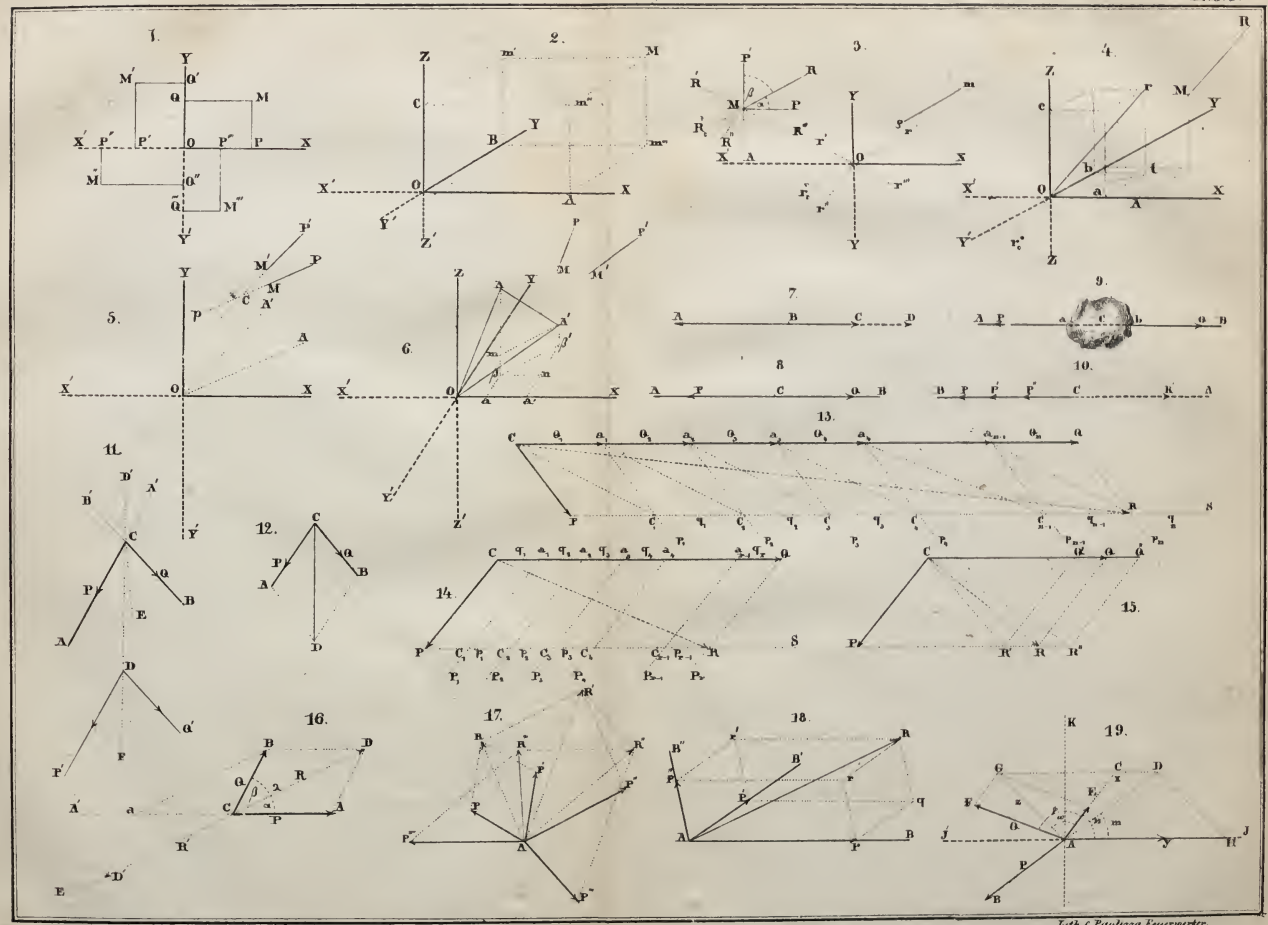
$$c : c' = 10\sqrt{2n} : 10\sqrt{2n'}$$

setzen, wo dann $10\sqrt{2n}$ Quadratwurzelgrade vorstellen, welche für $n = 1, 2, \ldots 200$ zu berechnen, mit n in eine Tafel einzutragen und so, wie bei der vorigen Probe gezeigt worden ist, anzuwenden sind.

Gedruckt bei A. Strauß's sel. Witwe & Sommer.

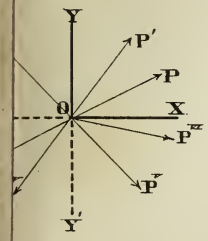


Lith. C. Pauliaza. Feuerwerker.

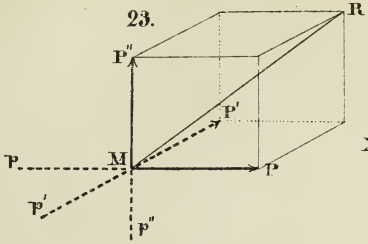


Lith. d. Paultzsch Feuerwerker.

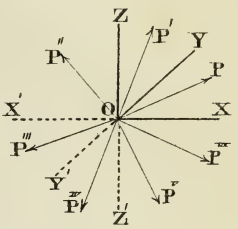
22.



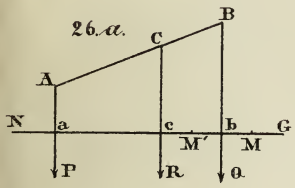
23.



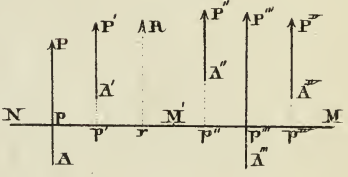
24.



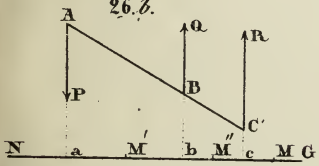
26.a.



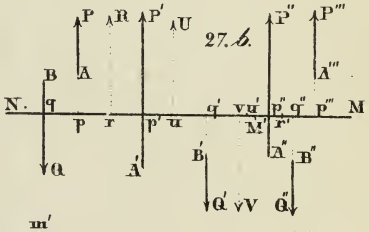
27.a.

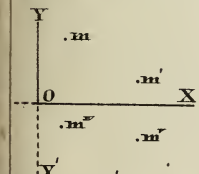


26.b.

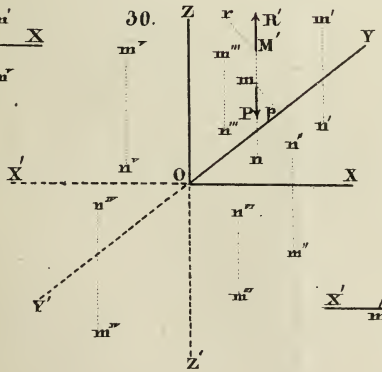


27.b.

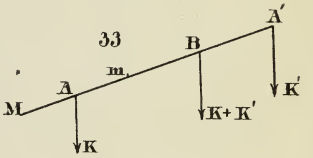




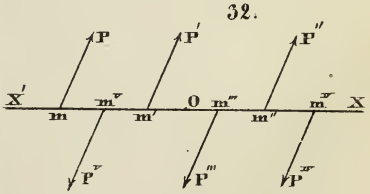
30.

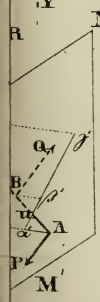


33.

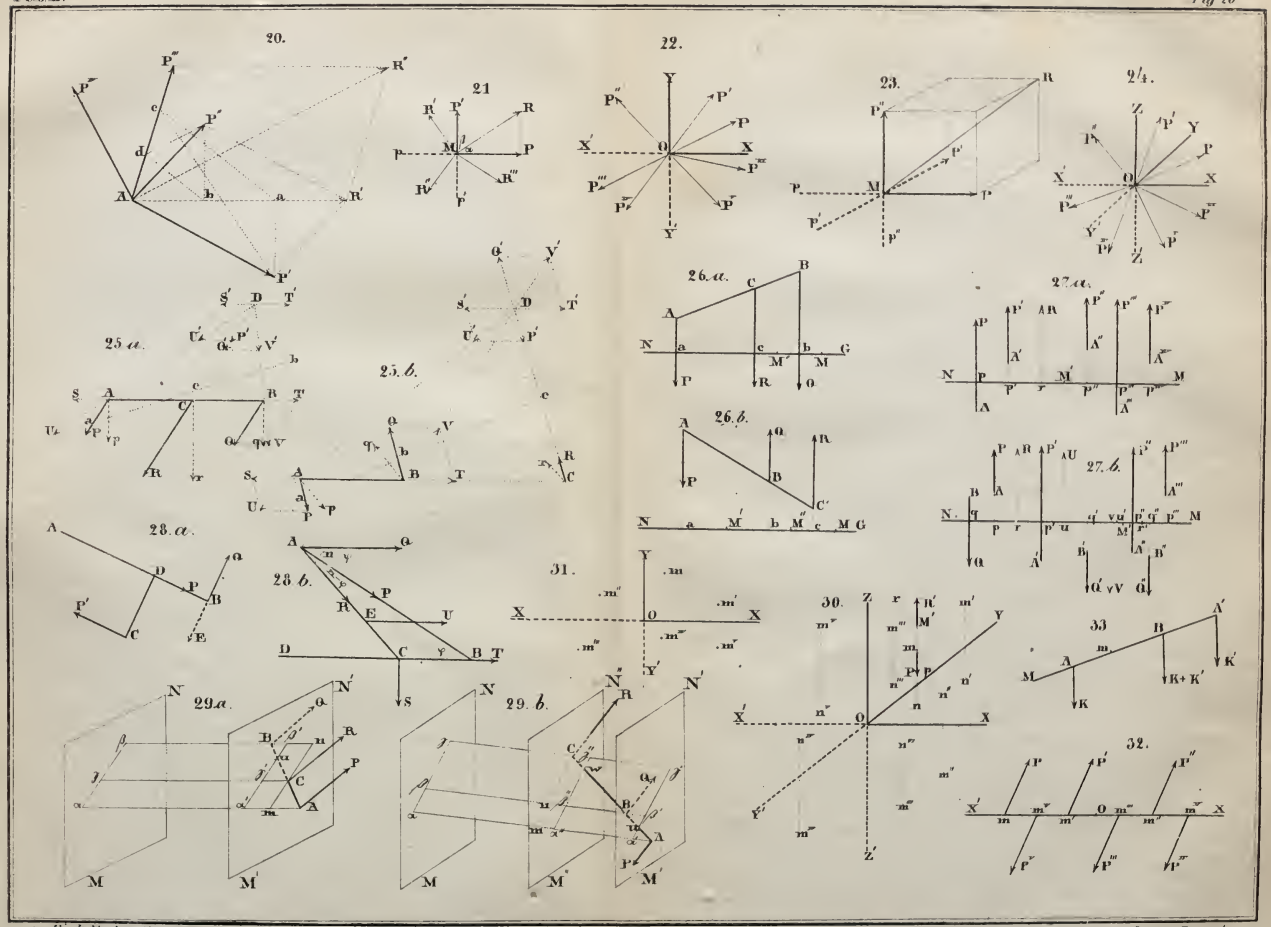


32.



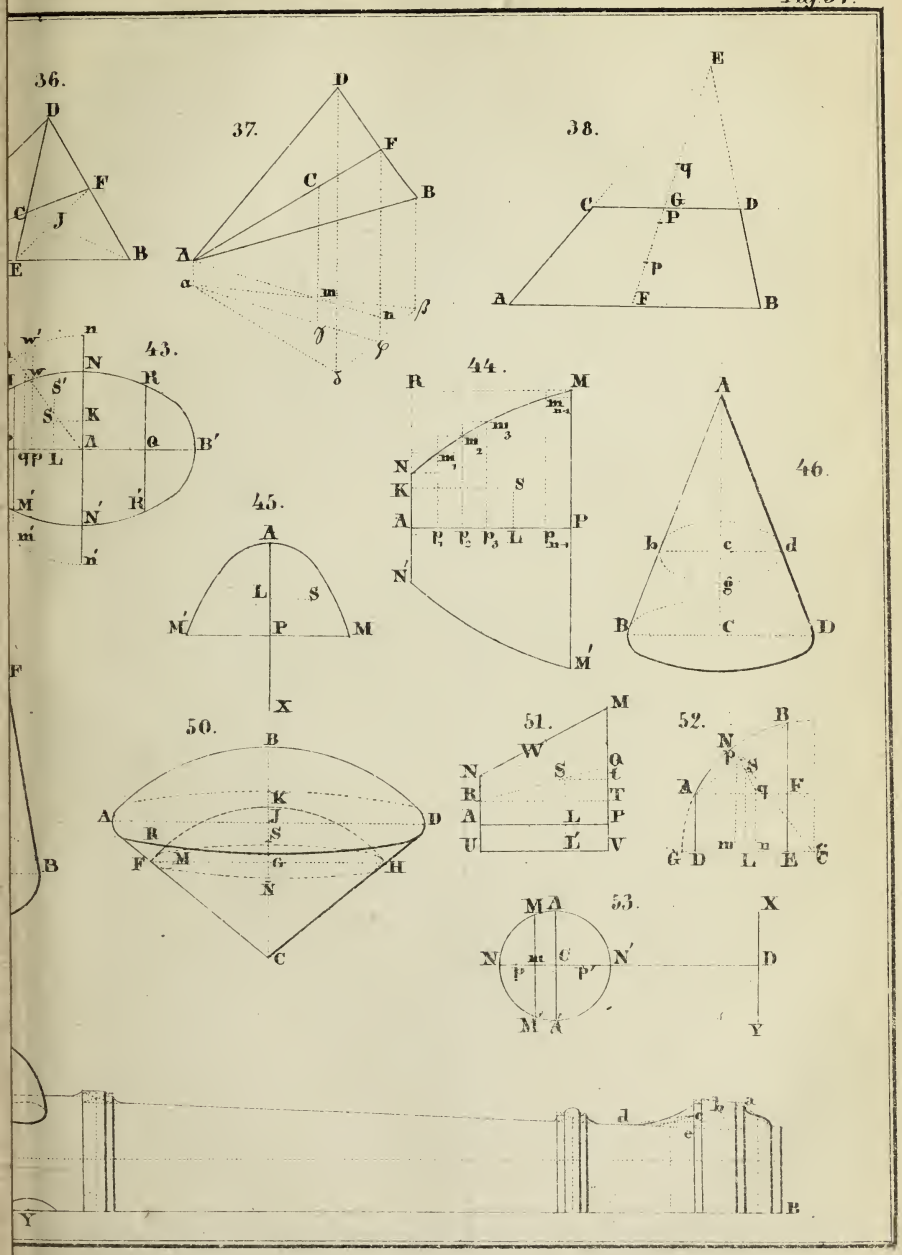


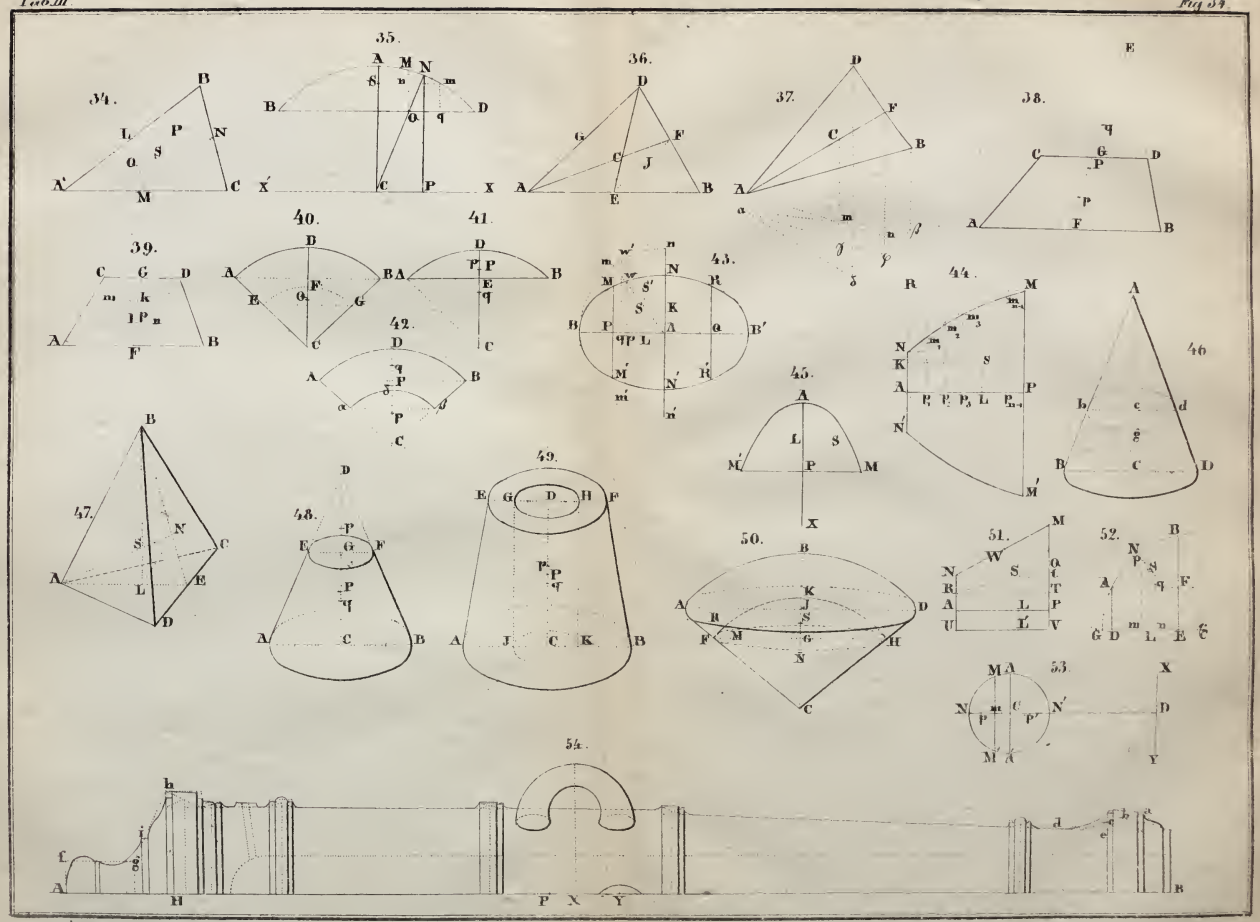
Paulitzsch Fruerwerker.

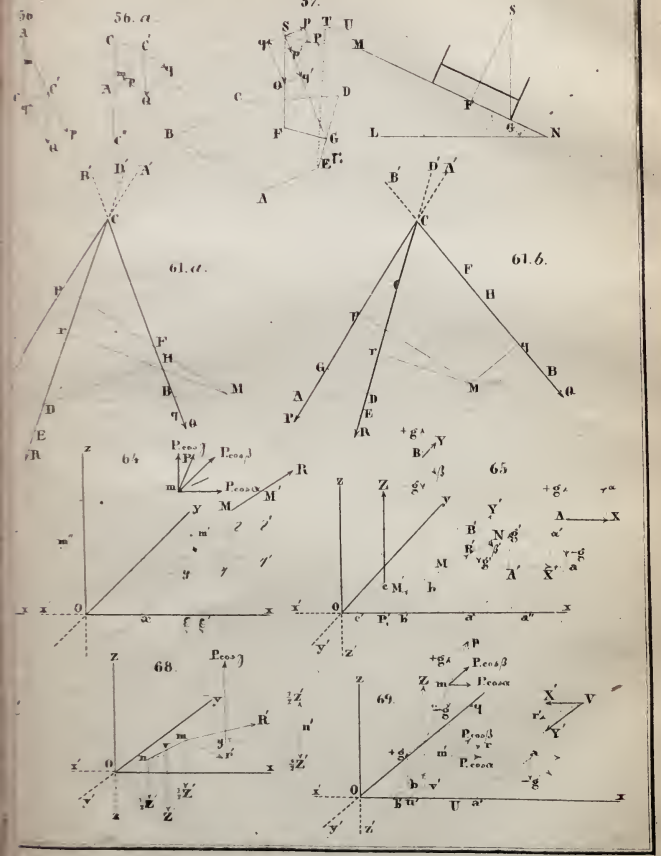


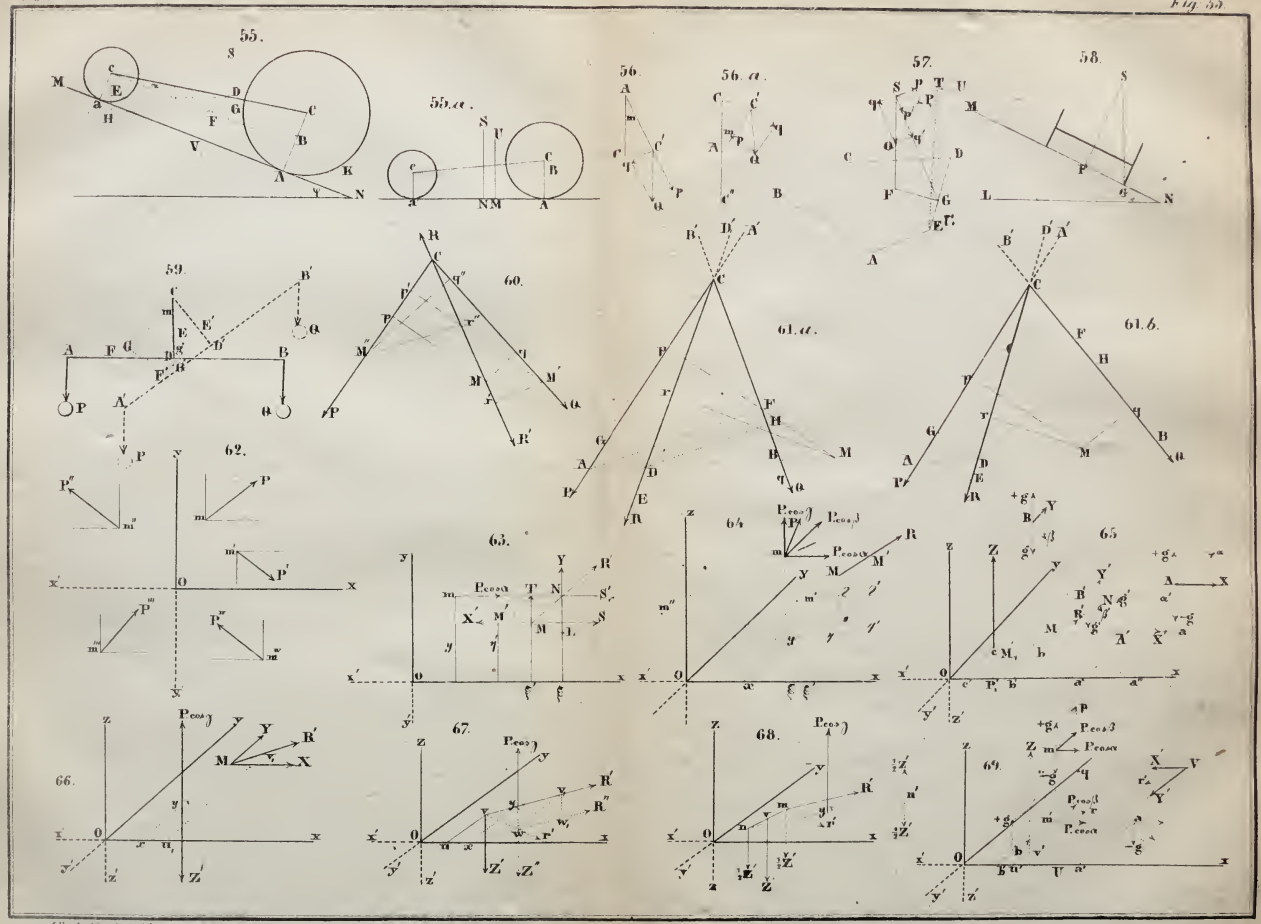
zu Fink Mechanik.

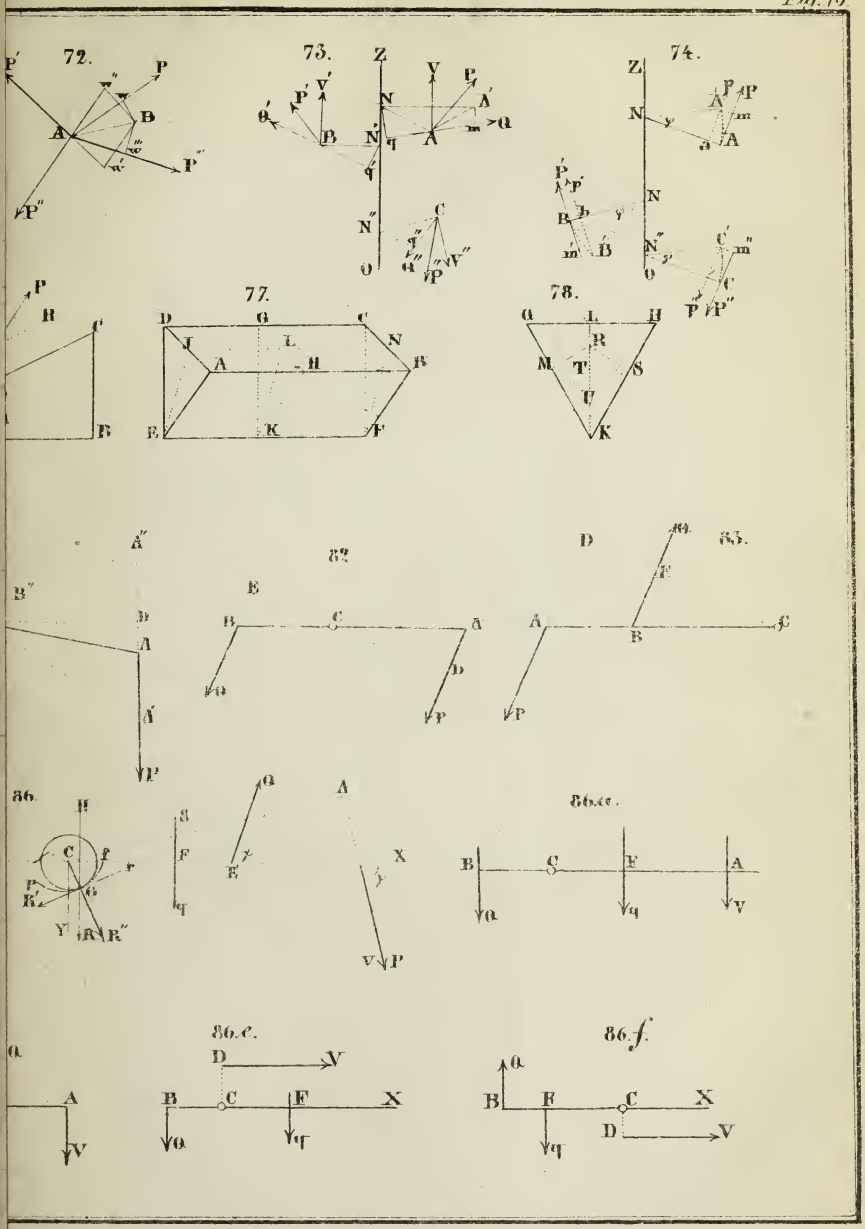
Paulussa Fuerwerker.

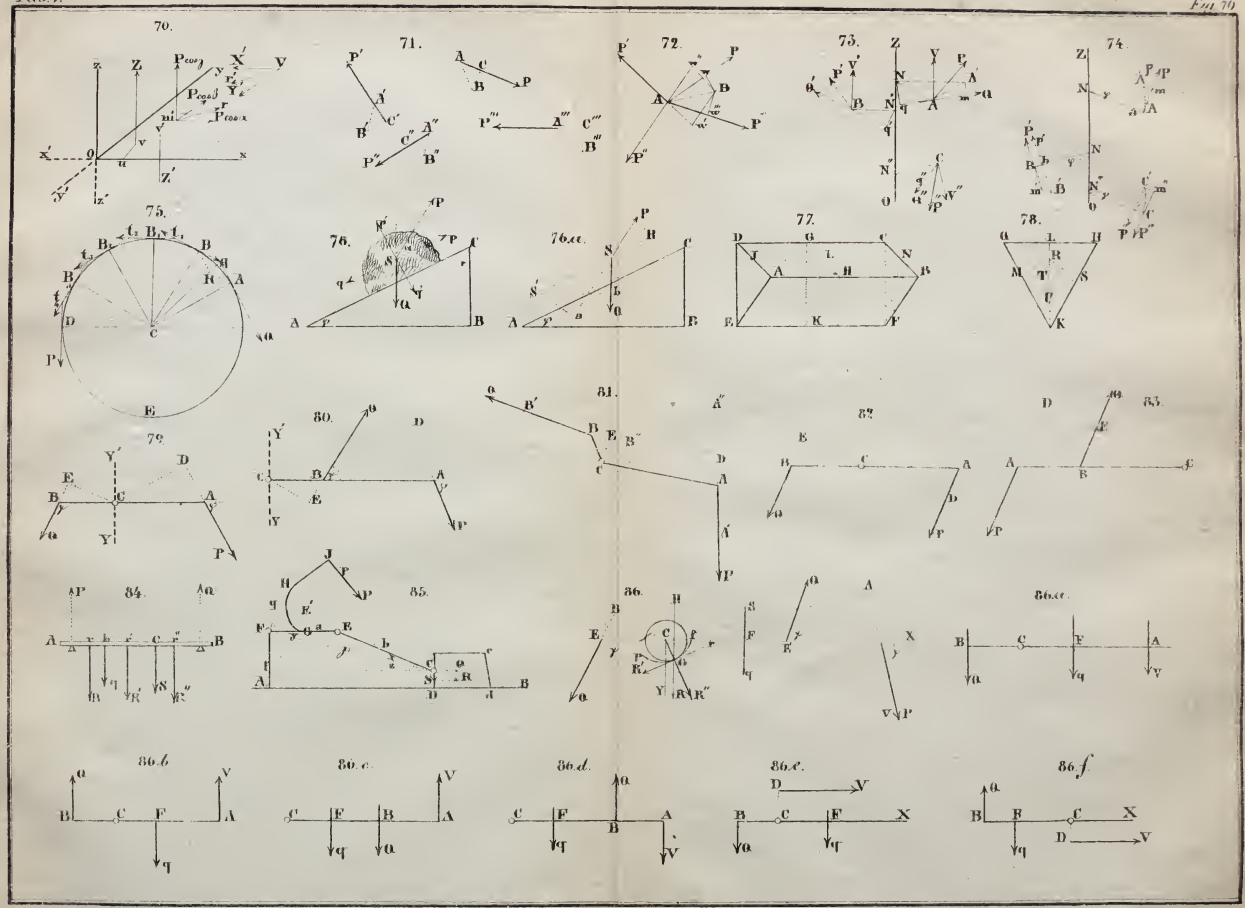

36.
37.
38.
43.
44.
45.
46.
50.
51.
52.
53.

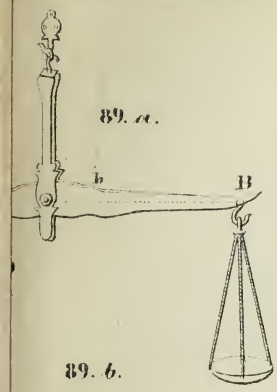

34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.

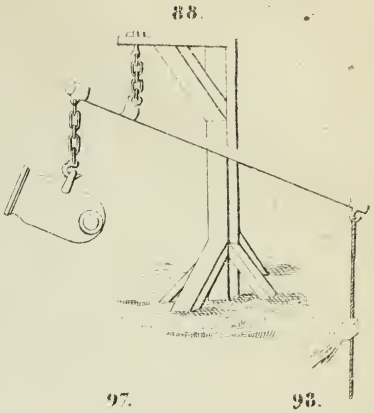

56.
56. a
57.
58.
61. a.
61. b.
64
65
68.
69.

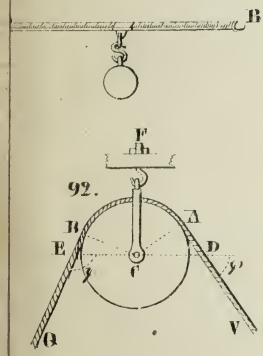

55.
55.a.
56.
56.a.
57.
58.
59.
60.
61.a.
61.b.
62.
63.
64
65
66.
67.
68.
69.

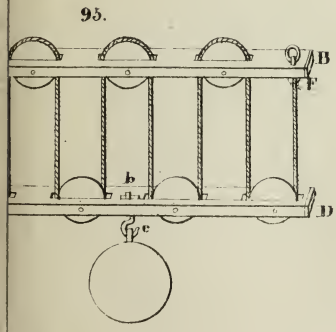

72.
73.
74.
77.
78.
82
83.
86.
86.a.
86.c.
86.f.

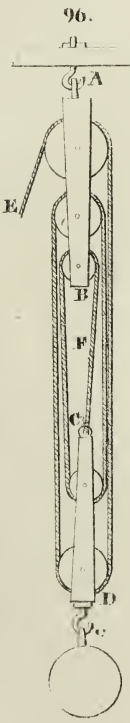

70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
76.a.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
86.a.
86.b
86.c.
86.d.
86.e.
86.f

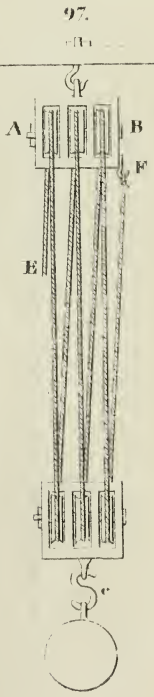

89. a.
b
B
89. b.

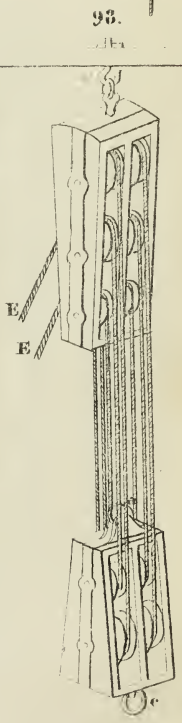

88.

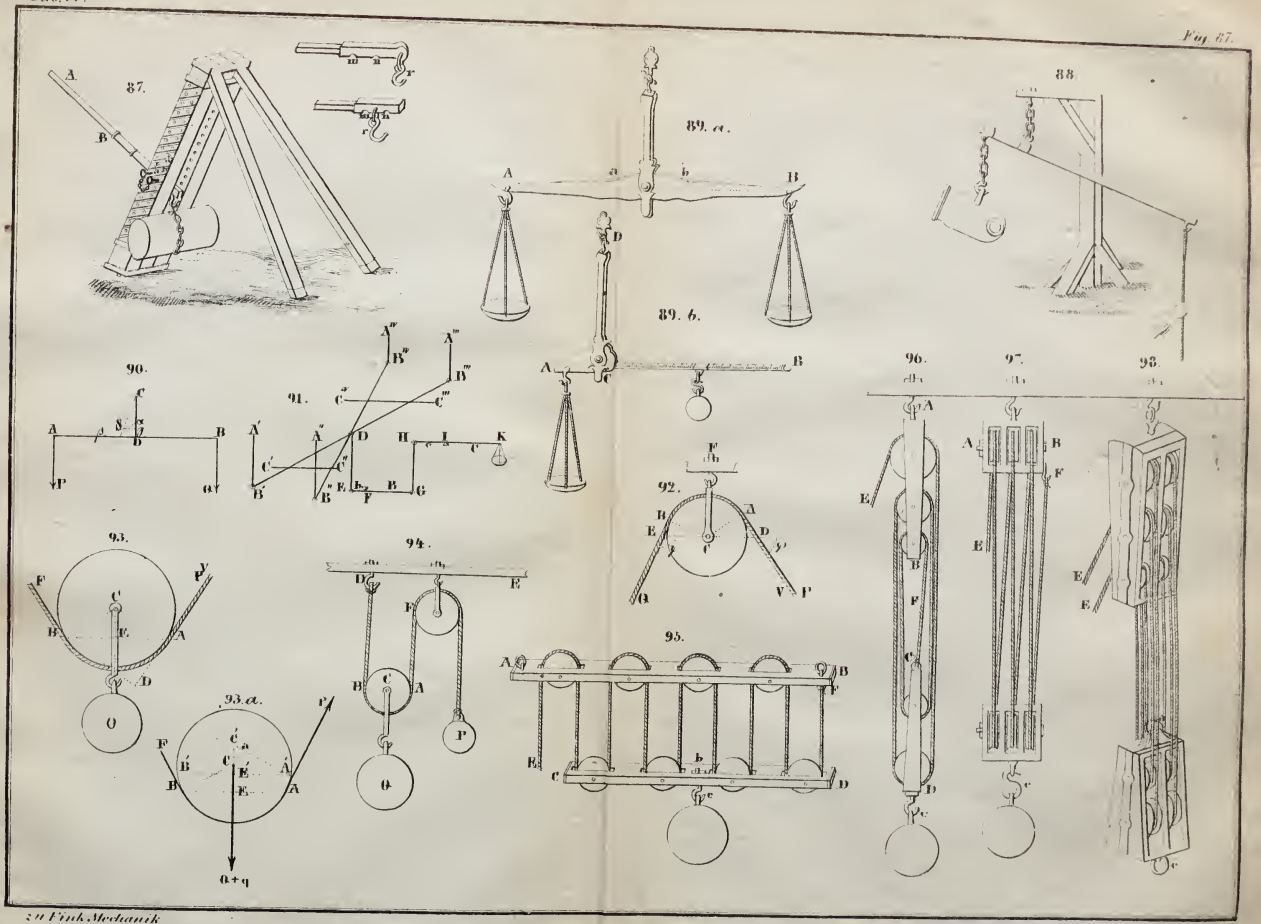

B
F
h
92.
B
E
A
D
C
G
V
F


95.
B
F
b
D
c


96.
A
E
B
F
C
D
c

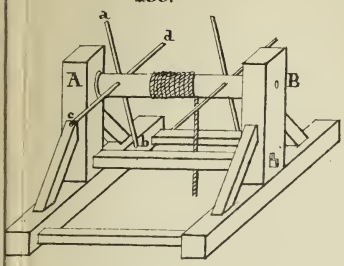

97.
A
B
F
E
c


98.
E
E
c

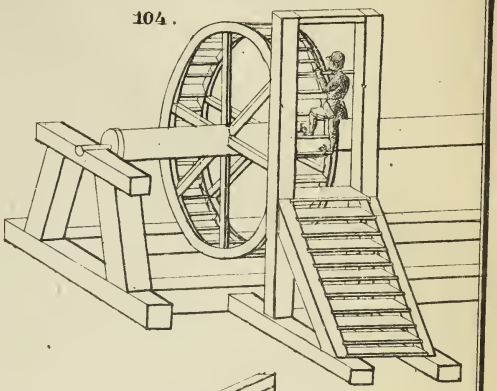


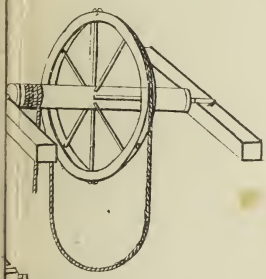
Zu Fink Mechanik

100.

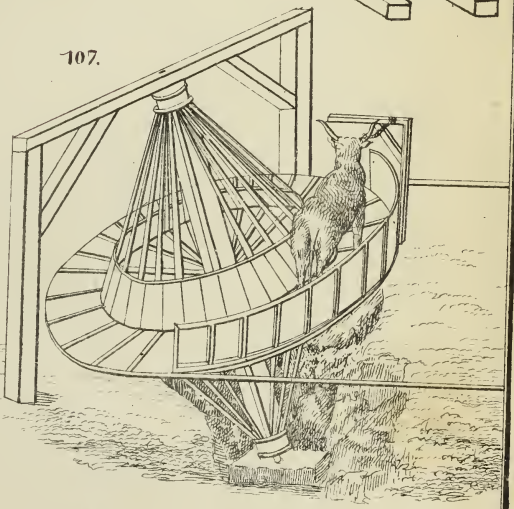


104.

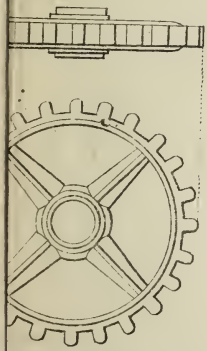




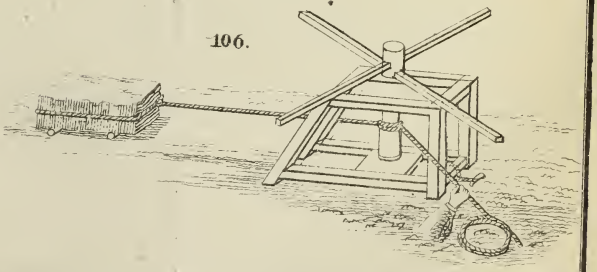
107.



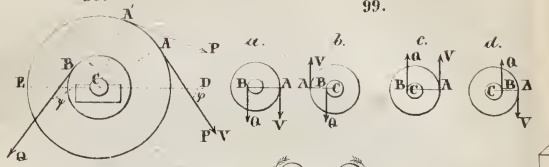
108.



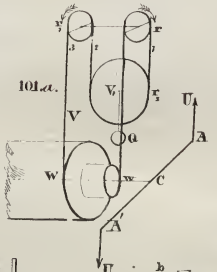
106.



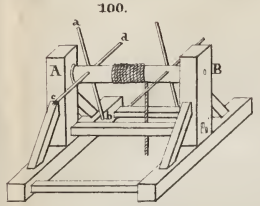
99.



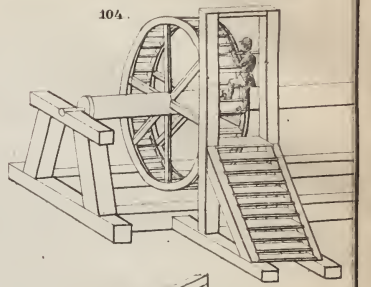
99.



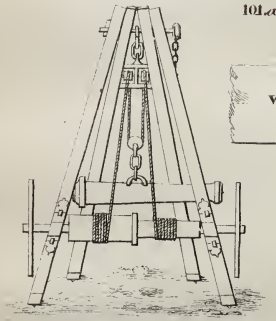
100.



104.

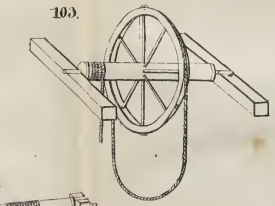


101.

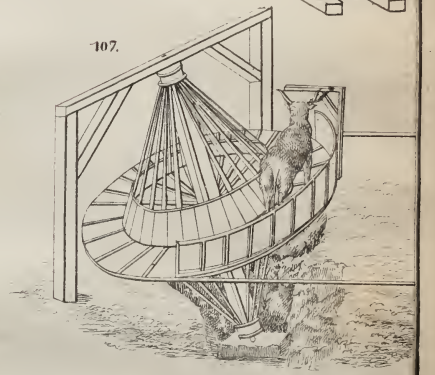


101a.

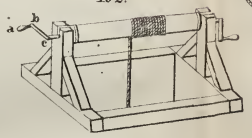
103.



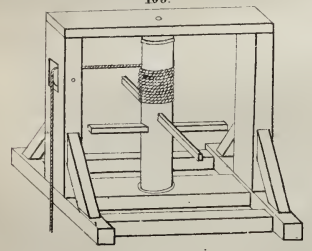
107.



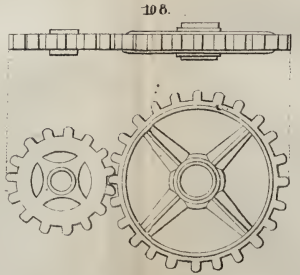
102.



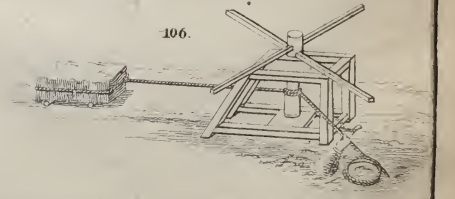
105.



108.

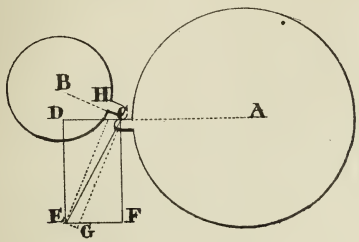


106.

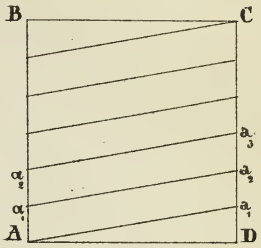


zu Fink Mechanik

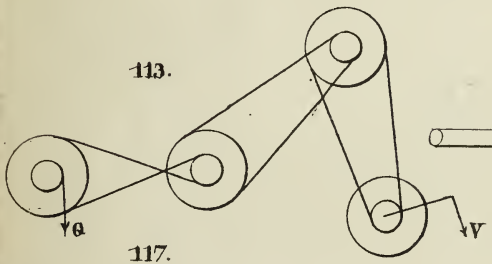
111.



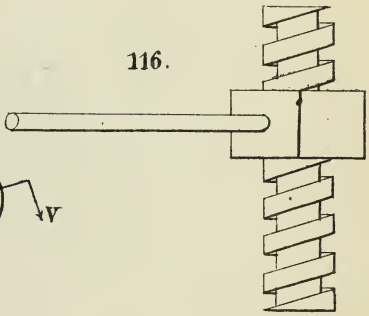
114.



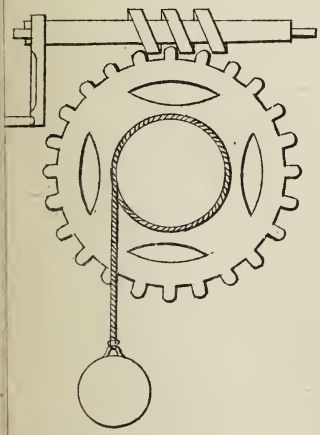
113.



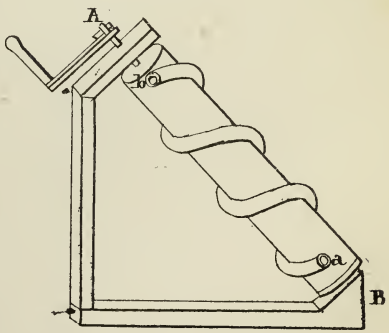
116.

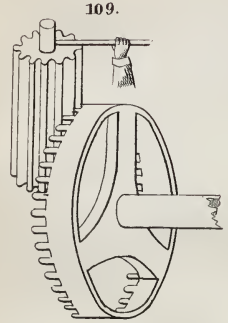


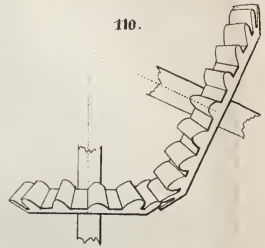
117.

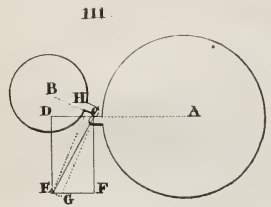


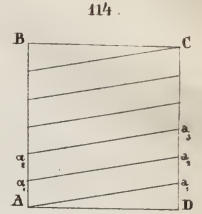
120.

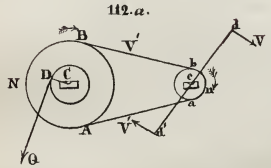


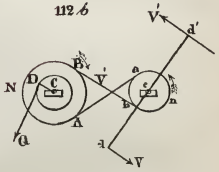


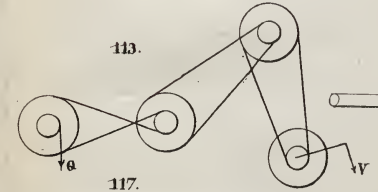


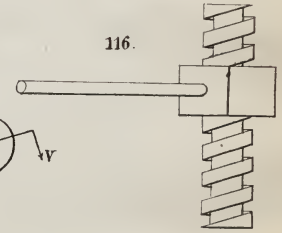


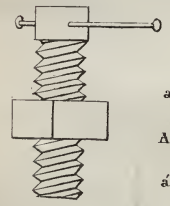


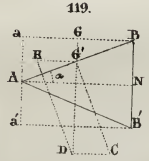


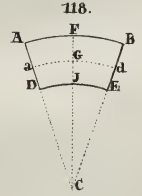


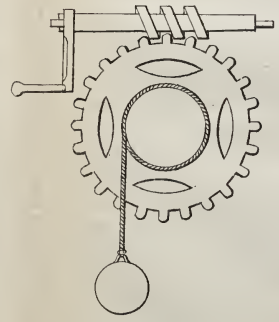


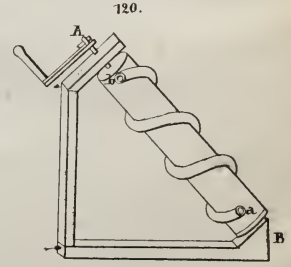




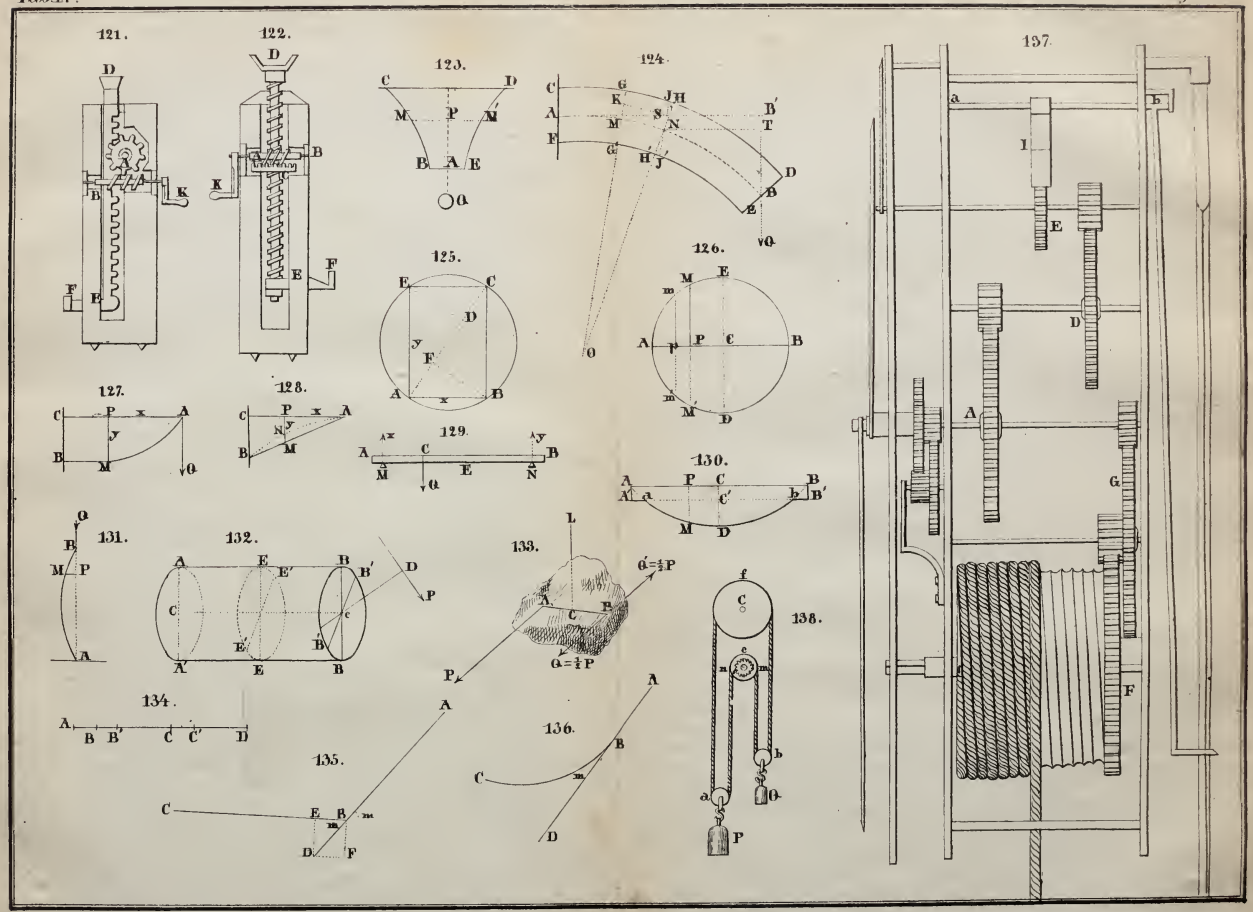








zu Fink Mechanik

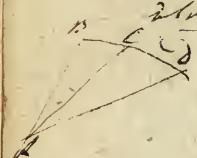


zu Fink Mechanik

Centralbewegung.

Erfolgt die Bewegung eines Punktes auf der gerade so, daß die Beschleunigung stets nach einem festen Punkte hin gerichtet ist, oder ist die Richtung der Beschleunigung stets die Verlängerung der Geraden, welche den beweglichen Punkt mit einem festen Punkte verbindet, so sagt man, die Bewegung erfolge nach dem Centrum hin; der letztere heißt Centralpunkt, die Beschleunigung Centralbeschleunigung, und die Bewegung selbst Centralbewegung.

I. Satz. Bei der Centralbewegung sind die von dem Centralpunkte nach den aufeinanderfolgenden Punkten der Bahn gezogenen Fahrstrahlen in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchlaufen.



Wenn $BC = s$ in der Zeit t, $CD = s'$ in der Zeit t' durchlaufen wird, und sich $t : t' = u : u$, so heißt das, s in u Theile getheilt und alle gleichzeitig durchlaufen werden. Die $r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$ sind gleich Fahrstrahlen $r'_1, r'_2, r'_3 \ldots r'_n$ gleich Fahrstrahlen und $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ gleiche Winkel, $\delta'_1, \delta'_2 \ldots \delta'_n$ gleiche Winkel und

$$\triangle ABC = \delta_1 r_1 + \delta_2 r_2 + \ldots + \delta_m r_m = \sum \delta_1 r_1$$

$$\triangle CSD = \delta'_1 r'_1 + \delta'_2 r'_2 + \ldots \delta'_n r'_n = \sum \delta'_1 r'_1$$

wo aber $\delta_1 r_1 = \delta_2 r_2 = \ldots = \delta'_1 r'_1 = \delta'_2 r'_2 = \ldots$

$$\triangle ABC : \triangle CSD = m \delta_1 r_1 : n \delta'_1 r'_1 = m : n = t : t'$$

d. h. die in verschiedenen gleichen Zeiten durchlaufenen Flächenräume verhalten sich wie diese Zeiten.

Wenn die Sehne BC und CD in gleichen Zeiten durchlaufen sind, so kann man mit Hülfe des Centralpunktes S die Sehne BD ziehen, welche $\triangle BCD$ abschneidet, und a und a_1 die Höhen dieser Dreiecke sind, so ist $\triangle BSC = \triangle CSD = \frac{1}{2} a s = \frac{1}{2} a_1 s_1$, also $s : s_1 = \frac{1}{a} : \frac{1}{a_1}$

d. h. die Sehnen gleicher Zeiten verhalten sich umgekehrt wie die Höhen der Dreiecke, welche die Mittelpunkte der Sehnen mit dem Centralpunkte verbinden.

Ist die Bahn ein Kreis, so ist $s : s_1 = \frac{1}{r} : \frac{1}{r}$, also $s = s_1$

d. h. die Centralbewegung in Kreisbahn ist eine gleichförmige.

Bewegt sich ein Körper von gleicher Masse m mit der Geschwindigkeit v in einem Kreise vom Halbmesser r, so muß in der Zeit t Sec. die Normalbeschleunigung, welche die Masse m in der Zeit t Sec. zu durchlaufen hat, durch die Kraft P hervorgebracht werden. Mit dem Punkte C als Mittelpunkt und AC als Halbmesser beschreibe man einen Kreis, welcher die Tangente AE in A berührt und die Verlängerung von AC in F schneidet.

$$AF = g \frac{P}{m} t^2, \quad \triangle AEF \sim \triangle ABF$$

$$AF : vt = vt : 2r$$

$$AF = \frac{v^2 t^2}{2r} = g \frac{P}{m} t^2$$

$$P = \frac{v^2}{2gr} m$$

oder die Anziehung P ist $= m$ mal der Centrifugalkraft F ist $= m$ mal

$$AF = AE \cdot \frac{AE}{2r}, \quad F = \frac{v^2}{2gr} m = \frac{2h}{r} m \quad \text{wenn } h = \frac{v^2}{2g}$$

$F : \mathfrak{F} = 2h : r$

d. h. in Verbindung mit dem Hebelgesetz: die Centripetalkraft verhält sich zur Schwungkraft umgekehrt wie der Halbmesser zur Höhe.

Für ein anderes Verhältniss ebenso also

$$F : \mathfrak{F} = \frac{v^2}{r} : \frac{v_1^2}{r_1}$$

d. h. die Centripetalkraft verhält sich überall wie die Schwungkraft, umgekehrt wie der Halbmesser.

Für gleiche Geschwindigkeit $F : F' = \frac{v^2}{r} : \frac{v_1^2}{r_1}$

Für gleiche Geschwindigkeit gleicher Körper $F : F' = \frac{1}{r} : \frac{1}{r_1}$

Für die Winkelgeschw. (Geschw. in Bogen für Radius $= r$)

ist $v = \omega r$ also

$$F = \frac{v^2}{gr} \quad \mathfrak{F} = \frac{1}{g} \omega^2 r \frac{r^2}{g} = \omega^2 r . \frac{Q}{g} \text{ Masse} = \frac{Q}{g}$$

Macht ein Körper i Umdr. in Sekunden, heißt

$$v = \frac{2r\pi n}{t}, \text{ also } F = \frac{4r\pi^2 n^2 Q}{g t^2}$$

Für $F : F' = \frac{r Q n^2}{t^2} : \frac{r_1 Q_1 n_1^2}{t_1^2}$

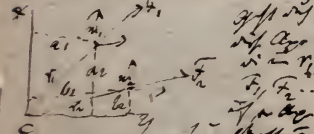
für $n = n_1$, $F : F' = \frac{rQ}{t^2} : \frac{r_1 Q_1}{t_1^2}$

für $n = n_1$, $t = t$, $F : F' = rQ : r_1 Q_1$

Für $\ldots Q = Q'$, $F : F' = r : r_1$

d. h. bei einem rotirenden Körper steht die centrale Kraft im umgekehrten Verhältniss mit der Umdrehungszeit in doppelter Potenz und mit dem Halbmesser in einfacher Potenz.

Hieraus ist ersichtlich, daß die zwei Kräfte $\mathfrak{F}$ und F einander nicht gleich kommen, aber ein solcher Körper kommt gleich rasch fort in entgegengesetzter Richtung, in entgegengesetzter Centripetalkraft, wie ist nun die Frage, in welcher Zeit die Centrifugalkraft die Oberhand mit der Länge der Schnur gerade messen kann.



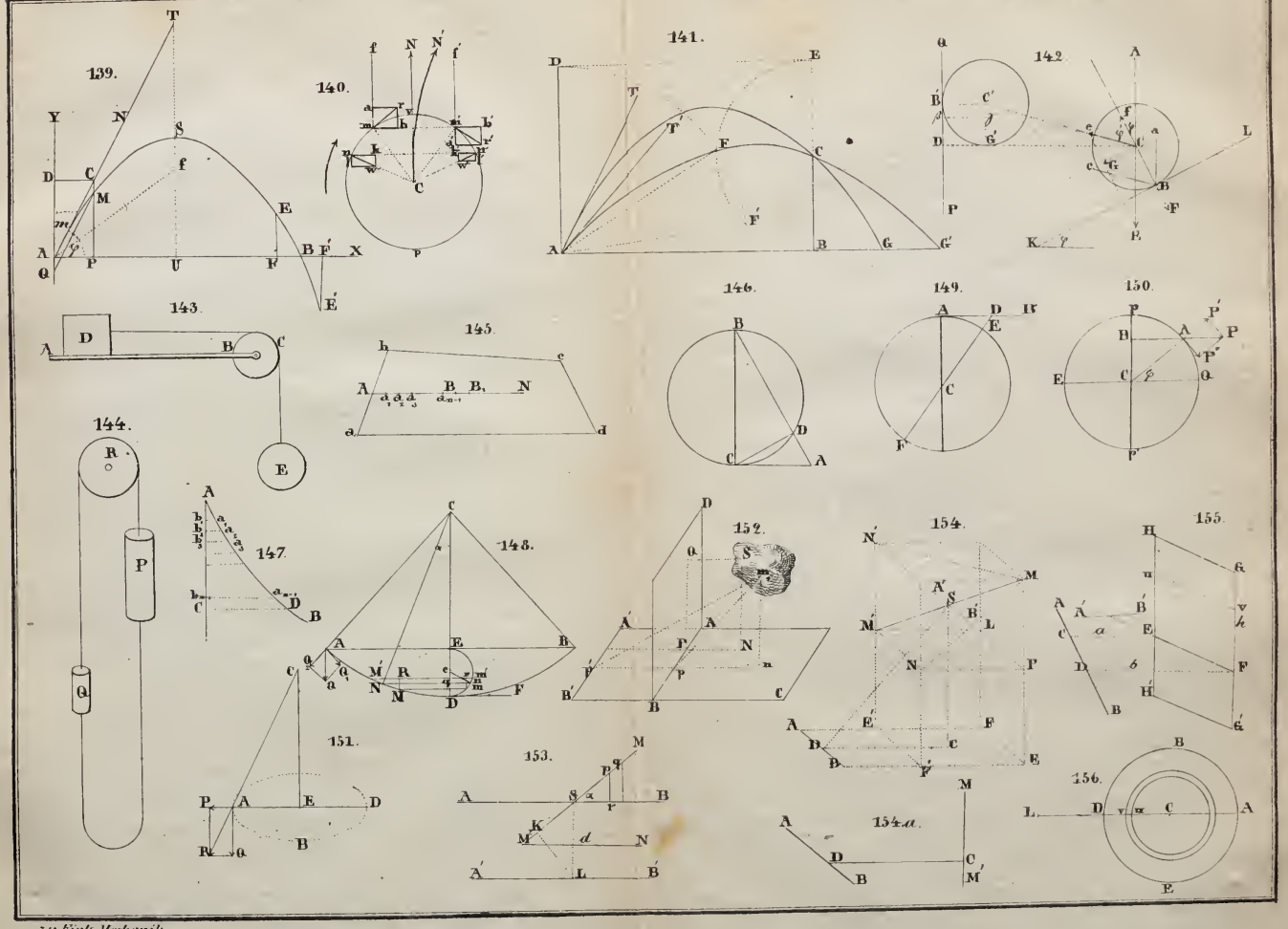
Setzt die Centrifugalkraft die Körper $m_1, m_2 \ldots$ in Bewegung, so sei $m_1, m_2 \ldots$ die Massentheilchen in $r_1, r_2 \ldots$ von der Axe abstehen die Centrifugalkräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \ldots$ welche $= \frac{m_1 v_1^2}{r_1}, \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \ldots$ sind, so müssen sie, damit der Körper in Ruhe bleibt, durch Centripetalkräfte $F_1, F_2 \ldots$ aufgehoben werden. Gehen die Centripetalkräfte für gleiche $F_1, F_2 \ldots$ auf X, Y projizirt aus

$$+ \Sigma Cy: \quad \frac{F_1 a_1}{r_1} + \frac{F_2 a_2}{r_2} + \ldots = \Sigma \frac{Fa}{r}$$

$$+ \Sigma Cx: \quad \frac{F_1 b_1}{r_1} + \frac{F_2 b_2}{r_2} + \ldots = \Sigma \frac{Fb}{r}$$

Tab. X.

Fig 139



zu Fink Mechanik

Setzt man für F die Werte $\frac{mv^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2 k}{2g} = \omega^2 r k$ so erhält man für die einzelnen Mittelpunkte ω

$$\Sigma \frac{aF}{r} = \omega^2 a_1 m_1 + \omega^2 a_2 m_2 + \dots = \omega^2 \Sigma (am)$$

$$\Sigma \frac{bF}{r} = \omega^2 b_1 m_1 + \omega^2 b_2 m_2 + \dots = \omega^2 \Sigma (bm)$$

Die Summen sind wieder Projektionen resultierender Mittelpunkte Centrifugalkräfte P und

$$P = \omega^2 \sqrt{(\Sigma(am))^2 + (\Sigma(bm))^2}$$

Ist nun α der Abstand der Masse $m_1, m_2 \dots$ welche auf k Coordinaten α, β projiziert sind α', β' der Abstand des Schwerpunkts von k und M die ganze Masse so hängt P

$$\Sigma (am) = M \alpha k$$

$$\Sigma (bm) = M \beta k$$

$$P = \omega^2 k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \omega^2 k d$$

d.i. die Centrifugalkraft, welche die Masse M in Abstand k hängend erhält ist d mal so groß als die Summe der Centrifugalkräfte, welche die einzelnen Massenteile erhalten.

Also

$$F = \frac{v^2}{2gk} D = \frac{v^2}{k} M$$

$$F = \frac{4\pi^2 n^2 k D}{2gT^2} = \frac{4\pi^2 n^2 k}{gT^2} M.$$

Für $F = 0$ erhält man Gleichgewicht des Stabes, da $F = 0$ sowohl für $\alpha = 0$, $\beta = 0$ als auch für $M = 0$ ist. Gleichgewicht erhält man also nur im Schwerpunkt.

Beispiel 1. Soll der Abstand des Mittelpunkts der Erde von dem Zentrum der Sonne berechnet werden. Das Jahr ist $T = 1963038$ Jahrestage

$$g = 30,19906 \text{ "}$$

$$\pi = 86164 \text{ "} \quad n = 1$$

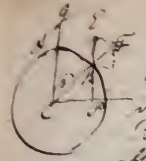
also $F = \frac{4\pi^2 n^2 D}{gT^2} = \frac{1}{288,4} D$; Setzt man G die gesuchte Anziehungskraft der Sonne ist, und k die Entfernung k und M die Centrifugalkraft F und m die Masse

$$G = F + D = F + 288,4 F = 289,4 F$$

$$F = \frac{1}{289,4} G$$

d.i. die Centrifugalkraft des Zentrums ist der 289,4 Teil der ganzen Anziehungskraft der Sonne.

Beispiel 2. Der Stab soll so gestellt werden, daß Schwingungsdauer, Centrum Oszillation und Punkt der Aufhängung gleich sind. Es sind die Entfernungen k und k' gesucht.



Im Äquator A wirkt die Centrifugalkraft von A nach G, die Anziehungskraft von G nach A, bei der Breite β wirkt die Centrifugalkraft von B gegen E, die Anziehung von F gegen B. Im A ist die Centrifugalkraft $F = \frac{1}{289,4} G$, also ist B nur $F' = \frac{1}{289,4} G \cos\beta$, und

$$F : F' = rQ : r'Q = r : r\cos\beta = 1 : \cos\beta$$

aber es kann nicht BF, sondern nur BE zur Verminderung der Schwere beitragen, aber $BE = F \cos\beta = \frac{1}{289,4} \cos^2\beta$. Da nun die ganze Anziehung G der Erde um $\frac{1}{288,4}$ größer ist als am Äquator d. i. G' also $G = \frac{289,4}{288,4} G'$ u. die in B stattfindende Anziehungskraft $g = G - \frac{1}{289} G \cos^2\beta = G\left(1 - \frac{1}{289,4}\cos^2\beta\right)$ so erhält man auch mit Einführung der für den Äquator geltenden Werthe

$$g = \frac{289,4}{288,4} G_1 \left(1 - \frac{1}{289,4}\cos^2\beta\right)$$

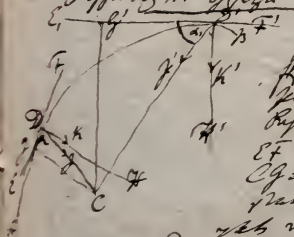
$$= G'\left(\frac{289,4 - \cos^2\beta}{288,4}\right) = G'\left(1 + \frac{1}{288,4}\sin^2\beta\right)$$

Beispiel 3. Ein Körper von Gewicht Q befindet sich am Ende eines Stabes mit dem Querschnitt a, Länge l, welcher am andern Ende in eine gedrehte Welle steckt, in viel Umdrehungen in der Minute muß diese Welle machen, wenn durch Wirkung der Centrifugalkraft der Stab zerrissen werden soll?

Wegen $F = \frac{4 r \pi^2 n^2 Q}{2 g t^2}$ ist F hier die Festigkeit, welche durch p.a dargestellt werden kann u. r ist $= l$, $t = bo$

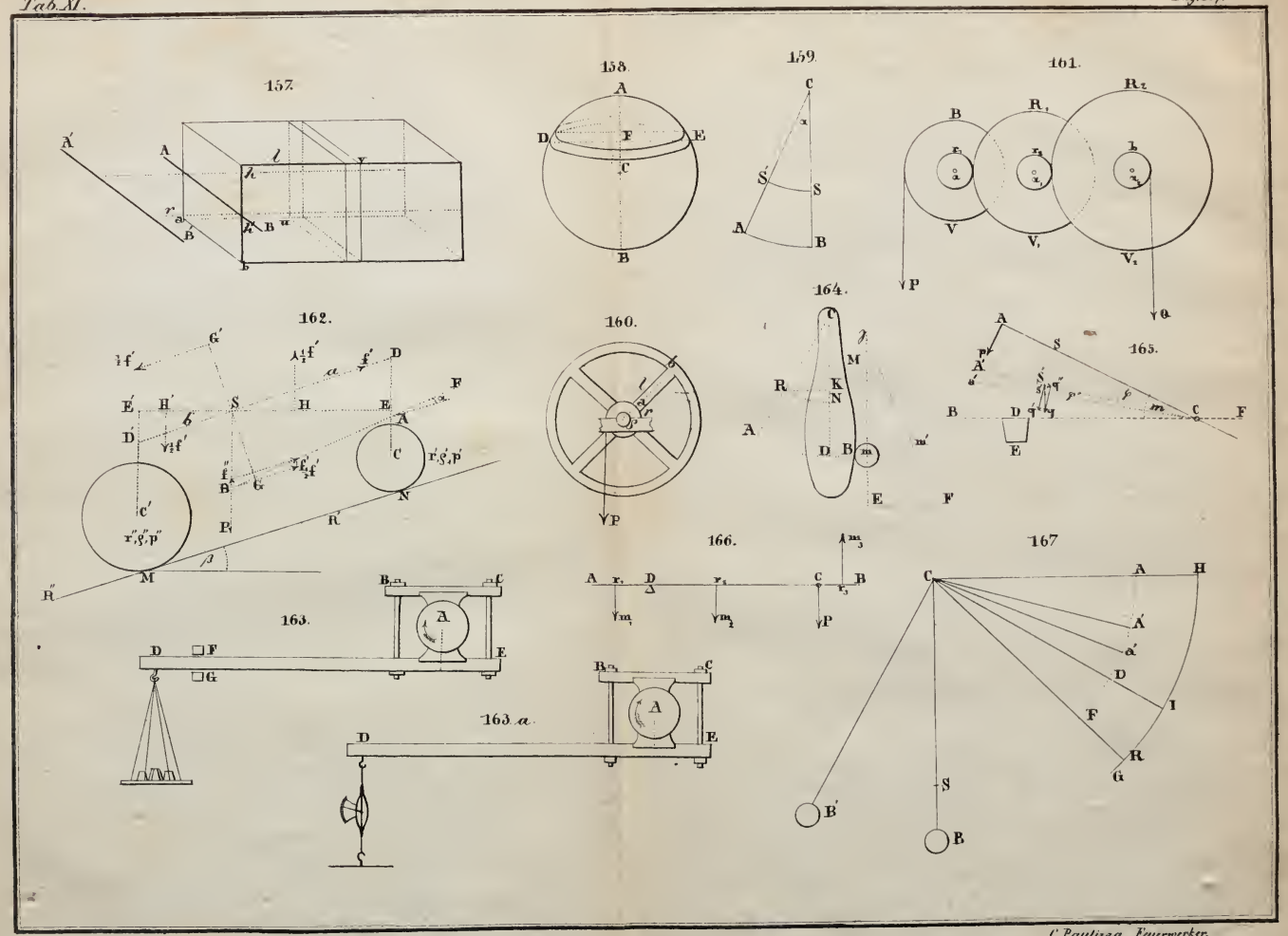
daher $n = \sqrt{\frac{a p r g\, bo^2}{4 l \pi^2 Q}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2 a p g}{Q l}}$

Aufstellung der Gesetze bei Bewegung der Körper in elliptischen Bahnen.



Ist AB eine beliebige Curve, welche mit den Fixpunkten von C aus gehender Kraft von einem materiellen Punkte durchlaufen wird, D u. D' 2 Punkte in der Bahn, welche um CD = r, CD' = r' von C abstehen, EF Tangente in D, E'F' in D' die Fortsetzung von C. Sei CG = a, CG' = a', DH, u. D'H' stehen senkrecht u. D'-D' u. gehen durch den Lösungsmittelpunkt von D u. D' für ε, ε': ∠CDE = α, CD'E' = α', die nach DF u. D'F' gerichteten Geschw. v u. v', die Beschleunigung welche die Centralkraft in den Lin. DC u. DE hervorbringt DJ = G u. D'J' = G' folglich die entsprechende Beschleunigung in der Richtung

Tab. XI. Fig. 157.



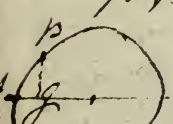
C. Paulizza Feuerwerker.

Lage a Mittelpunkt m Abstand i Bewegung M, so ist MO = r, MO' = r'
i Kraft N, N, a, a, ... i Kraft mg O, O' welche in i Lage
so ist g : g' = $\frac{r}{a^2 N^3} : \frac{r_1}{a_1^2 N_1^3}$
für jede M, O = R, M, O' = R' i. auf m Körper m Kugel
$$N : N_1 = \sqrt{kr} : \sqrt{k_1 r_1}$$
$$a : a_1 = \sqrt{\frac{r}{k}} : \sqrt{\frac{r_1}{k_1}}$$
$$aN : a_1 N_1 = r : r_1$$
also $g : g' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2}$
oder $P : P' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2}$

d. i. Kraft mit i Körper i m Kugel. Kraft unter m Körper
m m Bewegung m Kugel ist umgekehrt Quadrat
v. Abst i Körper vom Kugel i umgekehrt Verhältn.
ist i Gesetz d. Schwere.

Satz. Bewegt sich 2 Körper i Kugel. Bahn, welche die
Körper durch Anziehung der Kugel durchlaufen
ist entweder ein Kegelschnitt, wobei
gesucht wird d. Brennpunkt m Mittelpunkt.

Beweis. Bewegt sich Körper i Kugel. Bahn, welche
Körper durch Anziehung durchläuft, heißt
Bahn. Bahn ist Kegelschnitt, wobei
Mittelpunkt Kugel Brennpunkt.



Weg, wenn d. Anziehung i Punkt M = C ist
oder Mg = P = a
$$AB = c\tau = Mg \cdot r = P \cdot \tau r$$
$$P = \frac{c^2}{r\tau} \quad \text{i. e. } r\tau = \frac{c^2}{P}$$
$$P = \frac{2\pi a^2}{t^2} \quad \text{also für } r \text{ mittlere Entfernung}$$
d. Abstand Sonne v. Planeten mittlere Entfernung i. e. gesetzt.
wie d. Bahn d. Planeten. Wenn aber
$P : P' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2}$ — m Kraft für r mittlere Entf.
$P : P_1 = \frac{2\pi a^2}{t^2} : \frac{2\pi a_1^2}{t_1^2}$

Daher $r'^2 : r^2 = \frac{2r\pi^2}{t^2} : \frac{2r'\pi^2}{t'^2}$

also $t^2 : t'^2 = r^3 : r'^3$.

Die Quadrate der Umlaufszeit verhalten sich wie die Cubi der mittlern Entfernung.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 072662668